DS3

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.
Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1 : Endomorphisme cyclique - `CCINP 2023 PC`

Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

- On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\big(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\big)$ soit une base de l'espace vectoriel E.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note de plus $E_\lambda(f)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_\lambda(f) \ = \ \{x \in E \mid (f - \lambda\, \mathrm{id}_E)(x) = 0_E\}$$

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

1. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la famille $\big(v, f(v)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

- On commence par calculer $f(v)$.

$$f(v) \ = \ \big(4 \times 1 - 2 \times 0,\ 1 + 0\big) \ = \ (4,\ 1)$$

- La famille $\big(v, f(v)\big)$ est donc :
  × libre car constituée de 2 vecteurs non colinéaires,
  × telle que : Card $\Big(\big(v, f(v)\big)\Big) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

  On en déduit que la famille $\big(v, f(v)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un endomorphisme cyclique de } \mathbb{R}^2.}$$

□

2. Déterminer $E_2(f)$ et $E_3(f)$.

Démonstration.

- Soit $u \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_2(f) & \Longleftrightarrow & (f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\
& \Longleftrightarrow & f(u) - 2\,u = 0_{\mathbb{R}^2} \\
& \Longleftrightarrow & (4x - 2y,\ x + y) - 2\,(x, y) = (0, 0) \\
& \Longleftrightarrow & (2x - 2y,\ x - y) = (0, 0) \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & - & 2\,y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & - & 2\,y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \end{array}\right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(f) & = & \{u \in \mathbb{R}^2 \mid (f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\} \\
& = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \\
& = & \{(y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{y \cdot (1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((1, 1)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_2(f) = \mathrm{Vect}\left((1, 1)\right).}$$

- Soit $u \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_3(f) & \Longleftrightarrow & (f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\
& \Longleftrightarrow & f(u) - 3\,u = 0_{\mathbb{R}^2} \\
& \Longleftrightarrow & (4x - 2y,\ x + y) - 3\,(x, y) = (0, 0) \\
& \Longleftrightarrow & (x - 2y,\ x - 2y) = (0, 0) \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2\,y & = & 0 \\ x & - & 2\,y & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2\,y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2\,y \end{array}\right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_3(f) & = & \{u \in \mathbb{R}^2 \mid (f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\} \\ & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2\,y\} \\ & = & \{(2y,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot (2,1) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,((2,1)) \end{array}$$

On en conclut : $E_3(f) = \mathrm{Vect}\,((2,1))$.

□

3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Démonstration.
On note : $w = (1,1)$.

- D'après la question précédente : $w \in E_2(f)$. On en déduit : $f(w) = 2 \cdot w$.
- On obtient alors :
  - × d'une part : $w \neq 0_{\mathbb{R}^2}$
  - × d'autre part, la famille $\big(w, f(w)\big) = (w, 2 \cdot w)$ est une famille liée. Ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^2$ (car une base est toujours libre).

Il existe donc un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $\big(w, f(w)\big)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Commentaire

- Notons que la réponse à cette question ***3.*** ne contredit pas ce qui est démontré en question ***1.*** : la cyclicité de l'endomorphisme f.
- En effet, la proposition « l'endomorphisme f est cyclique » s'écrit :

$$\exists w_0 \in \mathbb{R}^2,\ \big(w_0, f(w_0)\big) \text{ base de } \mathbb{R}^2$$

  Dire que l'endomorphisme f `N`'est `PAS` cyclique s'écrit donc :

$$\begin{array}{rl} & \mathtt{NON}(\exists w_0 \in \mathbb{R}^2,\ \big(w_0, f(w_0)\big) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2) \\ \Leftrightarrow & \forall w \in \mathbb{R}^2,\quad \big(w, f(w)\big) \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^2 \\ \Leftrightarrow & \forall w \in \mathbb{R}^2,\quad \mathcal{Q}(w) \end{array}$$

- L'énoncé veut ici insister sur la différence entre les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
  - × Pour démontrer qu'un endomorphisme n'est pas cyclique, il faut montrer que, **pour tout** $w \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Q}(w)$.
  - × L'**existence** d'un vecteur w_0 vérifiant $\mathcal{Q}(w_0)$ ne démontre pas que tous les vecteurs w de $\mathbb{R}^2$ vérifient $\mathcal{Q}(w)$.
    Par exemple, remarquer $1 \geqslant 0$ ne démontre pas que tous les réels sont positifs.

□

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

4. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, en notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on sait : $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.
  Pour démontrer la relation demandée, il suffit donc de prouver :
$$M^2 \;=\; M + 2\,I_3$$
- On calcule :
$$M^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
- De plus :
$$M + 2\,I_3 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \;=\; M^2$$

$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation : } g + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = g^2.}$$

□

5. a) Déterminer $E_{-1}(g)$ et $E_2(g)$.

Démonstration.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
  Autrement dit : $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_{-1}(g) & \Longleftrightarrow & (g + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (M + I_3)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \; x = y - z \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_{-1}(g) & = & \{u \in \mathbb{R}^3 \mid (g + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\} \\ & = & \{(y-z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{y \cdot (1,1,0) + z \cdot (-1,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((1,1,0), (-1,0,1)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_{-1}(g) = \mathrm{Vect}\left((1,1,0), (-1,0,1)\right).}$$

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$.

  Autrement dit : $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} u \in E_2(g) & \Longleftrightarrow & (g - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Longleftrightarrow & (M - 2\,I_3)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & - & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \\ & - & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & - & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & - & y & = & -z \\ & & y & = & -z \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} -2\,x & = & -2\,z \\ y & = & -z \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_2(g) & = & \{u \in \mathbb{R}^3 \mid (g - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \ \texttt{ ET } \ y = -z\} \\ & = & \{(z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{z \cdot (1,-1,1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((1,-1,1)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_2(g) = \mathrm{Vect}\left((1,-1,1)\right).}$$

□

Commentaire

- il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_2(g) = \mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si $u \in \mathbb{R}^3$ et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont bien deux représentations différentes du même triplet u, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3}_{\in \mathbb{R}^3} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\mathrm{Vect}\left((-2,-1,1)\right)}_{\subseteq E_2(g)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{\subseteq E_2(M)}$$

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(M)$ par lecture de la matrice $M - \lambda\, I$. Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 2$.
  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(M)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(M - 2\, I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Si l'on choisit $x \neq 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut choisir $y = -x$ et $z = x$.

  En prenant par exemple $x = 1$, on obtient : $E_2(M) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \dim\left(E_2(M)\right) + \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\mathrm{rg}(M - 2\text{‘}, I_3)}$$

  (par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

  Ainsi : $\dim\left(E_2(M)\right) = 3 - 2 = 1$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

b) Démontrer : $E_{-1}(g) \oplus E_2(g) = \mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on note :

$$u_1 = (1,1,0), \qquad u_2 = (-1,0,1) \qquad \text{et} \qquad u_3 = (1,-1,1)$$

- La famille $\mathcal{F}_{-1} = \left((1,1,0), (-1,0,1)\right) = (u_1, u_2)$ est :
  × génératrice de $E_{-1}(g)$ d'après la question précédente,
  × libre, car constituée de 2 vecteurs non colinéaires.
  On en déduit que $\mathcal{F}_{-1}$ est une base de $E_{-1}(g)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\left(E_{-1}(g)\right) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_{-1}) = 2.}$$

- De même, la famille $\mathcal{F}_2 = \big((1,-1,1)\big) = (u_3)$ est :
  × génératrice de $E_2(g)$ d'après la question précédente,
  × libre, car constituée uniquement d'un vecteur non nul.
  On en déduit que $\mathcal{F}_2$ est une base de $E_2(g)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(E_2(g)\big) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_2) = 1.}$$

