DS4 (/91)

EXERCICE 1 (/17)

On note : $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer les valeurs propres de A.

- **1 pt : début de calcul convenable de** $\chi_A(X) = \det\Big(X\, I_3 - A\Big)$
- **1 pt :** $\chi_A(X) = -\begin{vmatrix} X+2 & -6X-12 \\ X+2 & -(X^2+7X+10) \end{vmatrix}$
- **1 pt :** $\chi_A(X) = (X+2)^2\ (X-1)$

b) Déterminer les sous-espaces propres associés.

- **3 pts :**
  - × **1 pt :** $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) \ \Leftrightarrow\ -2\,x + 2\,y - 2\,z = 0$
  - × **1 pt :** $E_{-2}(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
  - × **1 pt :** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre et génératrice et donc une base de** $E_{-2}(A)$
- **3 pts :**
  - × **1 pt :** $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{rcr} -5\,x & = & -10\,z \\ y & = & 6\,z \end{array}\right.$
  - × **1 pt :** $E_1(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
  - × **1 pt :** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre et génératrice et donc une base de** $E_1(A)$

c) En déduire que A est diagonalisable et exhiber une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

- **1 pt :** $\dim\big(E_{-2}(A)\big) + \dim\big(E_1(A)\big) = 2 + 1 = 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$ **donc** A **diagonalisable**
- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(concaténation des vecteurs propres des bases déterminées précédemment) et** $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -4\,u_n & + & 2\,v_n & - & 2\,w_n \\ v_{n+1} & = & -6\,u_n & + & 4\,v_n & - & 6\,w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n & + & v_n & - & 3\,w_n \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}\,X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

- **1 pt : par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n\ X_0$.**
- **1 pt :** $X_n = A^n\ X_0 = \left(P \times D \times P^{-1}\right)^n\ X_0 = P \times D^n \times P^{-1}\ X_0$
- **1 pt :** $Y_n = P^{-1}\ X_n = D^n \times P^{-1}\ X_0 = \begin{pmatrix} (-2)^n\ \alpha_0 \\ (-2)^n\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$

b) À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

- **1 pt :** $X_n = \begin{pmatrix} (-2)^n\ \alpha_0 - (-2)^n\ \beta_0 + 2\ \gamma_0 \\ (-2)^n\ \alpha_0 + 6\ \gamma_0 \\ (-2)^n\ \beta_0 + \gamma_0 \end{pmatrix}$

  Ainsi : $u_n = \alpha_0\ (-2)^n - \beta_0\ (-2)^n + 2\ \gamma_0$ **;** $v_n = \alpha_0\ (-2)^n + 6\ \gamma_0$ **;** $w_n = \beta_0\ (-2)^n + \gamma_0$
- **1 pt : comme $\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, (v_n) est convergente $\Leftrightarrow \alpha_0 = 0$**
- **0 pt : de même, (w_n) est convergente $\Leftrightarrow \beta_0 = 0$**
- **1 pt : dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\ \gamma_0$, $v_n = 6\ \gamma_0$ et $w_n = \gamma_0$**

EXERCICE 2 (/ 20)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

3. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

- **1 pt : cas $x_0 = 0$, $\sum\ 1$ diverge grossièrement**
- **1 pt : cas $x_0 < 0$, $\sum\ f_n(x_0)$ diverge grossièrement**
- **2 pts : cas $x_0 > 0$**
  - × **1 pt :** $\mathrm{e}^{-x_0 \times \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
  - × **1 pt : critère des SATP écrit correctement**

4. Démontrer que f est continue sur D.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^0}$ **pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I**
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Convergence uniforme (par convergence normale sur tout segment)}}$
  - × **1 pt :** $\left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right| = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ **pour tout $x \in [a, b]$**
  - × **1 pt :** $0 \leqslant \|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$
  - × **1 pt : par critère de comparaison des SATP, la série $\sum\ \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ est convergente**

5. Calculer la limite de f en $+\infty$.

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie}}$
  - × **1 pt :** $\ell_0 = 1$
  - × **1 pt : si** $n \geqslant 1$**,** $\ell_n = 0$
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Convergence uniforme (par convergence normale)}}$
  - × **1 pt :** $0 \leqslant \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$
  - × **1 pt : par critère de comparaison des SATP, la série** $\sum \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ **est convergente**

