DS3 / 110

Problème 1 / 41

Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

Sous réserve que cette expression ait un sens, on pose pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{t f(t)}{x^2+t^2}\, dt$$

L'objet de ce problème est d'étudier cette transformation et d'en déduire le calcul de certaines intégrales.

1. Dans cette question on considère la fonction f définie par $f : t \mapsto \dfrac{\arctan(t)}{t^2}$.

a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.

- **0 pt :** $\dfrac{t\,f(t)}{x^2+t^2} = \dfrac{\arctan(t)}{t}\ \dfrac{1}{x^2+t^2}$
- **1 pt : pour tout $x_0 > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t\,f(t)}{{x_0}^2+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt :** $\dfrac{\arctan(t)}{t}\ \dfrac{1}{x^2+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t}\ \dfrac{1}{x^2}$ **et ainsi l'intégrande est prolongeable par continuité en 0**
- **1 pt :** $\dfrac{t\,f(t)}{{x_0}^2+t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$
- **1 pt : théorème de domination des intégrales généralisées de fonctions continues positives écrit correctement**

b) On pose $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t\,(1+t^2)}\, dt$. Exprimer F en fonction de G.

- **1 pt : on pose $\boxed{u = xt}$ (donc $t = \dfrac{1}{x}\, u$ et $dt = \dfrac{1}{x}\, du$) et bornes inchangées**
- **1 pt :** $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{\frac{1}{x}\, u\, \left(1+\left(\frac{1}{x}\, u\right)^2\right)}\, \frac{1}{x}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\ \arctan(u)}{u\ (x^2+u^2)}\, du = x^2\, F(x)$

c) Montrer avec précision que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^1 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t\,(1+t^2)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$**
  - × **0 pt :** $\underline{h}_t{}'(x) = \dfrac{t}{t\,(1+t^2)}\ \dfrac{1}{1+(xt)^2} = \dfrac{1}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+(xt)^2}$
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t\,(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car c. p. m. sur $]0, +\infty[$ et $G(x) = x^2\, F(x)$ fournit l'intégrabilité par bonne définition de $F(x)$**

× **1 pt : pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{h}'_t(x)$ est c. p. m. sur $]0,+\infty[$**

× **1 pt :** $\left|\underline{h}'_t(x)\right| = \left|\dfrac{1}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+(xt)^2}\right| = \left|\dfrac{1}{1+t^2}\right|\ \left|\dfrac{1}{1+(xt)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$
et $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

d) Calculer G' et en déduire la valeur de $F(x)$ pour tout x.

- **1 pt :** $G'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ \frac{1}{1+(xt)^2}\ dt$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+(xt)^2} = \dfrac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+(xt)^2} - \dfrac{\frac{1}{x^2-1}}{1+t^2}$ **si** $x \neq 1$
- **1 pt :** $G'(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+(xt)^2}\ dt - \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^2}\ dt = \frac{\pi}{2\,(x+1)}$
- **1 pt :** $G(x) = \cancel{G(0)} + \displaystyle\int_0^x \frac{\pi}{2\,(t+1)}\ dt = \frac{\pi}{2}\ \ln(x+1)$
- **0 pt :** $F(x) = \dfrac{G(x)}{x^2}$

e) Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\arctan(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et utiliser ce qui précède pour déterminer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2\ dt$$

- **0 pt : la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\arctan(t)}{t}\right)^2$ est continue sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : on la prolonge par continuité en 0 puisque $\left(\dfrac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \underset{t\to 0}{\sim} 1$**
- **1 pt :** $\left(\dfrac{\arctan(t)}{t}\right)^2 = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2\ dt = -\left[\frac{\left(\arctan(t)\right)^2}{t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t\,(1+t^2)}\ dt$ **et validité car le crochet est convergent**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2\ dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t\,(1+t^2)}\ dt = 2\,F(1) = \pi\ \ln(2)$

2. Dans cette question on considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$.

a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0,+\infty[$.