- Ainsi, on sait déjà :
$$\dim\big(E_{-1}(g)\big) + \dim\big(E_2(g)\big) \;=\; 3 \;=\; \dim(\mathbb{R}^3)$$
  Il reste alors à démontrer : $E_{-1}(g) \cap E_2(g) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- Il s'agit de démontrer une égalité entre ensembles. On procède par double inclusion.
  ($\supset$) Comme $E_{-1}(g)$ et $E_2(g)$ sont des espaces vectoriels :
$$0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}(g) \quad \text{et} \quad 0_{\mathbb{R}^3} \in E_2(g)$$
  Ainsi : $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \;\subset\; E_{-1}(g) \cap E_2(g)$.
  ($\subset$) Soit $v \in E_{-1}(g) \cap E_2(g)$. Alors :
  × d'une part : $v \in E_{-1}(g) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$v \;=\; \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$$
  × d'autre part : $v \in E_2(g) = \mathrm{Vect}\,(u_3)$. Il existe donc $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que :
$$v \;=\; \lambda_3 \cdot u_3$$
  On obtient : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = \lambda_3 \cdot u_3$. Or :
$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = \lambda_3 \cdot u_3 \quad & \iff \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 - \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff \quad \lambda_1 \cdot (1,1,0) + \lambda_2 \cdot (-1,0,1) - \lambda_3 \cdot (1,-1,1) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff \quad \big(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3,\ \lambda_1 + \lambda_3,\ \lambda_2 - \lambda_3\big) = (0,0,0) \\
& \iff \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & 3\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff \quad \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right. \\
& \qquad\quad \textit{(par remontées successives)}
\end{aligned}$$
  On en déduit : $v = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
  On en conclut : $E_{-1}(g) \cap E_2(g) \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- On a ainsi démontré :
  × d'une part : $\dim\big(E_{-1}(g)\big) + \dim\big(E_2(g)\big) = \dim(\mathbb{R}^3)$,
  × d'autre part : $E_{-1}(g) \cap E_2(g) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } E_{-1}(g) \oplus E_2(g) = \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- On pouvait également démontrer la supplémentarité de $E_{-1}(g)$ et $E_2(g)$ dans $\mathbb{R}^3$ en montrant que la concaténation d'une base de $E_{-1}(g)$ et d'une base de $E_2(g)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On aurait alors procédé comme suit.

  1) On démontre que :
  - × la famille (u_1, u_2) est une base de $E_{-1}(g)$,
  - × la famille (u_3) est une base de $E_2(g)$.

  2) On note $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille obtenue en concaténant les familles (u_1, u_2) et (u_3). On démontre que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on démontre que $\mathcal{F}$ est :
  - × libre,
  - × telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

  3) On a ainsi démontré que la concaténation d'une base de $E_{-1}(g)$ et une base de $E_2(g)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que $E_{-1}(g)$ et $E_2(g)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

- Le fait que $E_{-1}(g)$ et $E_2(g)$ soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ signifie que n'importe quel élément de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de $E_{-1}(g)$ et d'un élément de $E_2(g)$. Il est primordial de comprendre que cette notion de supplémentarité correspond à l'existence d'une base adaptée à cette décomposition. En effet :
  - × le caractère générateur de la famille $\mathcal{F}$ correspond à la décomposition de tout élément de $\mathbb{R}^3$ sous forme de somme d'un élément de $E_{-1}(g)$ et d'un élément de $E_2(g)$.
  - × le caractère libre de $\mathcal{F}$ correspond à l'unicité de cette décomposition.

- La démonstration de la supplémentarité présentée plus haut fait, quant à elle, appel aux deux points suivants :
  - × l'égalité entre dimensions :
  $$\dim\big(E_{-1}(g)\big) + \dim\big(E_2(g)\big) \ = \ \dim(\mathbb{R}^3)$$
  - × le caractère direct de la somme $E_{-1}(g) + E_2(g)$. Pour ce dernier point, comme la somme considérée ne comporte que 2 espaces vectoriels, cela revient à démontrer :
  $$E_{-1}(g) \cap E_2(g) \ = \ \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

  Cette seconde caractérisation est plus pratique, surtout dans le cas particulier d'une somme d'exactement 2 espaces vectoriels. Néanmoins la caractérisation à l'aide d'une base adaptée est plus proche de la notion de supplémentarité.

- Les espaces $E_{-1}(g)$ et $E_2(g)$ sont les sous-espaces propres de g respectivement associés à la valeur propre -1 et à la valeur propre 2. On verra dans le cours de réduction que les sous-espaces propres sont toujours en somme directe. Cet argument aurait pu permettre d'alléger la réponse à cette question.

□

6. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Démonstration.

- Démontrons que l'endomorphisme n'est pas cyclique. Il s'agit donc de démontrer :

$$\text{pour tout } w \in \mathbb{R}^3, \text{ la famille } \big(w, g(w), g^2(w)\big) \text{ n'est pas une base}$$

- Soit $w \in \mathbb{R}^3$.
  D'après la question précédente : $E_{-1}(g) \oplus E_2(g) = \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(w_1, w_2) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$ tel que :
  × $w_1 \in E_{-1}(g)$,
  × $w_2 \in E_2(g)$,
  × $w = w_1 + w_2$.
- On cherche alors à savoir si la famille $\mathcal{G} = \big(w, g(w), g^2(w)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  × Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} g(w) & = & g(w_1 + w_2) & \\ & = & g(w_1) + g(w_2) & \textit{(par linéarité de } g\textit{)} \\ & = & -w_1 + 2\,w_2 & \begin{array}{l}\textit{(car } w_1 \in E_{-1}(g) \\ \textit{et } w_2 \in E_2(g)\textit{)}\end{array} \end{array}$$

  De même :

$$\begin{array}{rcll} g^2(w) & = & g\big(g(w)\big) & \\ & = & g(-w_1 + 2\,w_2) & \\ & = & -g(w_1) + 2\,g(w_2) & \textit{(par linéarité de } g\textit{)} \\ & = & w_1 + 4\,w_2 & \begin{array}{l}\textit{(car } w_1 \in E_{-1}(g) \\ \textit{et } w_2 \in E_2(g)\textit{)}\end{array} \end{array}$$

  × On en déduit :

$$\big(w, g(w), g^2(w)\big) \;=\; (w_1 + w_2, -w_1 + 2\,w_2, w_1 + 4\,w_2)$$

  On remarque alors :

$$\begin{array}{rl} & 2 \cdot w + 1 \cdot g(w) + (-1) \cdot g^2(w) \\ = & 2 \cdot (w_1 + w_2) + 1 \cdot (-w_1 + 2\,w_2) + (-1) \cdot (w_1 + 4\,w_2) \\ = & 2\,w_1 + 2\,w_2 - w_1 + 2\,w_2 - w_1 - 4\,w_2 \\ = & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

  La famille $\big(w, g(w), g^2(w)\big)$ est donc liée. Ce n'est donc pas une base.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } g \text{ n'est pas cyclique.}}$$

Commentaire

- Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :
  × « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
  × « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
  × « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »
  × « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
  × « La suite (un) est-elle majorée ? »
  la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

Commentaire

- Pour démontrer le caractère lié de la famille $\big(w, g(w), g^2(w)\big)$, on a exhibé une combinaison linéaire nulle et non triviale des 3 vecteurs de cette famille. Si cette dernière n'apparaît pas au premier coup d'oeil, il est possible d'en trouver une qui convient en résolvant un système. On cherche en effet ici un triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda \cdot w + \mu \cdot g(w) + \nu \cdot g^2(w) \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$$

Or :

$$\begin{array}{cl} & \lambda \cdot w + \mu \cdot g(w) + \nu \cdot g^2(w) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Longleftrightarrow & \lambda \cdot (w_1 + w_2) + \mu \cdot (-w_1 + 2\,w_2) + \nu \cdot (w_1 + 4\,w_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Longleftrightarrow & (\lambda - \mu + \nu) \cdot w_1 + (\lambda + 2\,\mu + 4\,\nu) \cdot w_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & \nu & = & 0 \\ \lambda & + & 2\,\mu & + & 4\,\nu & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{(car } (w_1, w_2) \textit{ est libre. En effet } w_1 \in E_{-1}(g), w_2 \in E_2(g) \textit{ et les espaces vectoriels } E_{-1}(g) \textit{ et } E_2(g) \textit{ sont en somme directe)} \\ \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & \nu & = & 0 \\ & & 3\,\mu & + & 3\,\nu & = & 0 \end{array} \right. \\ \Longleftarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda & - & \mu & = & -\nu \\ & & \mu & = & -\nu \end{array} \right. \\ \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -2\,\nu \\ \mu & = & -\nu \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, en choisissant $\nu = -1$, on obtient que le triplet $(2, 1, -1)$ convient. □

