DS4

EXERCICE 1

On note : $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer les valeurs propres de A.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll}
\chi_A(X) & = & \det\Big(X\, I_3 - A\Big) & \\
& = & \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} & \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} & (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & X+3 \\ 6 & X-4 & 6 \\ X+4 & -2 & 2 \end{vmatrix} & \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 6\, L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (X+4)\, L_1}}{=} & (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & X+3 \\ 0 & X+2 & -6X-12 \\ 0 & X+2 & 2-(X+4)(X+3) \end{vmatrix} & \\
& = & (-1)\ (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} X+2 & -6X-12 \\ X+2 & -(X^2+7X+10) \end{vmatrix} & \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
& = & (-1) \begin{vmatrix} X+2 & -6\,(X+2) \\ X+2 & -(X+2)(X+5) \end{vmatrix} & \textit{(en remarquant que } -2 \textit{ est racine évidente de } X^2+7X+10\textit{)} \\
& = & (-1)\ (X+2) \begin{vmatrix} 1 & -6\,(X+2) \\ 1 & -(X+2)(X+5) \end{vmatrix} & \textit{(par linéarité par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
& = & \cancel{(-1)}\ (X+2) \times (\cancel{-}(X+2)) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & (X+5) \end{vmatrix} & \textit{(par linéarité par rapport à la } 2^{\text{ème}} \textit{ colonne)} \\
& = & (X+2)^2 \Big(\big(1 \times (X+5)\big) \ - \ \big(1 \times 6\big)\Big) & \\
& = & (X+2)^2\ (X-1) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \chi_A(X) = (X+2)^2\,(X-1) \text{ et } \mathrm{Sp}(A) = \{ \text{ racines de } \chi_A \} = \{-2, 1\}}$$

□

b) Déterminer les sous-espaces propres associés.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $E_{-2}(A)$, le sous-espace propre associé à -2.

  Soit $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
U \in E_{-2}(A) \quad & \iff \quad \big(A - (-2)\, I_3\big)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -6\,x & + & 6\,y & - & 6\,z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1}}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \; -2\,x = -2\,y + 2\,z \right.
\end{aligned}$$

  On obtient alors :

$$\begin{aligned}
E_{-2}(A) & = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y - z \right\} \\
& = \left\{ \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

  La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

  × libre car uniquement constituée de deux vecteurs non colinéaires,

  × génératrice de $E_{-2}(A)$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{-2}(A) \text{ et } \dim\big(E_{-2}(A)\big) = \operatorname{Card}\big(\mathcal{F}\big) = 2.}$$

- Déterminons maintenant $E_1(A)$, le sous-espace propre associé à 1.

  Soit $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
U \in E_1(A) \quad & \iff \quad \big(A - I_3\big)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -5\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -6\,x & + & 3\,y & - & 6\,z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 4\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow 5\,L_2 - 6\,L_1 \\ L_3 \leftarrow 5\,L_3 - L_1}}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -5\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 18\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 18\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -5\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 18\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} -5\,x & + & 2\,y & = & 2\,z \\ & & y & = & 6\,z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2\,L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} -5\,x & & & = & -10\,z \\ & & y & = & 6\,z \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

  On obtient alors :

$$
\begin{aligned}
E_1(A) \quad & = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 2\,z \quad \texttt{ET} \quad y = 6\,z \right\} \\
& = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2\,z \\ 6\,z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = \quad \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = \quad \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

  La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

  × libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul,

  × génératrice de $E_1(A)$.

  > Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_1(A)$ et $\dim\big(E_1(A)\big) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) = 1$.