6. Démontrer que, pour tout $x \in D$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt$.

- **1 pt : pour tout** $k \in \mathbb{N}$ **et tout** $t \in [k, k+1]$**,** $\mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \geqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}} \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{k+1}}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \leqslant \int_0^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}$ **(somme** `FINIE`**)**
- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt$ **est convergente donc** $\displaystyle\int_0^{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} = f(x)$ **par CV de la série numérique** $\sum f_n(x)$

7. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

- **2 pts :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt = 2\int_0^{+\infty} u\, \mathrm{e}^{-xu}\, du = \frac{2}{x^2}$ **par IPP**
- **1 pt :** $1 \leqslant \dfrac{f(x)}{\frac{2}{x^2}} \leqslant \dfrac{x^2}{2} + 1$
- **1 pt : théorème d'encadrement écrit correctement**

PROBLÈME

PARTIE I (/21)

Dans la suite, on note (u_n) la suite de fonctions définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2 + n^2\,\pi^2}$.

On note $U = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

8. ***a)*** Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

- **1 pt : cas** $x_0 = 0$ **; la série numérique** $\sum 0$ **converge**
- **1 pt :** $u_n(x_0) = \dfrac{2\,x_0}{{x_0}^2 + n^2\,\pi^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\,x_0}{\pi^2\,n^2}$
- **1 pt : théorème d'équivalence des SATP écrit correctement**

b) Montrer que, pour tout $a > 0$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

- **1 pt :** $|\,u_n(x)\,| \leqslant 2\,\dfrac{a}{n^2\,\pi^2}$
- **1 pt :** $0 \leqslant \|u_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant 2\,\dfrac{a}{n^2\,\pi^2}$
- **1 pt :** $\sum \dfrac{a}{n^2\,\pi^2}$ **CV (cf question précédente) et th comparaison des SATP**

c) La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

- **3 pts :** $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \;=\; h_n(n\,\pi) = \dfrac{1}{n\,\pi}$
- **0 pt : la série** $\sum \dfrac{1}{n}$ **diverge**

`OU` **:** $\big|\,u_n(n)\,\big| = \dfrac{2}{(1+\pi^2)\;n}$ **donc** $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant \dfrac{2}{(1+\pi^2)\;n}$ **et démo par l'absurde**

d) Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^0}$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est de classe** $\mathscr{C}^0$ **sur** $\mathbb{R}$
- **1 pts :** $\boxed{\textbf{Convergence uniforme (par convergence normale sur tout segment)}}$
Comme vu en question ***8b*****, la série numérique** $\sum\ \|u_n\|_{\infty,[-a,a]}$ **CV**

9. *a)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n.

- **1 pt : écriture** $H_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^x\ u_n(t)\ dt$
- **1 pt :** $= \Big[\ \ln\big(\,\big|\,t^2 + n^2\,\pi^2\,\big|\,\big)\ \Big]_0^x$
- **1 pt :** $= \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right)$

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right)$$

Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On note alors $V = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.

- **0 pt : cas** $x_0 = 0$ **; la série numérique** $\sum\ 0$ **converge**
- **1 pt :** $v_n(x_0) = \ln\left(1 + \dfrac{{x_0}^2}{n^2\,\pi^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{{x_0}^2}{n^2\,\pi^2}$
- **1 pt : théorème d'équivalence des SATP écrit correctement**

c) Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

- **0 pt : il s'agit de montrer** $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,t}{t^2+n^2\,\pi^2}\right)\,dt \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^x \frac{2\,t}{t^2+n^2\,\pi^2}\,dt\right)$
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^0 \textbf{ sur le segment d'extrémités } 0 \textbf{ et } x}$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** u_n **est de classe** $\mathscr{C}^0$ **sur** S_x
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{CU (par CN) sur le segment d'extrémités } 0 \textbf{ et } x}$
$0 \ \leqslant\ \|u_n\|_{\infty,S_x} \ \leqslant\ \|u_n\|_{\infty,[-x,x]}$

10. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} p_0 : x \mapsto x \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ p_n : x \mapsto x \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\,\pi^2}\right) \end{cases}$$

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in N}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite donnant $p(x)$ sera alors notée :

$$p(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{x_0^2}{k^2\pi^2}\right) \geqslant 1 > 0$
- **1 pt :** $p_n(x_0) = x_0 \times \exp\left(\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{x_0^2}{k^2\pi^2}\right) \right) \right) = x_0 \times \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k(x_0) \right)$
- **1 pt :** $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \times \exp\big(V(x_0)\big) = x_0 \times \exp\left(\displaystyle\int_0^{x_0} U(t)\ dt\right)$ **car** $\sum\ v_n$ **CS**

PARTIE II (/33)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \times\ ]0,+\infty[$ par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times\ ]0,+\infty[,\ h(x,t) = \frac{\sin(t\,x)}{\exp(\pi\,t) - 1}$$

11. ***a)*** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto h(x,t)$ admet, quand t tend vers 0 par valeurs positives, une limite finie que l'on déterminera.

- **1 pt :** $h(x_0,t) = \dfrac{\sin(x_0\,t)}{\exp(\pi\,t) - 1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{x_0\,t}{\pi\,t} = \dfrac{x_0}{\pi}$
- **1 pt : pour tout** $x_0 \in \mathbb{R}$**, la fonction** $t \mapsto h(x_0,t)$ **admet pour limite** $\dfrac{x_0}{\pi}$ **en** 0

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt :** $t \mapsto \dfrac{\sin(x_0\,t)}{\exp(\pi\,t) - 1}$ **est continue sur** $]0,+\infty[$**. Ainsi, l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x_0,t)\ dt$ **est impropre à la fois en** 0 **et en** $+\infty$
- **1 pt : d'après la question précédente, l'intégrande** $t \mapsto \dfrac{\sin(x_0\,t)}{\exp(\pi\,t) - 1}$ **admet une limite finie en** 0**. Ainsi, l'intégrale est faussement impropre en** 0**.**
- **1 pt :** $\left|\dfrac{\sin(x_0\,t)}{\exp(\pi\,t) - 1}\right| = \dfrac{|\sin(x_0\,t)|}{|\exp(\pi\,t) - 1|} = \dfrac{|\sin(x_0\,t)|}{\exp(\pi\,t) - 1} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{\exp(\pi\,t)}\right)$ **et th comparaison intégrales généralisées**

12. ***a) (i)*** Montrer que h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times\ ]0,+\infty[$ et à tout ordre.

- **2 pts : comprendre que ce qui compte c'est le caractère** $\mathscr{C}^\infty$ **de** $x \mapsto \sin(t_0\,x)$

(ii) Calculer, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times\ ]0,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$.
On distinguera les cas n pair et n impair.

- **3 pts :** $\forall m \in \mathbb{N},\ \underline{h}_{t_0}^{(2m)}(x) = \dfrac{(-1)^m\ (t_0)^{2m}}{\mathrm{e}^{\pi\,t_0} - 1}\ \sin\big(t_0\,x\big)$

  $\forall m \in \mathbb{N},\ \underline{h}_{t_0}^{(2m+1)}(x) = \dfrac{(-1)^m\ (t_0)^{2m+1}}{\mathrm{e}^{\pi\,t_0} - 1}\ \cos\big(t_0\,x\big)$

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt : cas $n = 0$ déjà traité**
- **2 pts : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in\ ]0,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$,** $\left| \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) \right| \leqslant \dfrac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1}$
- **1 pt : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1}\, dt$ est faussement impropre en 0**
- **1 pt :** $\dfrac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi t}} = t^n\, \mathrm{e}^{-\pi t}$ **et** $t^n\, \mathrm{e}^{-\pi t} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2} \right)$

13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t\,x)}{\exp(\pi\,t) - 1}\, dt$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$:

$$f^{(2m)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m} \sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1}\, dt \quad \text{et} \quad f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1} \cos(tx)}{\exp(\pi t) - 1}\, dt$$