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X + 1)^2 - X^2 = 2X + 1$

7. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que Δ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P_1, P_2) \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^2$.

$$\begin{array}{rcl} \Delta(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(X) & = & (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(X + 1) - (\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(X) \\ & = & \lambda_1\, P_1(X + 1) + \lambda_2\, P_2(X + 1) - \lambda_1\, P_1(X) - \lambda_2\, P_2(X) \\ & = & \lambda_1 \big(P_1(X + 1) - P_1(X)\big) + \lambda_2 \big(P_2(X + 1) - P_2(X)\big) \\ & = & \lambda_1\ \Delta(P_1)(X) + \lambda_2\ \Delta(P_2)(X) \\ & = & \big(\lambda_1 \cdot \Delta(P_1) + \lambda_2 \cdot \Delta(P_2)\big)(X) \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'application } \Delta \text{ est donc linéaire.}}$$

- Démontrons que Δ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors : $\deg(P) \leqslant n$.
  De plus : $\deg\big(P(X+1)\big) = \deg(P) \leqslant n$. Ainsi :

$$\deg\big(\Delta(P)\big) \;=\; \deg\big(P(X+1) - P(X)\big) \;\leqslant\; \max\Big(\deg\big(P(X+1)\big), \deg\big(P(X)\big)\Big) \;\leqslant\; n$$

  On en déduit : $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \Delta \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_n[X].}$$

$$\boxed{\text{L'application } \Delta \text{ est donc un endomorphisme.}}$$

□

8. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

Démonstration.
Par définition de Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta(X^k) &= (X+1)^k - X^k \\
&= \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \times X^p \times 1^{k-p}\right) - X^k \qquad \textit{(par binôme de Newton)} \\
&= \left(\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p}\, X^p + \cancel{\binom{k}{k}\, X^k}\right) - \cancel{X^k} \\
&= \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p}\, X^p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta(X^k) = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p}\, X^p}$$

□

9. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant.
Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que $a_r \neq 0$ et :

$$P(X) \;=\; \sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$$

(notons que $\deg(P) = r \geqslant 1$ *car* P *n'est pas un polynôme constant)*

- Par linéarité de Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta(P)(X) &= \Delta\left(\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{r} a_k\, \Delta(X^k) \\
&= \sum_{k=0}^{r} a_k \left(\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p}\, X^p\right) \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{k=0}^{r} \left(\sum_{p=0}^{k-1} a_k \binom{k}{p}\, X^p\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\Delta(P)(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{r} \left(\sum\limits_{p=0}^{k-1} a_k \dbinom{k}{p} \ X^p \right) \\
& = & \sum\limits_{0 \leqslant p < k \leqslant r} a_k \dbinom{k}{p} \ X^p \\
& = & \sum\limits_{p=0}^{r-1} \left(\sum\limits_{k=p+1}^{r} a_k \dbinom{k}{p} \ X^p \right) \\
& = & \sum\limits_{p=0}^{r-1} \left(\sum\limits_{k=p+1}^{r} a_k \dbinom{k}{p} \right) X^p \\
& = & \sum\limits_{p=0}^{r-1} b_p \, X^p \qquad \textit{(où on note : } \forall p \in [\![0, r-1]\!], \ b_p = \sum\limits_{k=p+1}^{r} \dbinom{k}{p} \ a_k \textit{)}
\end{array}$$

On obtient alors : $\deg\big(\Delta(P)\big) \leqslant r - 1 = \deg(P) - 1$.

- Pour conclure, il reste alors à démontrer : $b_{r-1} \neq 0$. Cela permettra d'en déduire :

$$\deg\big(\Delta(P)\big) \ = \ r - 1 \ = \ \deg(P) - 1$$

(notons qu'on a bien $r - 1 \in \mathbb{N}$ car $r \in \mathbb{N}^*$, et ainsi b_{r-1} est bien défini)
On remarque :

$$b_{r-1} \ = \ \sum_{k=(r-\cancel{1})+\cancel{1}}^{r} \binom{k}{r-1} \ a_k \ = \ \sum_{k=r}^{r} \binom{k}{r-1} \ a_k \ = \ \binom{r}{r-1} \ a_r \ = \ r \, a_r$$

Or : $a_r \neq 0$ et $r \neq 0$. On en conclut : $b_r = r \, a_r \neq 0$

$$\boxed{\text{Finalement : } \deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1.}$$

□

10. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Démonstration.

- Pour démontrer que Δ est un endomorphisme cyclique, il faut trouver un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que la famille $\big(Q, \Delta(Q), \dots, \Delta^n(Q)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On note $r = \deg(P)$.
  Étudions la famille $\mathcal{F} = \big(P, \Delta(P), \dots, \Delta^n(P)\big)$.
  - × D'après la question précédente : $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1 = r - 1$.
    Par une récurrence immédiate :

    $$\forall k \in [\![0, r]\!], \quad \Delta^k(P) \ = \ \deg(P) - k \ = \ r - k$$

    De plus, comme $\deg\big(\Delta^r(P)\big) = 0$, alors le polynôme $\Delta^r(P)$ est un polynôme constant. Ainsi :

    $$\forall k \in [\![r+1, n]\!], \quad \Delta^k(P) \ = \ 0_{\mathbb{R}_n[X]}$$

  - × On en déduit que, si $\deg(P) < n$, alors la famille $\mathcal{F} = \big(P, \Delta(P), \dots, \Delta^n(P)\big)$ contient le vecteur nul $0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Elle est donc liée.
    Pour que la famille $\mathcal{F}$ soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il faut donc choisir un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\deg(Q) = n$.

- On note alors Q le polynôme défini par : $Q(X) = X^n$.
  - × Tout d'abord, la famille $\mathcal{G} = \big(Q, \Delta(Q), \dots, \Delta^n(Q)\big)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré. En effet, d'après ce qui précède :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg\big(\Delta^k(P)\big) \;=\; n - k$$

    Cette famille est donc libre.
  - × La famille $\mathcal{G}$ est alors :
    - libre,
    - telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = n + 1 = \dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$.

    C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

  Il existe donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que la famille $\big(Q, \Delta(Q), \dots, \Delta^n(Q)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \Delta \text{ est alors cyclique.}}$$

□

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose également qu'il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de E telle que :

× d'une part : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $v_k \neq 0_E$,

× d'autre part, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que : $h(v_k) = \lambda_k \, v_k$.

Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

12. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = \big(v, h(v), \dots, h^{n-1}(v)\big)$ dans la base $\mathcal{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

13. On suppose dans cette question que les nombres complexes λ_1, ..., λ_n sont deux à deux distincts.
Démontrer que l'endomorphisme h est cyclique.
Indication : on pourra considérer le vecteur $v = v_1 + \cdots + v_n$.

EXERCICE 2 : Un jeu de société - (librement adapté de `CCINP 2023 - PC`)

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu.

À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;

2) sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

Par exemple, si on considère la case $A = 10$, que $M = 10$ et que l'ordinateur génère successivement les numéros :

$$2,\ 3,\ 2,\ 0,\ 7,\ 1,\ 8, \dots$$

- la variable aléatoire X_1 prend la valeur 2, X_2 la valeur 3, X_3 la valeur 2, X_4 la valeur 0, X_5 la valeur 7, X_6 la valeur 1, X_7 la valeur 8, $\dots$;
- la variable aléatoire S_1 prend la valeur 2, S_2 la valeur 5, S_3 la valeur 7, S_4 la valeur 7, S_5 la valeur 14, S_6 la valeur 15, S_7 la valeur 23, $\dots$;
- la variable T prend la valeur 5.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Que modélisent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

Démonstration.

$\boxed{\text{La variable aléatoire } X_n \text{ modélise le nombre de cases franchies par le pion au } n^{\text{ème}} \text{ tour.}}$

$\boxed{\text{La variable aléatoire } S_n \text{ modélise le nombre de cases franchies par le pion depuis le début du jeu.}}$ □

15. Que représente la variable aléatoire T ?

Démonstration.
La variable aléatoire T prend pour valeur le rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la variable aléatoire S_n atteint ou dépasse pour la première fois la valeur A.
Si S_n n'atteint jamais cette valeur (c'est par exemple le cas si le joueur se déplace à chaque tour de 0 case), la variable aléatoire T prend alors la valeur 0.