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I_3$.
Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = -2$.
On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_{-2}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $A\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
Or :
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Si l'on choisit $x \neq 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut :
  × choisir $y = x$ et donc $z = 0$.
  En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{-2}(A)$ et ainsi :
  $$E_{-2}(A) \ \supset \ \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
  × choisir $z = -x$ et donc $y = 0$.
  En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-2}(A)$ et ainsi :
  $$E_{-2}(A) \ \supset \ \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$
On en conclut finalement : $E_{-2}(A) \ \supset \ \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :
$$\underset{\displaystyle 3}{\underset{\shortparallel}{\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)}} \ = \ \dim\big(E_{-2}(A)\big) \ + \ \underset{\displaystyle 1}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{rg}(A + 2\,I_3)}}$$
(par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)
Ainsi : $\dim\big(E_{-2}(A)\big) = 3 - 1 = 2$ et l'égalité annoncée est vérifiée.
- Rappelons par ailleurs que si λ est une valeur propre de f et si $m_\lambda(A)$ est sa multiplicité alors :
$$1 \ \leqslant \ \dim\big(E_\lambda(A)\big) \ \leqslant \ m_\lambda(A)$$
Cela permet de conclure directement : $\dim\big(E_1(A)\big) = 1$ puisque : $m_1(A) = 1$.
On obtient aussi : $1 \ \leqslant \ \dim\big(E_{-2}(A)\big) \ \leqslant \ m_{-2}(A) = 2$ ce qui peut permettre de démontrer $\dim\big(E_{-2}(A)\big) = 2$ pour peu que l'on parvienne à trouver deux vecteurs de $E_{-2}(A)$ non colinéaires.

□

c) En déduire que A est diagonalisable et exhiber une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

(on ne demande pas de calculer P^{-1})

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\dim\big(E_{-2}(A)\big) \;+\; \dim\big(E_1(A)\big) \;=\; 2+1 \;=\; 3 \;=\; \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est diagonalisable.}}$$

$$\boxed{\text{Plus précisément, en notant } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient : } A \;=\; P\,D\,P^{-1}}$$

□

2. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -4\,u_n & + & 2\,v_n & - & 2\,w_n \\ v_{n+1} & = & -6\,u_n & + & 4\,v_n & - & 6\,w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n & + & v_n & - & 3\,w_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}\,X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

Démonstration.

- Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = A\,X_n$.
- Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $X_n = A^n\ X_0$.
  - ▶ **Initialisation** :
    $A^0 \times X_0 = I_3 \times X_0 = X_0$
    D'où $\mathscr{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $X_{n+1} = A^{n+1}\ X_0$).

$$\begin{array}{rcll} X_{n+1} & = & A\ X_n & \\ & = & A \times (A^n\ X_0) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & A^{n+1}\ X_0 & \end{array}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n\ X_0.}$$

- On en déduit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rrcll} & X_n & = & A^n\ X_0 & \\ & & = & \big(P \times D \times P^{-1}\big)^n\ X_0 & \\ & & = & P \times D^n \times P^{-1}\ X_0 & \textit{(par une récurrence immédiate)} \\ \text{donc} & P^{-1}\ X_n & = & D^n \times P^{-1}\ X_0 & \textit{(en multipliant de part et d'autre par } P^{-1}\textit{)} \\ \text{donc} & Y_n & = & D^n\ Y_0 & \\ & & = & \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} & \\ & & = & \begin{pmatrix} (-2)^n\ \alpha_0 \\ (-2)^n\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N},\ Y_n = \begin{pmatrix} (-2)^n\ \alpha_0 \\ (-2)^n\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcll} X_n & = & P\ Y_n & \textit{(par définition de } Y_n\textit{)} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n\ \alpha_0 \\ (-2)^n\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} & \\ & = & \begin{pmatrix} (-2)^n\ \alpha_0 - (-2)^n\ \beta_0 + 2\ \gamma_0 \\ (-2)^n\ \alpha_0 + 6\ \gamma_0 \\ (-2)^n\ \beta_0 + \gamma_0 \end{pmatrix} & \end{array}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n & = & \alpha_0\ \big(-2\big)^n - \beta_0\ \big(-2\big)^n + 2\ \gamma_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad v_n & = & \alpha_0\ \big(-2\big)^n + 6\ \gamma_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad w_n & = & \beta_0\ \big(-2\big)^n + \gamma_0 \end{array}$$

La suite $\big((-2)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. On en déduit :

$$\text{La suite } (v_n) \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_0 = 0$$

$$\text{La suite } (w_n) \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \beta_0 = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement, les suites } (u_n),\ (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont toutes les trois convergentes à condition que } \alpha_0 = \beta_0 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Si c'est le cas, alors : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\ \gamma_0,\ v_n = 6\ \gamma_0 \text{ et } w_n = \gamma_0.}$$

□

EXERCICE 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

3. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$ alors :

$$f_n(0) = \mathrm{e}^{-0\times\sqrt{n}} = \mathrm{e}^0 = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$$

  Ainsi, la série $\sum f_n(0)$ est grossèrement divergente.

