DS4

EXERCICE 1

On note : $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Déterminer les valeurs propres de A.

b) Déterminer les sous-espaces propres associés.

c) En déduire que A est diagonalisable et exhiber une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

(on ne demande pas de calculer P^{-1})

2. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -4\,u_n & + & 2\,v_n & - & 2\,w_n \\ v_{n+1} & = & -6\,u_n & + & 4\,v_n & - & 6\,w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n & + & v_n & - & 3\,w_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}\,X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

EXERCICE 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

3. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

4. Démontrer que f est continue sur D.

5. Calculer la limite de f en $+\infty$.

6. Démontrer que, pour tout $x \in D$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,dt \;\leqslant\; f(x) \;\leqslant\; 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,dt$$

7. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

PROBLÈME

PARTIE I

Dans la suite, on note (u_n) la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + n^2\,\pi^2}$$

On note $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

8. ***a)*** Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b) Montrer que, pour tout $a > 0$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

c) La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

d) Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

9. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right)$$

Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On note alors $V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.

c) Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

10. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} p_0 : x \mapsto x \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n : x \mapsto x \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\,\pi^2}\right) \end{cases}$$

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in N}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite donnant $p(x)$ sera alors notée :

$$p(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

PARTIE II

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$ par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[,\ h(x,t) = \frac{\sin(t\,x)}{\exp(\pi\,t)-1}$$

11. ***a)*** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto h(x,t)$ admet, quand t tend vers 0 par valeurs positives, une limite finie que l'on déterminera.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

12. ***a) (i)*** Montrer que h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$ et à tout ordre.

(ii) Calculer, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$.
On distinguera les cas n pair et n impair.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t\,x)}{\exp(\pi\,t)-1}\,dt$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$:

$$f^{(2m)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,dt \quad \text{et} \quad f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,dt$$

14. ***a)*** Montrer que, pour tout $t > 0$:

$$\frac{1}{\exp(\pi t)-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t)$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t)\sin(tx)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\ \sin(tx)\,dt$ à l'aide de $u_n(x)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on pose :

$$h_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \exp(-k\pi t)\ \sin(tx)$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0,+\infty[$:

$$h_n(x,t) = \big(1-\exp(-n\pi t)\big)\,\frac{\sin(tx)}{e^{\pi t}-1}$$

Puis, montrer : $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En déduire une expression simple de la fonction f à l'aide de la fonction U.