Ainsi, la variable aléatoire T prend pour valeur le rang de victoire pour le joueur (et 0 si le joueur ne remporte jamais la partie). □

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

16. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \,]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$, où :

$$\mathscr{P}(k) \quad : \quad \text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur }]-1,1[\text{ et vérifie : } \forall x \in \,]-1,1[, \ f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

- **Initialisation** :
  La fonction f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]-1,1[$ car c'est l'inverse $f = \dfrac{1}{g}$ où $g : x \mapsto 1-x$:
  - × est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]-1,1[$,
  - × `NE S'ANNULE PAS` sur $]-1,1[$.

  Enfin : $\forall x \in \,]-1,1[$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{0!}{(1-x)^{0+1}}$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** :
  Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$.
  Par hypothèse de récurrence : $\forall x \in \,]-1,1[$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.
  La fonction $f^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ car c'est l'inverse $f = \dfrac{k!}{g_k}$ où $g_k : x \mapsto (1-x)^{k+1}$:
  - × est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$,
  - × `NE S'ANNULE PAS` sur $]-1,1[$.

  Ainsi, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $]-1,1[$. De plus, pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\begin{array}{rcl} f^{(k+1)}(x) & = & \left(f^{(k)}\right)'(x) \\ & = & k! \left(\cancel{-}(k+1)\right) (1-x)^{-(k+1)-1} \, (-\cancel{1}) \\ & = & \dfrac{(k+1)!}{(1-x)^{k+1}} \end{array}$$

  D'où $\mathscr{P}(k+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$. □

17. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $h_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $h_n : x \mapsto x^n$.
En admettant qu'on peut dériver successivement terme à terme la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} h_n$, démontrer :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord (formule de la somme d'une suite géométrique) que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x) \qquad (*)$$

- Or, en dérivant p fois, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{+\infty} h_n\right)^{(p)}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} h_n{}^{(p)}(x) && \textit{(comme autorisé par l'énoncé)} \\
&= \cancel{\sum_{n=0}^{p-1} h_n{}^{(p)}}(x) + \sum_{n=p}^{+\infty} h_n{}^{(p)}(x) && \textit{(car pour tout } n \in [\![0,p-1]\!],\ h_n \textit{ est une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à } p\textit{)} \\
&= \sum_{n=p}^{+\infty} n\,(n-1)\,\dots\,\big(n-(p-1)\big)\, x^{n-p} \\
&= \frac{1}{x^p} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!}\, x^n
\end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la propriété $(*)$:

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!}\, x^n = x^p\, f^{(p)}(x) = x^p\, \frac{p!}{(1-x)^p}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in]-1,1[, \ \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\, x^n = \frac{x^p}{(1-x)^p}.}$$

Commentaire

À ce stade de l'année, l'étude des « séries entières » n'a pas encore été réalisé. Cela a amené à modifier en partie l'énoncé. On verra en particulier que la dérivation sous le symbole de sommation est autorisé sous des hypothèses relativement faibles lorsque l'on se situe sur l'intervalle ouvert de convergence d'une série entière.

□

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, si $M = 2$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $X_k \sim \mathcal{U}([\![0,1]\!])$.

Autrement dit :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(\{X_k = 0\}\big) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\big(\{X_k = 1\}\big)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \sim \mathcal{B}\left(\tfrac{1}{2}\right).}$$

- L'expérience consiste en une succession de n épreuves de Bernoulli (génération aléatoire d'un 0 ou d'un 1) indépedantes et de même paramètre de succès $\frac{1}{2}$ (en considérant qu'il y a succès si le nombre généré vaut 1).

  La variable aléatoire S_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience (puisque S_n prend pour valeur le nombre de cases dont le pion est avancé depuis le début de partie).

$$\boxed{\text{On en déduit : } S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \tfrac{1}{2}\right).}$$

Commentaire

On verra dans le chapitre « Couple de variables aléatoires », qu'il y a stabilité par somme des lois binomiales. Plus précisément, pour tout $p \in \,]0, 1[$, si :
- × $X \sim \mathcal{B}(m, p)$,
- × $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$,
- × $X \perp\!\!\!\perp Y$,

alors $X + Y \ \sim\ \mathcal{B}(m + n, p)$.

□

19. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

Démonstration.
Démontrons : $T(\Omega) = \{0\} \,\cup\, [\![A, +\infty[\![$. On procède par double inclusion.

($\subset$) Démontrons tout d'abord : $T(\Omega) \ \subset\ [\![A, +\infty[\![$. Il suffit de remarquer que :
- × T prend des valeurs entières puisque c'est un rang (le rang où la valeur A est atteinte ou dépassée pour la première fois).
- × T peut prendre la valeur 0 par définition.
- × lorsque T ne prend pas la valeur 0, T prend au minimum la valeur A. En effet, il faut au moins A déplacements de 1 case pour que le pion se déplace jusqu'en case A.

$$\boxed{T(\Omega) \ \subset\ \{0\} \,\cup\, [\![A, +\infty[\![}$$

($\supset$) Démontrons maintenant : $T(\Omega) \ \supset\ \{0\} \,\cup\, [\![A, +\infty[\![$.
Soit $k \in \{0\} \,\cup\, [\![A, +\infty[\![$. Deux cas se présentent.
- × Si $k = 0$, en notant :

$$\omega = (\ 0, 0, 0, \dots\ )$$

  alors $T(\omega) = 0$. En effet, si à chaque tour le pion se déplace de 0 case (c'est-à-dire ne se déplace pas), le pion n'atteindra jamais la case A et T prendra ainsi la valeur 0.
- × Si $k \in [\![A, +\infty[\![$ alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $k = A + j$. Notons :

$$\omega \ = \ (\ \underbrace{0, \dots, 0}_{\substack{\text{lors des } j \text{ premiers tours, c'est} \\ \text{le nombre 0 qui est généré}}}, 1, 1, 1, \dots\ )$$

  alors $T(\omega) = j + A = k$.

En effet, avec un tel tirage ω, pendant j tours, le pion n'avance pas puis il avance de 1 à chaque tour suivant. Le pion mettra donc exactement $j + A = k$ tours pour atteindre la case A.
Ainsi : $\forall k \in [\![A, +\infty[\![$, $k \in T(\Omega)$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } T(\Omega) \supset \{0\} \cup [\![A, +\infty[\![.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } T(\Omega) = \{0\} \cup [\![A, +\infty[\![.}$$

Commentaire

- Dans la question, le résultat n'est pas donné. Fournir le bon résultat témoigne alors d'un niveau de compréhension tout à fait satisfaisant et permet certainement d'obtenir la quasi-totalité des points. C'est d'autant plus vrai ici que le résultat est un peu subtil en ce sens qu'il ne faut pas oublier que T peut prendre la valeur 0.
- Le niveau de détail présenté dans ce corrigé correspondrait plus à une question du type :

  « Montrer : $T(\Omega) = \{0\} \cup [\![A, +\infty[\![$ »

  Lorsque le résultat est fourni, on s'attend forcément à une explication plus détaillée.

□

20. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $\{T = k\}$ en fonction des évènements $\{S_{k-1} = A - 1\}$ et $\{X_k = 1\}$. En déduire :

$$\mathbb{P}\big(\{T = k\}\big) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{cl}
 & \text{L'événement } \{T = k\} \text{ est réalisé} \\
\Leftrightarrow & \text{Le pion atteint (ou dépasse) pour la } 1^{\text{ère}} \text{ fois la case } A \text{ après } k \text{ tours} \\
\Leftrightarrow & \text{Le pion s'est déplacé d'exactement } A \text{ cases en } k \text{ tours} \\
\Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{Le pion s'est déplacé de } A-1 \text{ cases après } k-1 \text{ tours} \\ \texttt{ET} & \text{le pion s'est déplacé de 1 case lors du } k^{\text{ème}} \text{ tour} \end{array} \\
\Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{L'événement } \{S_{k-1} = A-1\} \text{ est réalisé} \\ \texttt{ET} & \text{l'événement } \{X_k = 1\} \text{ est réalisé} \end{array} \\
\Leftrightarrow & \text{L'événement } \{S_{k-1} = A-1\} \cap \{X_k = 1\} \text{ est réalisé}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \geqslant A,\ \{T = k\} = \{S_{k-1} = A - 1\} \cap \{X_k = 1\}.}$$

- D'après le point précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\ \{T = k\}\ \big) &= \mathbb{P}\left(\{S_{k-1} = A - 1\} \cap \{X_k = 1\}\right) \\
&= \mathbb{P}\big(\{S_{k-1} = A - 1\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X_k = 1\}\big)
\end{aligned}$$

En effet, comme les variables aléatoires X_1, ..., X_k sont indépendantes, le lemme des coalitions aussure que les variables aléatoires $S_{k-1} = X_1 + \ldots + X_{k-1}$ et X_k sont elles aussi indépendantes.

Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\ \{T=k\}\ \big) &= \mathbb{P}\big(\{S_{k-1}=A-1\}\big)\times\mathbb{P}\big(\{X_k=1\}\big) \\
&= \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)-(A-1)}\times\mathbb{P}\big(\{X_k=1\}\big) \quad \textit{(car } S_{k-1}\sim\mathcal{B}\left(k-1,\tfrac{1}{2}\right)\textit{)} \\
&= \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{2} \quad \textit{(car } X_k\sim\mathcal{B}\left(\tfrac{1}{2}\right)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k\geqslant A,\ \mathbb{P}\big(\ \{T=k\}\ \big)=\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}.}$$

Commentaire

- Cette question illustre la méthodologie classique de décomposition d'événements. Il est rappelé que cette étape est primordiale et que c'est elle qui permet de mettre en place le raisonnement. L'argument fondamental dans la question est l'indépendance des variables aléatoires S_{k-1} et X_k. Cet argument apparaît naturellement dans la rédaction car on a écrit l'événement dont on cherche à déterminer la probabilité sous la forme d'une intersection. Sans cette décomposition, l'argument d'indépendance ne sera pas cité et les points ne seront donc pas accordés.
- Ici aussi, on a détaillé la rédaction. Donner directement la décomposition d'événement attendue permettrait certainement d'obtenir la totalité des points (puisque cette décomposition n'est pas présente dans l'énoncé). Cette rédaction a l'avantage de fournir des éléments sur lesquels s'appuyer. Son utilisation est vivement conseillée pour les candidats qui ne sont pas encore à l'aise sur le chapitre des variables aléatoires.
- Il était aussi possible de raisonner à l'aide de la formule des probabilités totales (une telle rédaction masque un peu l'étape de décomposition d'événements).
  Comme $S_{k-1}(\Omega)=[\![0,k-1]\!]$, la famille $\Big(\{S_{k-1}=0\},\dots,\{S_{k-1}=k-1\}\Big)$ est un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\ \{T=k\}\ \big) &= \sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{P}\big(\ \{S_{k-1}=j\}\cap\{T=k\}\ \big) \\
&= \mathbb{P}\big(\ \{S_{k-1}=A-1\}\cap\{T=k\}\ \big) \quad \textit{(car si le pion atteint pour la } 1^{\text{ère}} \textit{ fois la case } A \textit{ après } k \textit{ tours, il a atteint la case } A-1 \textit{ après } k-1 \textit{ tours)} \\
&= \mathbb{P}\big(\ \{S_{k-1}=A-1\}\cap\{X_k=1\}\ \big)
\end{aligned}$$

  Cette dernière égalité nécessite de démontrer l'égalité :

$$\{S_{k-1}=A-1\}\cap\{T=k\}=\{S_{k-1}=A-1\}\cap\{X_k=1\}$$

$\square$

21. Calculer $\mathbb{P}\big(\{T=0\}\big)$.

Démonstration.

- Comme $T(\Omega) = \{0\} \,\cup\, [\![A,+\infty[\![$, la famille $\Big(\{T=k\}\Big)_{k\in\{0\}\,\cup\,[\![A,+\infty[\![}$ est un système complet d'événements. En particulier :

$$\mathbb{P}\big(\{T=0\}\big) + \sum_{k=A}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T=k\}\big) \;=\; 1$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{T=0\}\big) &= 1 - \sum_{k=A}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T=k\}\big) \\
&= 1 - \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 - \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 - \frac{1}{2} \, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^A} && \textit{(en utilisant la question } \textbf{\textit{17}} \textit{ avec } p = A-1 \in \mathbb{N} \textit{ et } n = k-1 \in \mathbb{N}\textit{)} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^A} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{A-1} \; 2^A \\
&= 1 - \frac{1}{2} \times 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{T=0\}\big) = 0}$$

□

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant A} \mathbb{P}\big(\{T=k\}\big) x^k$ sur son intervalle de convergence.

22. `(5/2 UNIQUEMENT)`
Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant A} \mathbb{P}\big(\{T=k\}\big) x^k$ et démontrer :

$$\forall x \in \,]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A$$

23. `(5/2 UNIQUEMENT)`
En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $\mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k\}\big)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}$$

24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En considérant le système complet d'évènements $\Big(\{X_{n+1} = 0\}, \ldots, \{X_{n+1} = M-1\}\Big)$, démontrer :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad \mathbb{P}\big(\{S_{n+1} \leqslant k\}\big) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k-\ell\}\big)$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$.

- Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\{S_{n+1} \leqslant k\} \big) \\
= & \sum_{j=0}^{M-1} \mathbb{P}\big(\{S_{n+1} \leqslant k\} \cap \{X_{n+1} = j\} \big) \\
= & \sum_{j=0}^{M-1} \mathbb{P}\big(\{S_n + X_{n+1} \leqslant k\} \cap \{X_{n+1} = j\} \big) \\
= & \sum_{j=0}^{M-1} \mathbb{P}\big(\{S_n + j \leqslant k\} \cap \{X_{n+1} = j\} \big) \\
= & \sum_{j=0}^{M-1} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k-j\} \cap \{X_{n+1} = j\} \big) \\
= & \cancel{\sum_{\substack{j=0 \\ k-j<0}}^{M-1} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k-j\} \cap \{X_{n+1} = j\} \big)} + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \geqslant 0}}^{M-1} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k-j\} \cap \{X_{n+1} = j\} \big) \\
= & \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k-j\} \cap \{X_{n+1} = j\} \big)
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} j \in [\![0, M-1]\!] \\ k-j \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 \leqslant j \leqslant M-1 \\ j \leqslant k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 0 \leqslant j \leqslant k \right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\ \{S_{n+1} \leqslant k\}\ \big) &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\big(\ \{S_n \leqslant k-j\} \cap \{X_{n+1} = j\}\ \big) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\big(\ \{S_n \leqslant k-j\}\ \big) \times \mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = j\}\ \big) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\big(\ \{S_n \leqslant k-j\}\ \big) \times \frac{1}{M}
\end{aligned}$$

(car les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions)

$$\boxed{\forall k \in [\![0, A-1]\!],\ \mathbb{P}\big(\{S_{n+1} \leqslant k\}\big) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k-\ell\}\big)}$$

Commentaire

- Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET}\ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a, b, c, d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET}\ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a, c) \leqslant i \leqslant \min(b, d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

- On peut illustrer ce propos par une présentation légèrement différente de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} j \in [\![0, M-1]\!] \\ k - j \geqslant 0 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant j \leqslant M-1 \\ -\infty < j \leqslant k \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\ \max(0, -\infty) \leqslant j \leqslant \min(M-1, k)\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\ 0 \leqslant j \leqslant k\right.
\end{aligned}$$

Il est enfin à noter : $k \leqslant A-1 \leqslant M-1$ (par hypothèse de la partie ***III***) ce qui démontre la dernière ligne.

□

25. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k\}\big) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$, où :

$$\mathscr{P}(n) \quad : \quad \forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k\}\big) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$

- **Initialisation** :
  Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$.
  - D'une part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{S_1 \leqslant k\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{X_1 \leqslant k\}\big) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k} \{X_1 = j\}\right) && \textit{(car la variable aléatoire } X_1 \textit{ est à valeurs entières)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{X_1 = j\}\big) && \textit{(car les événements considérés sont deux à deux incompatibles)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{M} && \textit{(car } X_1 \sim \mathcal{U}([\![0, M-1]\!])\textit{)} \\
&= (k+1)\,\frac{1}{M}
\end{aligned}$$

  - D'autre part :

$$\frac{1}{M^1}\binom{1+k}{1} = \frac{1}{M^1}\,(k+1)$$

  D'où $\mathscr{P}(1)$.