- Si $x_0 \in]-\infty, 0[$ alors :

$$f_n(x_0) = \mathrm{e}^{-x_0\times\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \left(\begin{array}{l} \textit{par composition de limites et car} \\ -x_0 \times \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \textit{ puisque } -x_0 > 0 \end{array}\right)$$

- Si $x_0 \in]0, +\infty[$ alors :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
  × $\mathrm{e}^{-x_0\times\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
  × La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

  Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x_0)$ est (absolument) convergente.

> Finalement, la série $\sum f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in]0, +\infty[$.
> Ainsi la fonction f est définie sur $D =]0, +\infty[$.

Commentaire

- Il est important de bien comprendre les objets et en particulier de différencier les séries $\sum f_n$ et $\sum f_n(x_0)$ qui représentent des objets différents.

$\sum f_n$	$\sum f_n(x_0)$
C'est une **série de fonctions**. Autrement dit, c'est la **suite de fonctions** (S_n) de terme général $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.	C'est une **série numérique**. Autrement dit, c'est la **suite numérique** $\big(S_n(x_0)\big)$ de terme général $S_n(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_0)$.

  La notation x_0 a un intérêt pédagogique (utilisée dans le corrigé mais pas dans l'énoncé qui préfère la notation x). Elle a pour but d'insister sur le fait que cet élément est fixé ce qui permet de mettre en avant que $\sum f_n(x_0)$ est une série numérique et pas une série de fonctions.

- Étudier la convergence simple d'une série de fonctions sur un intervalle I, c'est étudier la nature de la série numérique $\sum f_n(x_0)$ pour tout x_0 élément de I. Il est donc logique qu'une telle étude donne lieu à l'utilisation des méthodes listées dans le chapitre sur les séries numériques (notamment les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs).

4. Démontrer que f est continue sur D.

Démonstration.

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^0}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I.

(ii) $\boxed{\text{Convergence uniforme (par convergence normale sur tout segment)}}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a, b) \in \,]0, +\infty[\, \times \,]0, +\infty[$. On suppose $a \leqslant b$. Soit $x \in [a, b]$.

$$\begin{array}{lcccccl} & a & \leqslant & x & \leqslant & b & \\ \text{donc} & -a & \geqslant & -x & \geqslant & -b & \\ \text{donc} & -a\sqrt{n} & \geqslant & -x\sqrt{n} & \geqslant & -b\sqrt{n} & \textit{(car } \sqrt{n} \geqslant 0\textit{)} \\ \text{donc} & \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}} & \geqslant & \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} & \geqslant & \mathrm{e}^{-b\sqrt{n}} & \textit{(par croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

- Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$:

$$\left| \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \right| = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$$

On en déduit que la fonction $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ est bornée sur $[a, b]$. De plus :

$$0 \leqslant \|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$$

Or, la série $\sum \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ est convergente (reprendre la démonstration en $x_0 = a$ de la question *3*).
Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge normalement sur tout segment de }]0, +\infty[.}$$

$$\boxed{\text{Par théorème de régularité des séries de fonctions, la fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^0 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

Commentaire

- Si I est un intervalle réel, démontrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^0$ (resp. $\mathscr{C}^1$, ..., $\mathscr{C}^k$) sur tout segment $[a, b]$ de I, suffit pour démontrer que la fonction est de classe $\mathscr{C}^0$ (resp. $\mathscr{C}^1$, ..., $\mathscr{C}^k$) sur I tout entier.
- Le point précédent permet de justifier que pour tous les théorèmes qui ont pour but de démontrer le caractère régulier d'une suite (resp. d'une série de fonctions) sur un intervalle I (caractère $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$, ..., $\mathscr{C}^k$), on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I par une hypothèse de convergence uniforme sur tout segment de I. On peut alors conclure que la fonction limite de la suite de fonctions (resp. la fonction somme de la série de fonctions) est régulière sur tout segment $[a, b]$ de I et donc sur I.
- Attention à bien lire le point précédent : la convergence uniforme sur tout segment de I est un mode de convergence plus faible que la convergence sur I.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f	$\Rightarrow$	La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de I vers f

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I	$\Rightarrow$	La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de I

La réciproque est fausse dans les deux cas.