- **0 pt :** $\dfrac{t\,f(t)}{x^2+t^2} = \cos(t)\ \dfrac{1}{x^2+t^2}$
- **1 pt : pour tout $x_0 > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t\,f(t)}{{x_0}^2+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$**
- **1 pt :** $\cos(t)\ \dfrac{1}{x^2+t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
- **1 pt : théorème de domination des intégrales généralisées de fonctions continues positives écrit correctement**

b) On considère H la fonction définie par $H : x \mapsto xF(x)$.
Montrer que la fonction H est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et : $\lim\limits_{x \to 0} H(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
(on pourra penser au changement de variable $t = ux$)

- **0 pt : on pose** $\boxed{t = ux}$ **ou plutôt** $\boxed{u = \dfrac{1}{x}\, t}$ **(donc** $dt = x\ du$**) et bornes inchangées**
- **1 pt :** $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2 + (ux)^2}\ x du = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{1+u^2}\, du$ **et** $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{1+u^2}\, du$
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } x \textbf{ »}}$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(ux)}{1+u^2} = \dfrac{\cos(0)}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+u^2}$
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } u \textbf{ »}}$
  × **1 pt :** $\ell : u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ / $u \mapsto \dfrac{\cos(ux)}{1+u^2}$ **c.p.m. sur** $[0, +\infty[$ **(au moins une)**
  × **1 pt :** $\left| \dfrac{\cos(ux)}{1+u^2} \right| = \dfrac{|\cos(ux)|}{1+u^2} \leqslant \dfrac{1}{1+u^2}$ **et** $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ **est intégrable sur** $[0, +\infty[$
- **0 pt : ainsi par TCD** $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\ du = \frac{\pi}{2}$
- **1 pt : par ailleurs :** $|H(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos(ux)}{1+u^2} \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\ du = \frac{\pi}{2}$

c) Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^2 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$
  × **1 pt : pour tout** $t_0 \in [0, +\infty[$, $\underline{f}_{t_0} : x \mapsto \cos(t_0)\ \left(x^2 + {t_0}^2\right)^{-1}$ **est** $\mathscr{C}^2$ **sur** $]0, +\infty[$.
  × **1 pt :** $\underline{f}_{t_0}'(x) = -\cos(t_0)\ \left(x^2 + {t_0}^2\right)^{-2} \times 2x$
  et $\underline{f}_{t_0}''(x) = (-2)\ \cos(t_0)\ \left(x^2 + {t_0}^2\right)^{-3} \times \left(-3x^2 + {t_0}^2\right)$
- **4 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  × **1 pt : pour tout** $x \in\ ]0, +\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{x^2 + t^2}$ **est intégrable sur** $[0, +\infty[$ **(déjà montré)**
  × **1 pt : pour tout** $x \in\ ]0, +\infty[$, $t \mapsto \dfrac{-2x\ \cos(t)}{\left(x^2 + t^2\right)^2}$ **est intégrable sur** $[0, +\infty[$ **car c.p.m.**
  sur $[0, +\infty[$ **et** $\left| \dfrac{-2x\ \cos(t)}{\left(x^2+t^2\right)^2} \right| = 2\ \dfrac{x\,|\cos(t)|}{\left(x^2+t^2\right)^2} = \underset{t \to +\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^4}\right)$
  × **2 pts : si** $x \in [a, b] \subset\ ]0, +\infty[$ **et** $t \in [0, +\infty[$ **:**
  $\left| \dfrac{-2(-3x^2 + t^2)\ \cos(t)}{(x^2+t^2)^3} \right| = 2\,|\cos(t)|\ \dfrac{|-3x^2+t^2|}{(x^2+t^2)^3} \leqslant 2\ \dfrac{3x^2+t^2}{(x^2+t^2)^3} \leqslant 2\ \dfrac{3x^2+3t^2}{(x^2+t^2)^3} = \dfrac{6}{(x^2+t^2)^2}$
  et $t \mapsto \dfrac{6}{(a^2+t^2)^2}$ **intégrable sur** $[0, +\infty[$
- **0 pt :** $F''(x) = -2 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) \times \left(-3\,x^2 + t^2\right)}{(x^2+t^2)^3}\ dt$

d) On note $h : (x,t) \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. En admettant : $\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t) + \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = 0$. Établir que H est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