- **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{S_{n+1} \leqslant k\}\big) &= \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k-\ell\}\big) \\
&= \frac{1}{M}\Big(\mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k\}\big) + \ldots + \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant 0\}\big)\Big) \\
&= \frac{1}{M}\Big(\mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant 0\}\big) + \ldots + \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k\}\big)\Big) \\
&= \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant j\}\big) \\
&= \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{M^n}\binom{n+j}{n} && \textit{(en appliquant l'hypothèse de récurrence en } j \textit{ avec } j \geqslant 0 \textit{ et } j \leqslant k \leqslant A-1\textit{)} \\
&= \frac{1}{M^{n+1}}\sum_{j=0}^{k}\binom{n+j}{n} \\
&= \frac{1}{M^{n+1}}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n+(k-\ell)}{n} && \textit{(en sommant dans l'autre sens)} \\
&= \frac{1}{M^{n+1}}\binom{n+1+k}{n+1} && \textit{(par la formule fournie dans l'énoncé)}
\end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n).}$$ □

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

26. **Un résultat préliminaire**

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Supposons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\big(\{Z > n\}\big)$ converge.

a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}\big(\{Z = j\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z > j-1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big)$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \{Z > j-1\} & = & \{Z \geqslant j\} \qquad \textit{(car la variable } Z \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & \{Z = j\} \cup \{Z > j\} \end{array}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{Z > j-1\}) & = & \mathbb{P}(\{Z > j\} \ \cup \ \{Z = j\}) \\ & = & \mathbb{P}(\{Z > j\}) + \mathbb{P}(\{Z = j\}) \qquad \textit{(car } \{Z > j\} \textit{ et } \{Z = j\} \textit{ sont incompatibles)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En réordonnant, on obtient : } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{Z = j\}) = \mathbb{P}(\{Z > j-1\}) - \mathbb{P}(\{Z > j\}).}$$

Commentaire

- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.
  Il faut prendre le réflexe de raisonner sur les événements avant d'appliquer la fonction $\mathbb{P}$.
- La formule énonce une différence entre des probabilités d'événements. Après réordonnement, on obtient une somme. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une union. Si on ne réordonne pas les différents membres de l'égalité, on peut aussi penser à une décomposition à l'aide d'une différence ensembliste. Pour cela on remarque que, comme Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$\{Z > j-1\} \setminus \{Z > j\} = \{Z = j\}$$

Ainsi : $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{Z = j\}) & = & \mathbb{P}(\{Z > j-1\} \ \setminus \ \{Z > j\}) \\ & = & \mathbb{P}(\{Z > j-1\}) \ - \ \mathbb{P}(\{Z > j-1\} \ \cap \ \{Z > j\}) \\ & = & \mathbb{P}(\{Z > j-1\}) \ - \ \mathbb{P}(\{Z > j\}) \qquad \textit{(car } \{Z > j\} \subset \{Z > j-1\}\textit{)} \end{array}$$

$\square$

b) Soit p un entier naturel non nul. Démontrer :

$$\sum_{j=1}^{p} j\, \mathbb{P}\big(\{Z = j\}\big) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big) - p\, \mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big)$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$j\ \mathbb{P}(\{Z = j\}) = j\ \mathbb{P}(\{Z > j-1\}) - j\ \mathbb{P}(\{Z > j\})$$

- Ainsi, on obtient en sommant :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z=j\}) \\
=\ & \sum_{j=1}^{p} \Big(j\ \mathbb{P}(\{Z>j-1\}) - j\ \mathbb{P}(\{Z>j\})\Big) \\
=\ & \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z>j-1\}) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z>j\}) && \textit{(par linéarité)} \\
=\ & \sum_{j=0}^{p-1} (j+1)\ \mathbb{P}(\{Z>j\}) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z>j\}) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
=\ & \sum_{j=0}^{p-1} j\ \mathbb{P}(\{Z>j\}) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z>j\}) && \textit{(par linéarité)} \\
=\ & 0 \times \mathbb{P}(\{Z>j\}) + \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}(\{Z>j\})} + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) - \left(\cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}(\{Z>j\}} + p\ \mathbb{P}(\{Z>p\})\right) \\
=\ & \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) - p\ \mathbb{P}(\{Z>p\})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z=j\}) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) - p\ \mathbb{P}(\{Z>p\})}$$

Commentaire

La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$j\ \mathbb{P}(\{Z=j\}) = (j-1)\ \mathbb{P}(\{Z>j-1\}) - j\ \mathbb{P}(\{Z>j\}) + \mathbb{P}(\{Z>j-1\})$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z=j\}) &= \sum_{j=1}^{p} \Big((j-1)\ \mathbb{P}(\{Z>j-1\}) - j\ \mathbb{P}(\{Z>j\})\Big) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(\{Z>j-1\}) \\
&= \cancel{(1-1)\ \mathbb{P}(\{Z>1-1\})} - p\ \mathbb{P}(\{Z>p\}) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(\{Z>j-1\}) \\
&= -p\ \mathbb{P}(\{Z>p\}) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) \qquad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

□

c) Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}\big(\{Z>j\}\big)$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{p+1} - v_p = \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}\big(\{Z>j\}\big) - \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}\big(\{Z>j\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z>p\}\big) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_p) \text{ est croissante.}}$$

□

d) Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}\big(\{Z=j\}\big)$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Z>j\}\big)$.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***26.b)*** :

$$\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z=j\}) \ = \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) - p\ \mathbb{P}(\{Z>p\}) \ \leqslant\ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) = v_p$$

- La série $\sum \mathbb{P}(\{Z>n\})$ est convergente (par hypothèse de l'énoncé).
On peut donc écrire, par relation de Chasles :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z>j\}) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) + \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z>j\})$$

En réordonnant, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z>j\}) - \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z>j\}) \ \leqslant\ \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z>j\})$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z=j\}) \ \leqslant\ \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z>j\})}$$

□

e) En déduire que Z admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Z>n\}\big)$$

Démonstration.

- La variable aléatoire Z est d'espérance finie si la famille $\Big(n\ \mathbb{P}\big(\{Z=n\}\big)\Big)$ est sommable.
Autrement dit, il s'agit de démontrer que la série $\sum n\ \mathbb{P}\big(\{Z=n\}\big)$ est absolument convergente. Or, la suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}\big(\{Z=j\}\big)\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est :
  × croissante (en tant que suite des sommes partielles d'une série à termes positifs),
  × majorée (par $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z>j\})$) d'après la question précédente.

  Elle est donc convergente.

  $\boxed{\text{Ainsi, la variable } Z \text{ est d'espérance finie.}}$

- Par ailleurs, d'après la question ***26.b)*** :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z=j\}) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z>j\}) - p\ \mathbb{P}(\{Z>p\}) \qquad (*)$$

Pour démontrer l'égalité souhaitée, il reste donc à démontrer : $\lim\limits_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}(\{Z>p\}) = 0$.

- Or, comme Z est à valeurs entières, alors :

$$\{Z>p\} = \bigcup_{k=p+1}^{+\infty} \{Z=k\}$$

et : $p\,\mathbb{P}\big(\{Z>p\}\big) \ = \ p\,\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=p+1}^{+\infty} \{Z=k\}\right) \ = \ p \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Z=k\}\big) \ = \ \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} p\,\mathbb{P}\big(\{Z=k\}\big)$.

En remarquant que $k \geqslant p+1$ dès que $p \leqslant k$, on obtient :

$$\begin{aligned} p\,\mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big) &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} p\,\mathbb{P}\big(\{Z = k\}\big) \\ &\leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big(\{Z = k\}\big) \end{aligned}$$

La série $\sum n\mathbb{P}\big(\{Z = n\}\big)$ est convergente par hypothèse (Z est d'espérance finie) ce qui justifie l'utilisation de son reste d'ordre p en dernière ligne.