Commentaire

- Rappelons par ailleurs :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

$\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \bullet \text{ Il existe un rang } n_0 \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_0\text{, la fonction } R_n \text{ est bornée} \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \left\| R_n \right\|_{\infty,I} = 0 \end{array}\right.$

(où l'on a noté, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$)

$\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \bullet \text{ La suite } (R_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers la fonction nulle} \end{array}\right.$

- La convergence uniforme amène naturellement à l'étude de la suite de fonctions (R_n). Il est souvent assez difficile de travailler sur cet objet. C'est pourquoi, lors de l'étude d'une série de fonctions $\sum f_n$, la convergence uniforme est généralement démontrée par la convergence normale. Rappelons au passage (la réciproque est fausse) :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur (tout segment de) I	$\Rightarrow$	La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur (tout segment de) I

- Dans le cas où la série de fonctions $\sum f_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées en tout point, on peut en conclure que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \left| R_n(x) \right| \leqslant \left| f_{n+1}(x) \right|$$

C'est la première étape permettant de faire l'étude de la convergence uniforme de la suite (R_n) sur I vers la fonction nulle. □

5. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

(i) Existence d'une limite finie

Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

- Si $n = 0$:

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{0}} = \mathrm{e}^0 = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On note ℓ_0 cette limite.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \left(\begin{array}{l}\textit{par composition de limite et} \\ \textit{car } -x\sqrt{n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\end{array}\right)$$

On note ℓ_n cette limite.

(ii) $\boxed{\text{Convergence uniforme (par convergence normale)}}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{lrcll} & 1 & \leqslant & x & \\ \text{donc} & -1 & \geqslant & -x & \\ \text{donc} & -1\sqrt{n} & \geqslant & -x\sqrt{n} & \textit{(car } \sqrt{n} \geqslant 0\textit{)} \\ \text{donc} & e^{-1\sqrt{n}} & \geqslant & e^{-x\sqrt{n}} & \textit{(par croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

- Ainsi, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\left| e^{-x\sqrt{n}} \right| = e^{-x\sqrt{n}} \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

On en déduit que la fonction $f_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$ est bornée sur $[1, +\infty[$. De plus :

$$0 \leqslant \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

Or, la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ est convergente (reprendre la démonstration en $x_0 = 1$ de la question *3*). Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ est convergente.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par théorème de la double limite, la fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ admet une limite finie en } +\infty \text{ donnée par :} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \ell_0 + \cancel{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n} = 1\end{array}}$$

□

6. Démontrer que, pour tout $x \in D$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt.$

Démonstration.

- Soit $x \in]0, +\infty[$. Soit $k \in [\![0, +\infty[\![$. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{lcccccl} & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 & \\ \text{donc} & \sqrt{k} & \leqslant & \sqrt{t} & \leqslant & \sqrt{k+1} & \textit{(par croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \text{donc} & -x\sqrt{k} & \geqslant & -x\sqrt{t} & \geqslant & -x\sqrt{k+1} & \textit{(car } -x \leqslant 0\textit{)} \\ \text{donc} & e^{-x\sqrt{k}} & \geqslant & e^{-x\sqrt{t}} & \geqslant & e^{-x\sqrt{k+1}} & \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{k}}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{k+1}}\, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ e^{-x\sqrt{k}} & & & & e^{-x\sqrt{k+1}} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall k \in \mathbb{N},\ e^{-x\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leqslant e^{-x\sqrt{k}}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On somme les encadrements précédents pour k variant de 0 à n :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k+1}} \quad \leqslant \quad \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}\, dt \quad \leqslant \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}$$

donc $$\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \quad \leqslant \quad \int_{0}^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt \quad \leqslant \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}$$ *(par décalage d'indice et relation de Chasles)*

Or :

× comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \;=\; f(x) - \mathrm{e}^{-x\sqrt{0}} = f(x) - 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}\right) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \;=\; f(x)$$

× l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt$ est convergente. Démontrons-le.
La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt$ est donc impropre seulement en $+\infty$.

- ▸ $\forall t > 0,\ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$
- ▸ $\left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\right| \;=\; \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
- ▸ L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2\ (> 1)$.

Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt$ est convergente.
On en déduit alors :

$$\int_{0}^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt$$

- Finalement, en passant à la limite dans la double inégalité précédente, on obtient :

$$f(x) - 1 \;\leqslant\; \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt \;\leqslant\; f(x)$$

$$\boxed{\text{En réordonnant : } \forall x \in\,]0, +\infty[,\ \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt \;\leqslant\; f(x) \;\leqslant\; 1 + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt.}$$

Commentaire

- La quantité $f(x)$ est, par définition, une somme. La question demande donc d'établir une inégalité entre une somme et une intégrale. Dans ce cas, il est raisonnable de penser à utiliser le procédé de comparaison série-intégrale.
- Il est indiqué dans le programme officiel que « *les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone* ». Il est donc important de connaître cette méthode.

