DS4

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- L'exercice 1 est commun et devra être traité par tous les élèves.
- Les sujets suivants sont au choix :
  - × le Sujet A contient 2 exercices de type CCINP,
  - × le Sujet B contient un problème de type Centrale.

  Un seul des deux sujets devra être traité.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, b_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.
En remarquant que, pour $k \geqslant 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n \text{(transformation d'Abel)}$$

2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

- ***a)*** Démontrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.
- ***b)*** En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.
- ***c)*** En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

3. Exemple.
Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ***a)*** Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$
- ***b)*** Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.

4. Soit la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.
On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si , les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$) convergent.
On notera U sa fonction somme : pour tout réel x, $U(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n : $F_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$.
On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|F_n(z)\right| \leqslant M$ (on dira que la suite (F_n) est uniformément bornée).

a) Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 0} (a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur A.

b) À l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.

6. Exemple.
Pour x réel et n entier naturel non nul : $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $1 - \mathrm{e}^{ix} = -2i \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}$.

b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.
En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

c) Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel p, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi[$.
On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \frac{x}{\pi} \leqslant \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Sujet A

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

et de calculer sa valeur.
On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[,\ f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[,\ u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2}\ \mathrm{e}^{-xt}$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

7. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

8. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

9. Soit $x \geqslant 0$.
Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\ dt$$

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

10. Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

11. Soit $a > 0$.
Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a,+\infty[,\ F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\ dt$$

12. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Exercice 3

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) \ = \ (X^2-1)\,P'' + 2XP'$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\, U_n^{(n)}$.

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

13. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

14. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

15. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' \;=\; \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

17. Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} \;=\; \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} \;=\; \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$$

18. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \dots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

19. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions 20 à 25, n désigne un entier naturel.

20. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

21. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

22. Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question 21.*

23. Vérifier : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

24. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 23, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz :

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} \;=\; 0$$

25. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question 24.*

26. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ.

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle \;=\; \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

27. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

28. Etablir que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q \rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt$, puis que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$$

Sujet B

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de la matrice M.
Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k : $M^{k+1} = M\,M^k$.
De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout entier naturel k : $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que : $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que : $M^k = 0$, est appelé *indice de nilpotence* de M.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est nilpotente d'indice p.

On pose : $J_1 = (0)$ et, pour tout $\alpha \in [\![2, +\infty[\![$: $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{diag}(A, B) \;=\; \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{C})$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, ..., $A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note :

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) \;=\; \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C})$$

A - Nilpotence d'indice 1

7. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose : $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

8. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que : $u^{p-1}(x) \neq 0$.

9. Vérifier que la famille $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire : $p = 2$.

10. Démontrer : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

11. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2.

12. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

C - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose : $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotente d'indice 2 et de rang r.

13. Démontrer : $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $2r \leqslant n$.

14. On suppose : $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, ..., e_r de E tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E.

15. Donner la matrice de u dans cette base.

16. On suppose : $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, …, e_r de E et des vecteurs v_1, v_2, …, v_{n-2r} appartenant à $\mathrm{Ker}(u)$ tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, \ldots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

17. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

D - Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette sous-partie, A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

18. Montrer que, si A est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A.

19. Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

20. Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à X^n.

21. Montrer la réciproque de la question ***18***.

22. Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

23. Démontrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice p, alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A.

On suppose que P est un polynôme annulateur de A nilpotente.

24. Démontrer que 0 est racine de P.

25. On note m la multiplicité de 0 dans P, ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $Q(0) \neq 0$. Démontrer que $Q(A)$ est inversible puis que P est un multiple de X^p dans $\mathbb{C}[X]$.

E - Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si : $R^2 = V$. On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

26. Calculer la trace et le rang de A. En déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de A. Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

27. Démontrer que A est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que : $A = P\,\mathrm{diag}(J_2, J_1)\,P^{-1}$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que : $R^2 = A$. On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à R.

28. Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.

29. En déduire l'ensemble des racines carrées de A.
On pourra considérer : $R' = P^{-1}\,R\,P$.

On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle : $R^2 = J_3$.

30. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6, puis l'ensemble des solutions de l'équation.

Plus généralement, soit $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. On se propose d'étudier l'équation : $R^2 = V$.

31. Montrer que, si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

32. Pour toute valeur de l'entier $n \geqslant 3$, ehiber une matrice $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geqslant 2$ et admettant au moins une racine carrée.