- **1 pt : en notant** $\underline{h}_t : x \mapsto h(x,t)\ \cos(t)$**, on obtient (**$H$ **de classe** $\mathscr{C}^2$ **puisque** F **l'est) :**
  $H'(x) = F(x) + x\,F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{f}_t(x)\ dt + x \int_0^{+\infty} \underline{f}'_t(x)\ dt = \int_0^{+\infty} \underline{h}'_t(x)\ \cos(t)\ dt$
  En procédant de même : $H''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{h}''_t(x)\ \cos(t)\ dt$
- **1 pt : en notant** $\underline{h}_x : t \mapsto h(x,t)\ \cos(t)$**, d'après l'énoncé :**
  $H''(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{h}''_x(t)\ \cos(t)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{h}''_x(t)\ \cos(t)\ dt = \Big[\ \underline{h}'_x(t)\ \cos(t)\ \Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \underline{h}'_x(t)\ \sin(t)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{h}'_x(t)\ \sin(t)\ dt = \Big[\ \underline{h}_x(t)\ \sin(t)\ \Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underline{h}_x(t)\ \cos(t)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{h}''_x(t)\ \cos(t)\ dt = \cancel{\Big[\ -\underline{h}'_x(t)\cos(t) - \underline{h}_x(t)\sin(t)\ \Big]_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} \underline{h}_x(t)\cos(t)\ dt = H(x)$

e) En déduire l'expression de F.

- **1 pt :** $H'' = H$**, ainsi il existe** $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$**,** $H : x \mapsto \alpha\ \mathrm{e}^{x} + \beta\ \mathrm{e}^{-x}$
- **1 pt : comme** H **est bornée, alors** $\alpha = 0$
- **1 pt : comme** $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = \dfrac{\pi}{2}$**,** $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ **et** $F : x \mapsto \dfrac{\pi}{2\,x}\ \mathrm{e}^{-x}$

Exercice 1 / 10

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

(on commencera par déterminer χ_{M_a})

- **1 pt :** $\chi_{M_a}(X) = (X-1)\,(X^2-1) = (X-1)^2\,(X+1)$ **donc** $\mathrm{Sp}(M_a) = \{-1, 1\}$
- **1 pt :** $1 \leqslant \dim\big(E_{-1}(M_a)\big) \leqslant m_{-1}(M_a) = 1$ **donc** $\dim\big(E_{-1}(M_a)\big) = 1$
- **1 pt : comme** χ_{M_a} **scindé,** M_a **est diagonalisable ssi** $\dim\big(E_1(M_a)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) - 1 = 2$
- **1 pt : si** $a = 0$**,** $\mathrm{rg}(M_0 - I_3) = 1$ **et donc** $\dim\big(E_1(M_a)\big) = 2$
  sinon $\mathrm{rg}(M_a - I_3) = 2$ **et donc** $\dim\big(E_1(M_a)\big) = 1$

4. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

- **1 pt :** 0 **n'est pas valeur propre de** M_a **donc** M_a **est inversible pour tout** $a \in \mathbb{R}$

5. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **0 pt : on note** $\varphi_a : X \mapsto M_a\,X$ **l'application linéaire canoniquement associée à** M_a
- **1 pt : on raisonne par analyse-synthèse : on cherche une base** $\mathscr{B} = (U, V, W)$ **de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ **telle que** $U \in E_{-1}(\varphi_a)$**,** $V \in E_1(\varphi_a)$ **et** W **tel que** $\varphi_a(W) = V + W$
- **3 pts :** $E_{-1}(\varphi_a) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ **et** $E_1(\varphi_a) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ **et** $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : la famille** (U, V, W) **est bien une base**

Exercice 2 / 11

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$ associe $\varphi_x(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\ dt$.

6. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt : pour tout $x \geqslant 0$, la fonction φ_x est continue sur $[0, +\infty[$**
- **1 pt : $\dfrac{e^{-t}}{1+xt} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-t}\right)$ + théorème de domination**

7. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
On pourra comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour deux éléments x et y de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.

- **1 pt : si $x < y$, $\dfrac{1}{1+xt} > \dfrac{1}{1+yt}$ et donc $\varphi_x(t) > \varphi_y(t)$**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale ($+\infty > 0$), $f(x) > f(y)$ et la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$**

8. **Limite de f en l'infini**

a) Démontrer que la suite $\left(f(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.

- **1 pt : la suite numérique $(f(n))$ est décroissante (q. précédente) et minorée par 0 puisque $\dfrac{1}{1+n\,t} \geqslant 0$ et croissance de l'intégrale**
- **0 pt : ainsi, $(f(n))$ converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.**

b) Déterminer la valeur de ℓ.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } n \textbf{ »}}$
  la suite de fonctions (φ_n) CS sur $[0, +\infty[$ vers $h : t \mapsto \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ 0 & si\ t > 0 \end{cases}$ c.p.m. sur $[0, +\infty[$
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  × **1 pt : pour tout $t \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$**
  $\left|\,\varphi_n(t)\,\right| = \dfrac{\left|e^{-t}\right|}{|1+nt|} = \dfrac{e^{-t}}{1+nt} \ \leqslant\ e^{-t}$
  × **1 pt : la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable**
  × **0 pt : ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\ dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t)\right)\ dt = \int_0^{+\infty} 0\ dt = 0$**

c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

- **1 pt : la fonction f est décroissante et minorée sur $[0, +\infty[$. Elle admet donc une limite finie en $+\infty$**
- **1 pt : par unicité de la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$**

Exercice 3 / 20

9. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

- **0 pt : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est alternée**
- **1 pt : la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est décroissante**
- **1 pt : la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge vers 0**

Ainsi, par CSA, la série est convergente

10. ***a)*** Démontrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\ dx\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$.

On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

On note $f_n : x\mapsto(1-x)\ x^{2n}$

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } n\textbf{ »}}$
  - **pour tout $x\in[0,1[$, la série numérique $\sum\ f_n(x_0)$ ACV car c'est une série géométrique de raison ${x_0}^2\in\ ]-1,1[$ donc la série $\sum\ f_n$ CS sur $[0,1[$**
  - **la fonction $S : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)\ x^{2n}=(1-x)\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$ est c.p.m sur $[0,1[$**
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité - étude « en } t\textbf{ »}}$

  pour tout $k\in\mathbb{N}$, f_k est intégrable sur $[0,1[$ comme fonction continue sur le segment $[0,1]$
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Hypothèse spécifique}}$

  la série $\displaystyle\sum\int_0^1|f_k(t)|\ dt$ est convergente. En effet :

$$\int_0^1|f_k(t)|\ dt\ =\ \int_0^1 x^{2n}\ dt-\int_0^1 x^{2n+1}\ dt\ =\ \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\ =\ \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\ =\ \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- **0 pt : finalement :** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\ dx\right)=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^{2n}(1-x)\right)\ dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$

b) En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\sum_{\substack{n=1\\ \boxed{n\text{ pair}}}}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum_{\substack{n=1\\ \boxed{n\text{ impair}}}}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{(-1)^{2j+1}}{2j}+\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\frac{(-1)^{2j+2}}{2j+1}$
- **1 pt :** $\displaystyle=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\frac{1}{2j+1}-\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{1}{2j}=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\frac{1}{2j+1}-\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\frac{1}{2j+2}=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\left(\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{2j+2}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\ dx\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\ dx\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(2)$

11. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$.