Commentaire

- Dans la démonstration, on a d'abord effectué une somme d'un nombre finie de termes avant de déterminer la limite des inégalités obtenues. Il est important de comprendre que la relation de Chasles est un résultat qui porte sur une somme d'un nombre fini d'intégrale et ne peut donc être écrit sur une somme d'une infinité d'intégrales sans démonstration. De manière générale, l'introduction du symbole $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ exige une démonstration d'existence des termes créés (ce qui revient généralement à démontrer la convergence d'une série numérique).

$\square$

7. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Démonstration.

- Commençons par calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt$. On effectue le changement de variable $\boxed{u = \sqrt{t}}$:

$$u = \sqrt{t} \ \text{ donc } t = u^2 \qquad \textit{(on note alors } \psi : u \mapsto u^2\textit{)}$$
$$\hookrightarrow dt = 2\,u\,du$$

- $t = 0 \ \Rightarrow \ u = \sqrt{0} = 0$
- $t = +\infty \ \Rightarrow \ u = +\infty$

On obtient alors, sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-x\,u} \times (2\,u)\, du = 2 \int_0^{+\infty} u\, e^{-x\,u}\, du$$

On démontre ainsi que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\, e^{-x\,u}\, du$ sont de même nature. La première étant convergente (démontré en question précédente), il en est de même de la deuxième.

- On procède alors par intégration par parties. Sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} u\, e^{-x\,u}\, du = \left[u \times \frac{-1}{x}\, e^{-x\,u} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{x}\, e^{-x\,u}\, du = \frac{-1}{x} \left[\frac{u}{(e^x)^u} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\,u}\, du$$

Or :

× $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \frac{u}{(e^x)^u} = 0$ par croissances comparées car $e^x > 1$ puisque $x > 0$. Ainsi :

$$\left[\frac{u}{(e^x)^u} \right]_0^{+\infty} = \left(\lim_{u \to +\infty} \frac{u}{(e^x)^u} \right) - \frac{0}{(e^x)^0} = 0$$

L'intégrale initiale et le crochet généralisé étant convergent, la réserve de convergence est levée.

× Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,u}\, du &= \left[\dfrac{-1}{x}\ \mathrm{e}^{-x\,u} \right]_0^{+\infty} \\ &= \dfrac{-1}{x}\ \left[\ \mathrm{e}^{-x\,u}\ \right]_0^{+\infty} \\ &= \dfrac{-1}{x}\ \left(\cancel{\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x\,u}} - \mathrm{e}^{-0\times u} \right) \\ &= \dfrac{1}{x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,\sqrt{t}}\, dt = 2\, \int_0^{+\infty} u\ \mathrm{e}^{-x\,u}\, du = \dfrac{2}{x^2}.}$$

- On obtient alors, par la question précédente, pour tout $x > 0$:

$$\dfrac{2}{x^2} \ \leqslant\ f(x)\ \leqslant\ 1 + \dfrac{2}{x^2}$$

Finalement, en divisant de part et d'autre par $\dfrac{2}{x^2} > 0$:

$$1\ \leqslant\ \dfrac{f(x)}{\frac{2}{x^2}}\ \leqslant\ \dfrac{x^2}{2} + 1$$

Or :

× $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$

× $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2}{2} + 1 \right) = 1$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}.}$$

□

PROBLÈME

PARTIE I

Dans la suite, on note (u_n) la suite de fonctions définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2 + n^2\,\pi^2}$.