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^n \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$ **pour tout $t > 0$, $\underline{h_t} : x \mapsto \dfrac{\sin(t\,x)}{\exp(\pi\,t) - 1}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ (*cf* *12(a)i*)**
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : intégrabilité sans forcément dominer - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \underline{h_t}^{(0)}(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après *11b* et *12b***
  - × **2 pts : intégrabilité par domination**
    pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \underline{h_t}^{(n)}(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$
    $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left| \underline{h_t}^{(n)}(x) \right| \leqslant \dfrac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1}$

14. *a)* Montrer que, pour tout $t > 0$: $\dfrac{1}{\exp(\pi t) - 1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t)$

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\pi t}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\pi t}\right)^n - \left(\mathrm{e}^{-\pi t}\right)^0 = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\pi t}} - 1$
- **1 pt :** $= \dfrac{\mathrm{e}^{-\pi t}}{\mathrm{e}^{-\pi t}\, \left(\mathrm{e}^{\pi t} - 1\right)}$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t)\sin(tx)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\ \sin(tx)\ dt$ à l'aide de $u_n(x)$.

- **1 pt : $\forall t \geqslant 0$, $0 \leqslant |\exp(-n\pi t)\sin(tx)| \leqslant \mathrm{e}^{-(n\,\pi)\,t}$ et th de comparaison des intégrales généralisées**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi t}\ \sin(x\,t)\ dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi t} \times \mathrm{e}^{i\,x t}\ dt \right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-n\pi + i\,x)\,t}\ dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{(-n\pi + i\,x)\,t}}{-n\pi + i\,x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{-n\pi + i\,x} \left(\left(\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{(-n\pi + i\,x)\,t} \right) - \mathrm{e}^0 \right)$
- **1 pt :** $\left| \mathrm{e}^{(-n\pi + i\,x)\,t} \right| = \left| \mathrm{e}^{-n\pi\,t} \times \mathrm{e}^{ix\,t} \right| = \left| \mathrm{e}^{-n\pi\,t} \right| \times \left| \mathrm{e}^{ix\,t} \right| = \mathrm{e}^{-n\pi\,t} \times 1 \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $= \dfrac{n\pi}{x^2 + n^2\,\pi^2} + i\ \dfrac{x}{x^2 + n^2\,\pi^2}$ **donc** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi\,t)\ \sin(x\,t)\ dt = \frac{1}{2}\ u_n(x)$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on pose :

$$h_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \exp(-k\pi t) \ \sin(tx)$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, +\infty[$:

$$h_n(x,t) = \big(1 - \exp(-n\pi t)\big) \ \frac{\sin(tx)}{e^{\pi t} - 1}$$

Puis, montrer : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x,t) \, dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En déduire une expression simple de la fonction f à l'aide de la fonction U.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \exp(-k\pi t) = \dfrac{e^{-\pi t}}{e^{-\pi t}} \times \dfrac{1 - \left(e^{-\pi t}\right)^n}{e^{\pi t} - 1}$
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } n \textbf{ »}}$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x, t_0) = h(x, t_0)$
- **0 pt : la fonction** $t \mapsto \dfrac{\sin(x\,t}{e^{\pi t} - 1}$ **est continue (par morceaux) sur** $]0, +\infty[$**.**
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** $t \mapsto h_n(x,t)$ **est continue (par morceaux) sur** $]0, +\infty[$**.**
  - × **1 pt :** $\big|h_n(x,t)\big| = \left|\dfrac{1 - \left(e^{-\pi t}\right)^n}{e^{\pi t} - 1} \ \sin(x\,t)\right| = \dfrac{1 - \left(e^{-\pi t}\right)^n}{e^{\pi t} - 1} \ |\sin(x\,t)| \leqslant \dfrac{|\sin(x\,t)|}{e^{\pi t} - 1}$
  - × **1 pt :** $\varphi : t \mapsto \dfrac{|\sin(x\,t)|}{e^{\pi t} - 1}$ **est intégrable sur** $]0, +\infty[$ **d'après la question** ***11b***
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \exp(-n\pi t) \sin(xt)\right) dt = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t) \ \sin(xt) \ dt\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$
- **1 pt :** $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x,t) \ dt\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right) = \dfrac{1}{2} \ U(x)$