- **1 pt : si** $x_0 \in]-1,1[$**,** $\left| (-1)^{n+1} \dfrac{{x_0}^n}{n} \right| = \dfrac{|x_0|^n}{n} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(|x_0|^n\right)$
  La série num. $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{{x_0}^n}{n}$ **est donc ACV par théorème de domination des SATP**
- **1 pt : si** $x_0 = 1$**, la série** $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$ **CV par CSA**
- **1 pt : si** $x_0 = -1$**, la série** $\sum (-1)^{n+1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ **DV (série harmonique)**
- **1 pt : si** $x_0 > 1$**,** $\left| (-1)^{n+1} \dfrac{{x_0}^n}{n} \right| = \dfrac{|x_0|^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **et la série GDV**
- **1 pt : si** $x_0 < -1$**,** $\left| (-1)^{n+1} \dfrac{{x_0}^n}{n} \right| = \dfrac{|x_0|^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **et la série GDV**

On en conclut que φ **est définie sur** $]-1,1]$

12. Calculer $\varphi(1)$.

- **1 pt :** $\varphi(1) = \ln(2)$ **(cf question 10b)**

13. ***a)*** Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,dx$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1$
- **1 pt :** $= \big(\arctan(1) - \arctan(0)\big) - \dfrac{1}{2}\big(\ln(2) - \cancel{\ln(1)}\big) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(2)$

b) En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx\right)$, déterminer la valeur de la somme : $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

- **0 pt :** $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \int_0^1 \left(-x^2\right)^n (1-x)\,dx$
- **1 pt : par théorème d'intégration terme à terme (même argument qu'en 10a)**
  $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx\right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n (1-x)\right) dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1-\left(-x^2\right)}\,dx$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$
- **1 pt :** $S = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(2)$ **d'après la question précédente**

Problème 2 / 28

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![2,n]\!],\ f(e_j) = e_1 + e_j \right) \quad \text{et} \quad \left(g = f - \mathrm{id}_{E_n}\right)$$

14. Donner, dans la base $\mathscr{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g.

- **2 pts :** $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. Justifier que f et g sont diagonalisables.

- **1 pt : les matrices** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ **et** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ **sont symétriques réelles donc diagonalisables. Ainsi,** f **et** g **le sont**

16. **Diagonalisation de f et de g dans une même base**

a) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(g)$.

- **1 pt :** $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\,(g(e_1), \dots, g(e_n)) = \mathrm{Vect}\,(e_2 + \dots + e_n, e_1, \dots, e_1) = \mathrm{Vect}\,(e_2 + \dots + e_n, e_1)$
- **1 pt :** $\mathrm{rg}(g) = \dim\Big(\mathrm{Vect}\,(e_2 + \dots + e_n, e_1) \Big) = 2$
- **2 pts :** $(e_3 - e_2, \dots, e_n - e_2)$ **est une famille libre de** $\mathrm{Ker}(g)$ **et de bon cardinal (par théorème du rang). C'est donc une base de** $\mathrm{Ker}(g)$

b) Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n.

- **1 pt :** $\forall j \in [\![3, n]\!]$**,** $\langle e_j - e_2, e_1 \rangle = \langle e_j, e_1 \rangle - \langle e_2, e_1 \rangle = 0 - 0 = 0$
- **1 pt :** $\forall j \in [\![3, n]\!]$**,** $\langle e_j - e_2, e_2 + \dots + e_n \rangle = \sum\limits_{i=2}^{n} \langle e_j, e_i \rangle - \sum\limits_{i=2}^{n} \langle e_2, e_i \rangle = \langle e_j, e_j \rangle - \langle e_2, e_2 \rangle = 1 - 1 = 0$
- **1 pt : ainsi, les sev** $\mathrm{Im}(g)$ **et** $\mathrm{Ker}(g)$ **sont orhtogonaux donc en somme directe**
- **1 pt : enfin,** $\dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) = 2 + n - 2 = n = \dim(E_n)$

c) Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\mathrm{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

- **1 pt : comme** $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) = n - 2 > 0$ **alors** 0 **est valeur propre de** g **(de sep de dim** $n - 2$**)**
- **1 pt : comme** g **est diagonalisable,** $\dim(E_n) = \dim(E_0(g)) + \sum\limits_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(g) \\ \lambda \neq 0}} \dim\big(E_\lambda(g)\big)$ **donc**