On note $U = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

8. a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$ alors :
$$u_n(0) = \frac{2 \times 0}{0^2 + n^2\,\pi^2} = 0$$
Et la série $\sum\ 0$ est convergente.
- Si $x_0 \neq 0$ alors :
$$|\,u_n(x_0)\,| \ = \ \left|\ \frac{2\,x_0}{x_0{}^2 + n^2\,\pi^2}\ \right| \ = \ \frac{2\,|\,x_0\,|}{|\,x_0{}^2 + n^2\,\pi^2\,|} = = \ \frac{2\,|\,x_0\,|}{x_0{}^2 + n^2\,\pi^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,|\,x_0\,|}{\pi^2\,n^2}$$
Or :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
  - × $\dfrac{2\,|\,x_0\,|}{\pi^2\,n^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
  - × La série $\sum\ \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1)

  Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est (absolument) convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ la série numérique } \sum\ u_n(x) \text{ est convergente. Ainsi, la série de fonctions } \sum\ u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

On peut s'interroger sur la nécessité de traiter à part le cas $x_0 = 0$. Si on ne le fait pas, on est amené à écrire :
$$u_n(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$$
Il est préférable d'éviter cette écriture. Soyons précis : l'écriture $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ n'est pas fondamentalement fausse mais :
- × elle nécessite de connaître la définition correcte d'équivalent (exprimée « avec les ϵ »). Former le quotient n'a évidemment aucun sens avec un dénominateur nul.
- × écrire $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ signifie simplement que la suite numérique (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, ce qui rend l'étude de la suite (a_n) peu intéressant (c'est le cas dans cette question).
- × elle amène souvent à des confusions. Notamment : $\dfrac{1}{n} \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} 0$.

□

b) Montrer que, pour tout $a > 0$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a > 0$. Soit $x \in [-a, a]$.

$$\begin{array}{lrcccl} & -a & \leqslant & x & \leqslant & a \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & x^2 & \leqslant & a^2 \\ \text{donc} & 0 + n^2\,\pi^2 & \leqslant & x^2 + n^2\,\pi^2 & \leqslant & a^2 + n^2\,\pi^2 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{n^2\,\pi^2} & \geqslant & \dfrac{1}{x^2 + n^2\,\pi^2} & \geqslant & \dfrac{1}{a^2 + n^2\,\pi^2} \end{array}$$

(car la fonction inverse est croissante sur $]0, +\infty[$*)*

- Pour tout $x \in [-a, a]$:

$$|\, u_n(x)\,| \;=\; \left| \frac{2\,x}{x^2 + n^2\,\pi^2} \right| \;=\; \frac{|\,2\,x\,|}{|\,x^2 + n^2\,\pi^2\,|} \;=\; 2\,\frac{|\,x\,|}{x^2 + n^2\,\pi^2} \;\leqslant\; 2\,\frac{a}{x^2 + n^2\,\pi^2} \;\leqslant\; 2\,\frac{a}{n^2\,\pi^2}$$

On en déduit que la fonction u_n est bornée sur $[-a, a]$. De plus :

$$0 \;\leqslant\; \|u_n\|_{\infty,[-a,a]} \;\leqslant\; 2\,\frac{a}{n^2\,\pi^2}$$

Or, la série numérique $\sum \dfrac{a}{n^2\,\pi^2}$ est convergente (comme détaillé en question précédente). Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum \|u_n\|_{\infty,[-a,a]}$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge normalement sur tout segment de la forme } [-a, a].}$$

Commentaire

- On a démontré dans cette question : $\forall x \in [-a, a],\ |\, u_n(x)\,| \;\leqslant\; 2\,\dfrac{a}{n^2\,\pi^2}$.

  Pour obtenir cette majoration, on a notamment écrit : $x^2 + n^2\,\pi^2 \geqslant n^2\,\pi^2$, ce qui est vrai indépendamment de la valeur de x. Seule la majoration au numérateur nécessite de travailler sur un segment.
- On peut d'ailleurs s'interroger sur le fait de considérer un segment de la forme $[-a, a]$ et pas de la forme $[a, b]$. L'intérêt est que cela permet d'écrire : $\forall x \in [-a, a]$, $|x| \leqslant a$, ce qui est plus simple que d'écrire :

$$\forall x \in [a, b],\ |\,x\,| \;\leqslant\; \max\,\big(|a|, |b|\big)$$

- Rappelons que la convergence normale (respectivement uniforme) sur tout segment d'un intervalle I ne permet pas de conclure quant à la convergence normale (respectivement uniforme) sur l'intervalle I tout en entier. En revanche, démontrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^0$ (resp. $\mathscr{C}^1$, ..., $\mathscr{C}^k$) sur tout segment $[a, b]$ d'un intervalle réel I suffit pour démontrer que la fonction est de classe $\mathscr{C}^0$ (resp. $\mathscr{C}^1$, ..., $\mathscr{C}^k$) sur I tout entier. De manière générale, pour que la fonction soit régulière sur I tout en entier, il suffit qu'elle le soit sur des intervalles permettant de recouvrir I tout en entier. On profite de ce résultat lorsque l'on souhaite démontrer la régularité de la somme d'une série de fonctions sur I. On démontre qu'elle est régulière sur des intervalles adaptés recouvrant I plutôt que de travailler directement sur I puisqu'on peut alors invoquer l'hypothèse de convergence normale sur tout intervalle adapté (plus simple à obtenir que la convergence normale sur l'intervalle I en entier). $\square$