Finalement, on a démontré :

$$0 \leqslant p\,\mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big) \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big(\{Z = k\}\big)$$

Or :

× $0 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

× $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}\big(\{Z = k\}\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en tant que reste d'ordre p d'une série convergente.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $p\,\mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Enfin, en réordonnant $(*)$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big) &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big) \\ &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}\big(\{Z = j\}\big) - \lim_{p\to+\infty} \big(p\,\mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}\big(\{Z = j\}\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient bien : } \mathbb{E}(Z) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}\big(\{Z = j\}\big) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big).}$$

□

27. Que peut-on dire des évènements $\{T > n\}$ et $\{S_n < A\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord :

L'événement $\{S_n < A\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Au bout de n tours, le pion n'a toujours pas atteint la case A

$\Leftrightarrow$ La victoire, si elle a lieu, est atteinte après strictement plus de n tours

$\Leftrightarrow$ La victoire est atteinte après strictement plus de n tours
`OU` le joueur ne gagne jamais

$\Leftrightarrow$ L'événement $\{T > n\}$ est réalisé tours
`OU` l'événement $\{T = 0\}$ est réalisé

$$\boxed{\{S_n < A\} = \{T > n\} \cup \{T = 0\}}$$

- En particulier :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{S_n < A\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) + \mathbb{P}\big(\{T = 0\}\big) & \textit{(car les événements } \{T > n\} \textit{ et } \{T=0\} \textit{ sont incompatibles)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) & \end{array}$$

(les événements $\{S_n < A\}$ et $\{T > n\}$ sont donc presque sûrement égaux)

- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{S_n < A\}\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant A-1\}\big) & \textit{(car la variable } S_n \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & \dfrac{1}{M^n}\dbinom{n+(A-1)}{n} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{25}} \textit{ appliquée en } k = A \in [\![0, A-1]\!] \textit{ et } n \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{M^n}\dbinom{n+(A-1)}{\big(n+(A-1)\big)-n} & \\ & = & \dfrac{1}{M^n}\dbinom{n+A-1}{A-1} & \end{array}$$

Il convient de remarquer que la formule ci-dessus est aussi valable si $n = 0$ puisqu'alors :

$$\mathbb{P}\big(\{S_0 \leqslant A-1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{0 \leqslant A-1\}\big) = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{M^0}\binom{0+(A-1)}{0} = 1$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) = \binom{n+A-1}{A-1}\left(\frac{1}{M}\right)^n}$$

- La variable aléatoire T est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour démontrer qu'elle est d'espérance finie et déterminer $\mathbb{E}(T)$, on utilise le résultat de la question ***26***.
Il s'agit alors de démontrer que la série $\sum \mathbb{P}\big(\{Z > n\}\big)$ est convergente.
Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{n=0}^{N} \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) & = & \sum\limits_{n=0}^{N} \dbinom{n+A-1}{A-1}\left(\dfrac{1}{M}\right)^n \\ & = & \sum\limits_{n=A-1}^{N+A-1} \dbinom{n}{A-1}\left(\dfrac{1}{M}\right)^{n-A+1} \\ & = & \left(\dfrac{1}{M}\right)^{-A+1} \sum\limits_{n=A-1}^{N+A-1} \dbinom{n}{A-1}\left(\dfrac{1}{M}\right)^{n} \\ & = & M^{A-1} \sum\limits_{n=A-1}^{N+A-1} \dbinom{n}{A-1}\left(\dfrac{1}{M}\right)^{n} \end{array}$$

En appliquant le résultat de la question ***17.*** en $p = A-1$ et $x = \frac{1}{M} \in\ ]-1,1[$, on obtient :

$$\sum_{n=A-1}^{N+A-1} \binom{n}{A-1}\left(\frac{1}{M}\right)^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\left(\frac{1}{M}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{1}{M}\right)^A}$$

Ainsi, la série $\sum \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big)$ est convergente et de somme :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) &= M^{A-1}\,\frac{\left(\frac{1}{M}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{1}{M}\right)^{A}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{M-1}{M}\right)^{A}} \\ &= \frac{M^A}{(M-1)^A}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } T \text{ est d'espérance finie et } \mathbb{E}(T) = \frac{M^A}{(M-1)^A}.}$$

$\square$

EXERCICE 3 : Une suite de fonctions (d'après `oraux CCINP 2022 - MP`)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,x^2} \cos\left(\sqrt{n}\, x\right)$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

Démonstration.
Soit $x_0 \in [0, +\infty[$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f_n(0) &= \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,0^2} \cos\left(\sqrt{n} \times 0\right) \\ &= \frac{n+2}{n+1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

- Si $x_0 > 0$:

$$\begin{aligned} |\, f_n(x_0)\,| &= \left| \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,{x_0}^2} \cos\left(\sqrt{n}\, x_0\right) \right| \\ &= \left| \frac{n+2}{n+1} \right| \times \left| \mathrm{e}^{-n\,{x_0}^2} \right| \times |\cos\left(\sqrt{n}\, x_0\right)| \\ &\leqslant \left| \frac{n+2}{n+1} \right| \times \left| \mathrm{e}^{-n\,{x_0}^2} \right| \qquad \textit{(car } |\cos\left(\sqrt{n}\, x_0\right)| \leqslant 1\textit{)} \\ &= \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,{x_0}^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$0 \leqslant |\, f_n(x_0)\,| \leqslant \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,{x_0}^2}$$

Or :
× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
× $\dfrac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,{x_0}^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n}\, \mathrm{e}^{-n\,{x_0}^2} = \mathrm{e}^{-n\,{x_0}^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} |\, f_n(x_0)\,| = 0$.

$$\boxed{\forall x_0 > 0,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit que la suite } (f_n) \text{ converge simplement sur } [0, +\infty[\text{ vers la fonction :} \\ f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{si } x = 0 \\ 0 & \textit{si } x > 0 \end{cases} \end{array}}$$

Commentaire

Lors de la recherche de la limite simple d'une suite de fonction, on est amené à déterminer la limite d'une suite numérique. Il faut donc être capable de déterminer ce type de limites.
Pour ce faire, il existe essentiellement deux outils :

- théorème des croissances comparées. Il établit que pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$:

$$\boxed{(\ln(n))^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n}$$

En particulier, on en déduit : $\boxed{\forall a > 0, \forall x_0 \in \,]0,1[,\ n^a\ x_0^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

(le théorème des croissances comparées ne dit pas plus que cela et il faut cesser de penser qu'il s'agit d'une incantation magique permettant d'expliquer tout calcul de limite)

- calcul d'équivalents (rappel ci-dessous).

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ au voisinage de 0 alors elle admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ qui s'écrit :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)} \text{ ou } \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)}$$

On en déduit les développements limités suivants.

- $\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)}$ et $\boxed{\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$
- $\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\ \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{2p+2}\right)}$ et $\boxed{\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$
- $\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\ \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{2p+3}\right)}$ et $\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$
- $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ x^n + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)}$ et $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$
- $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)}$ et $\boxed{\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\ x^n + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)}$

Il faut savoir exploiter ces résultats pour démontrer (par exemple) que pour tout $x_0 \neq 0$:

- $\boxed{n\ \left(\mathrm{e}^{\frac{x_0}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_0}$ $\boxed{n^2\ \left(\cos\left(\frac{x_0}{n}\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x_0}{2}}$
- $\boxed{n\ \sin\left(\frac{x_0}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_0}$ $\boxed{\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\ x_0\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}\ x_0}$

□

2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

Démonstration.
Démontrons que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
On procède par l'absurde.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

- Comme :
  - × pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ par produit de fonctions continues sur cet intervalle,
  - × la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$,

  alors la fonction limite f est continue sur $[0, +\infty$. Or f n'est pas continue en 0 puisque :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur } [0, +\infty[.}$$

Commentaire

- Tout d'abord, notons qu'à une question du type :