  $\sum\limits_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(g) \\ \lambda \neq 0}} \dim\big(E_\lambda(g)\big) = n - (n - 2) = 2$ **et il y a donc au maximum** 2 **autres val. propres**
- **1 pt : si on note** λ_1 **et** λ_2 **les deux valeurs propres non nulles (éventuellement égales) alors, comme** g **est diagonalisable** $\mathrm{tr}(g) = m_0(g) \times 0 + m_{\lambda_1}(g)\ \lambda_1 + m_{\lambda_2}(g)\ \lambda_2$
- **1 pt : on démontre (par l'absurde) que** $\lambda_1 \neq \lambda_2$**. Si** $\lambda_1 = \lambda_2$ **alors l'égalité précédente démontre** $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$

d) On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :
Méthode 1

(i) Démontrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont stables par g.

- **1 pt : pour tout** $y \in \mathrm{Im}(g)$**,** $g(y) \in \mathrm{Im}(g)$ **donc** $\mathrm{Im}(g)$ **est stable par** g
- **1 pt : pour tout** $x \in \mathrm{Ker}(g)$**,** $g(x) \in \mathrm{Ker}(g)$ **puisque** $g\big(g(x)\big) = g(0_{E_n}) = 0_{E_n}$

(ii) Déterminer la matrice H dans la base $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\mathrm{Im}(g)$ induit par g.

- **1 pt : en notant** $e'_1 = e_1$ **et** $e'_2 = e_2 + \dots + e_n$ **alors** $g(e'_1) = e_2 + \dots + e_n = e'_2$
- **1 pt :** $g(e'_2) = g(e_2 + \dots + e_n) = \sum\limits_{k=2}^{n} g(e_k) = (n-1) \cdot e_1 = (n-1) \cdot e'_1$
- **0 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(h) = H = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h.

- **1 pt :** $\chi_h(X) = \begin{vmatrix} X & -(n-1) \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - (n-1) = \left(X - \sqrt{n-1}\right)\ \left(X + \sqrt{n-1}\right)$
  (ou formule $\chi_h(X) = X^2 - \mathrm{tr}(h)\ X + \det(h)$**)**
- **1 pt :** $E_{\sqrt{n-1}}(h) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{n-1}\ e_1' + e_2'\right)$
- **1 pt :** $E_{-\sqrt{n-1}}(h) = \mathrm{Vect}\left(-\sqrt{n-1}\ e_1' + e_2'\right)$

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2.

- **1 pt : on note** $\mathscr{B}' = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ **base obtenue par concaténation des bases** $\mathscr{B}_1$ **et** $\mathscr{B}_2$
  on obtient : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\chi_g(X) = X^{n-2} \times \chi_h(X)$ **or :** $\chi_g(X) = X^{n-2} \times (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$
  d'où $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ **et** $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$

Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathrm{Sp}\left(g^2\right) = \{0, {\lambda_1}^2, {\lambda_2}^2\}$.

- **1 pt : dans une base de diagonalisation** $\mathscr{B}'$ **de** g**,**

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g^2) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g)\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & {\lambda_1}^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & {\lambda_2}^2 \end{pmatrix} \textbf{ donc } \mathrm{Sp}(g^2) = \{0, {\lambda_1}^2, {\lambda_2}^2\}$$

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g^2) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\right)^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$

(iii) En déduire, en fonction de n, la valeur de ${\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2$.

- **1 pt :** $\mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g^2)\right) = {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 = (n-1) + 1 + \ldots + 1 = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g^2)\right)$

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

- **1 pt :** ${\lambda_1}^2 + (-\lambda_1)^2 = 2(n-1)$ **donc** ${\lambda_1}^2 = n-1$ **et** $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$

e) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$
telle que $P^{-1}GP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \cdots, 0)$. On ne demande pas de déterminer P^{-1}.

- **1 pt :**

f) Justifier que la matrice $P^{-1}FP$ est diagonale.

- **1 pt :**

17. Résoudre pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = FX(t) + t\,U$ où U est la première colonne de la matrice P.

- **1 pt :**