  « La propriété [...] est-elle vérifiée ? »

  la réponse attendue est généralement : `NON`. Cela ne résout évidemment pas la question. Il convient en effet d'expliquer pourquoi il n'y a pas convergence uniforme. Il est à noter qu'il est pertinent de réfléchir à la construction d'un sujet. Si on démontre en question ***2*** qu'il y a convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, alors il y aura convergence uniforme sur tout intervalle inclus dans celui-ci. Cela retirerait la pertinence de la question ***3***. Dans les exercices sur les suites / séries de fonctions, on démontre généralement que la convergence uniforme a lieu sur des intervalles adaptés (par exemple sur tout segment de I) mais que la convergence uniforme n'a pas lieu sur l'intervalle I en entier. Profitons en pour rappeler que la convergence sur « tout intervalle adapté » est suffisant pour transmettre les propriétés de régularité (caractère $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, ...).
- Pour démontrer qu'une suite (ou une série) de fonctions ne converge pas uniformément, on procède généralement par l'absurde. Cela a un avantage : si on suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction f, alors on sait qu'à partir d'un certain rang les fonctions de suite $(f_n - f)$ sont bornées et on est alors assuré de l'existence de la quantité (que l'on peut donc considérer) :

$$\|f_n - f\|_{\infty, I}$$

  Il y a alors 2 grandes manière de procéder :
  - × soit la contradiction ait apportée par le fait que f ne vérifie pas une propriété qu'elle devrait posséder (car transmise par convergence uniforme).
  - × soit la contradiction provient de la définition même de convergence uniforme.
- Dans cette question, on met en avant la première manière de procéder.
  Cependant, la deuxième méthode sera utilisée en question ***4*** (*cf* plus loin). □

3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad |f_n(x) - f(x)| \ = \ \left| \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,x^2} \ \cos(\sqrt{n}\, x) - \cancel{0} \right| \qquad \text{(d'après la question précédente)}$$

$$\leqslant \ \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,x^2} \qquad \text{(comme dans la question 1)}$$

- Remarquons alors, que pour tout $x \in \ [a, +\infty[$:

$$
\begin{array}{llcll}
 & x & \geqslant & a & \\
\text{donc} & x^2 & \geqslant & a^2 & \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est croissante sur } [0, +\infty[\textit{)} \\
\text{donc} & -x^2 & \leqslant & -a^2 & \\
\text{donc} & -x^2\, n & \leqslant & -a^2\, n & \textit{(car } n \geqslant 0\textit{)} \\
\text{donc} & \mathrm{e}^{-x^2\, n} & \leqslant & \mathrm{e}^{-a^2\, n} & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\text{donc} & \dfrac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-x^2\, n} & \leqslant & \dfrac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-a^2\, n} & \textit{(car } \frac{n+2}{n+1} \geqslant 0\textit{)}
\end{array}
$$

- Reprenons l'étude initiale :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \ |f_n(x) - f(x)| \ \leqslant \ \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,x^2} \ \leqslant \ \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,a^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } f_n - f \text{ est bornée et :} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \ \leqslant \ \|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} \ \leqslant \ \dfrac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-a^2\, n}.\end{array}}$$

- Or :
  × $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
  × $\dfrac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-a^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n}{n}\ \mathrm{e}^{-a^2\, n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $a > 0$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ converge uniformément sur tout intervalle du type } [a, +\infty[\text{ où } a > 0.}$$

Commentaire

- On utilise ici la caractérisation séquentielle de la convergence uniforme, à savoir :

$$\boxed{\begin{array}{c}(f_n) \text{ converge uniformément} \\ \text{sur } I \text{ vers } f\end{array} \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une suite } (\delta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de limite nulle,} \\ \text{telle que, il existe un rang } n_0 \in \mathbb{N} : \\ \forall n \geqslant n_0, \ \forall x \in I, \ \big|f_n(x) - f(x)\big| \ \leqslant \ \delta_n \end{array} \right.}$$

Commentaire

- Malgré l'existence d'un tel théorème, il est vivement conseillé d'introduire dans la rédaction l'étape :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \ \leqslant\ \|f_n - f\|_{\infty,[a,+\infty[} \ \leqslant\ \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-a^2 n}$$
C'est cette étape qui démontre la compréhension. La retirer risque de vous faire conclure :
$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$
Autrement dit, on démontre que pour tout x : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ ce qui n'est autre que la propriété de convergence simple (et pas uniforme !).
- Cet exercice illustre la manière classique de procéder pour démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonction. Plus précisément, on procède comme suit.

1) Convergence simple
Cette étape a été décrite dans la question précédente. Il s'agit de trouver la limite simple f de la suite (f_n).

2) Convergence uniforme

(i) on commence par fixer un enter n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :
- × $\big|f_n(x) - f(x)\big| \ \leqslant\ \delta_n$
- × δ_n **ne fait pas apparaître** x,
- × $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

(iii) on en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée et :
$$\|f_n - f\|_{\infty,I} \ \leqslant\ \delta_n$$

Insistons sur le fait que la quantité δ_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\Big\{\big|f_n(x) - f(x)\big| \mid x \in I\Big\}$. Il est d'ailleurs préférable d'utiliser les méthodes de majoration usuelles pour déterminer δ_n et réserver une éventuelle étude la fonction $f_n - f$ (permettant de déterminer la valeur exacte de $\|f_n - f\|_{\infty,I}$) au cas où ces techniques ne sont pas assez fines pour aboutir.

- Notons enfin que la majoration : $\dfrac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\,x^2} \ \leqslant\ \dfrac{n+2}{n+1}$ répond à la contrainte d'obtention une quantité δ_n qui ne fait pas apparaître x. Cependant, cette majoration est trop brutale et la quantité obtenue n'admet pas de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Il convient donc, lors de l'étape de majoration, de bien veiller à conserver la partie qui va permettre d'obtenir cette limite nulle.
- Grâce au point précédent, on comprend l'intérêt de travailler sur un intervalle du type $[a, +\infty]$. Cela permet d'obtenir la majoration :
$$\mathrm{e}^{-n\,x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-n\,a^2} \qquad \text{en lieu et place de} \qquad \mathrm{e}^{-n\,x^2} \leqslant 1$$
□

4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Démonstration.
Démontrons que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.
On procède par l'absurde.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

- Considérons la suite $(x_n) \in \left(]0,+\infty[\right)^{\mathbb{N}}$ de terme général : $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\, f_n(x_n) - f(x_n)\,| &= \left| \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \cos\left(\sqrt{n} \times \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \cancel{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \right| \\ &= \frac{n+2}{n+1} \times \mathrm{e}^{-1} \times \cos(1) \quad \textit{(car comme } 1 \in [0,2\pi], \ \cos(1) \geqslant 0\textit{)} \end{aligned}$$

  Or, par définition de norme infinie :

$$|\, f_n(x_n) - f(x_n)\,| \ \leqslant \ \|f_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[}$$

  (il est à noter que supposer la convergence uniforme assure l'existence de $\|f_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[}$ sans avoir à démontrer - ce qu'il faut faire dans le cas général - que les fonctions $f_n - f$ sont bornées)
  Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[} \ \geqslant \ \lim_{n\to+\infty} |\, f_n(x_n) - f(x_n)\,| \ = \ \mathrm{e}^{-1} \ \cos(1) \ > \ 0$$

  En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,]0,+\infty[} \neq 0$, ce qui contredit la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction f.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite de fonctions } (f_n) \text{ ne converge pas uniformément sur }]0,+\infty[\text{ vers } f.}$$

Commentaire

- Cette méthode (annoncé dans la remarque de la question *2*) est basée sur la définition même de convergence uniforme. Plus précisément, rappelons que si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors, pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| \ \leqslant \ \|f_n - f\|_{\infty,I}$$

  Et on obtient alors (par encadrement) que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ tend vers 0.
  On a alors démontré :

La suite (f_n) converge uniformément sur I vers f	$\Rightarrow$	Pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ est convergente de limite nulle

  La contraposée de ce résultat stipule que si on parvient à exhiber une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ n'admet pas 0 pour limite, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f.

Commentaire

- Comment trouver une telle suite (x_n) ? Pour cela, il faut se convaincre que c'est le point $0 \in [0, +\infty[$ qui pose problème. Après tout, c'est en ce point qu'a lieu le saut de continuité pour la fonction f. L'idée est alors de trouver une suite $(x_n) \in \big(]0, +\infty[\big)^n$ qui converge vers 0 (point qui pose problème). On pense alors naturellement à une suite de terme général (en fonction du contexte) :
$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad x_n = \mathrm{e}^{-n}$$
Il est à noter que si c'est 1 qui semble poser problème, on considérera de manière usuelle la suite (x_n) de terme général :
$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad x_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad x_n = 1 - \mathrm{e}^{-n}$$
Évidemment, il n'existe pas de suite (x_n) qui fonctionne à coup sûr. Il faut donc faire preuve de qualité d'adaptation et considérér une suite (x_n) pertinente pour l'exercice proposé. $\square$