c) La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions la fonction $|\, u_n \,|$. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|\, u_n(x) \,| = 2 \, \frac{|x|}{x^2 + n^2 \, \pi^2}$$
La fonction $|\, u_n \,|$ est paire sur $\mathbb{R}$. On peut donc l'étudier sur $[0, +\infty[$. On remarque alors :
$$\forall x \geqslant 0, \ |\, u_n(x) \,| = 2 \, \frac{x}{x^2 + n^2 \, \pi^2}$$

- La fonction $h_n : x \mapsto 2 \, \dfrac{x}{x^2 + n^2 \, \pi^2}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ car elle est le quotient $h_n = \dfrac{f_n}{g_n}$ où :
  × $f_n : x \mapsto 2\,x$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.
  × $g_n : x \mapsto x^2 + n^2 \, \pi^2$:
    ▶ est dérivable sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.
    ▶ `NE S'ANNULE PAS` sur $[0, +\infty[$.

  De plus, pour tout $x \in [0, +\infty[$:
$$h_n'(x) \ = \ \frac{2\,(x^2 + n^2\,\pi^2) - 2\,x\ (2x)}{\left(x^2 + n^2\,\pi^2\right)^2} \ = \ \frac{-2\,x^2 + 2\,n^2\,\pi^2}{\left(x^2 + n^2\,\pi^2\right)^2}$$
  Comme $\left(x^2 + n^2\,\pi^2\right)^2 > 0$, la quantité $h_n'(x)$ est du signe de $-2\,x^2 + 2\,n^2\,\pi^2$. Ainsi :
$$\begin{aligned} h_n'(x) > 0 \ &\Leftrightarrow \ -2\,x^2 + 2\,n^2\,\pi^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \ 2\,x^2 < 2\,n^2\,\pi^2 \\ &\Leftrightarrow \ x^2 < n^2\,\pi^2 \\ &\Leftrightarrow \ x < n\,\pi \end{aligned}$$
  (par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $[0, +\infty[$)

  On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$n\,\pi$		$+\infty$
Signe de $h_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h_n	0	↗	$u_n(n\pi)$	↘	0

  De plus : $h_n(n\pi) = \dfrac{2\,n\pi}{\left(n\pi\right)^2 + n^2\,\pi^2} = \dfrac{2\,n\pi}{2\,n^2\,\pi^2} = \dfrac{1}{n\,\pi} > 0$.

- On en déduit que la fonction h_n est bornée sur $[0, +\infty[$. Ainsi, la fonction u_n l'est sur $\mathbb{R}$. De plus :
$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \ = \ h_n(n\,\pi) = \frac{1}{n\,\pi}$$
  Or la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente en tant que série de Riemann d'exposant 1 ($\not> 1$).

  > La série numérique $\sum \ \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$ est divergente. Autrement dit, la série $\sum \ u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Commentaire

- Tout d'abord, notons qu'à une question du type :

« La propriété [...] est-elle vérifiée ? »

la réponse attendue est généralement : `NON`. Cela ne résout évidemment pas la question car il convient de justifier cette réponse.

- Ce sujet est construit suivant le schéma usuel suivant.

1) Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

2) Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément / normalement sur tout intervalle adapté de I.

3) La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur I ?

4) Démontrer que $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue / de classe $\mathscr{C}^1$ / de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

Il faut prendre du recul et comprendre cette construction. Dans un tel cas, il est à peu près certain que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I. Si c'était le cas, on ne s'intéresserait pas à la convergence de cette série de fonctions sur des intervalles adaptés à la situation. La question ***2*** serait supprimée et la question ***3)*** serait certainement modifiée et remplacée par : « Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I ».

- Il n'est pas indispensable de déterminer précisément $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$. Obtenir une minoration serait bien suffisant. On pouvait notamment constater :

$$\left| u_n(n) \right| = \left| \frac{2\,n}{(1+\pi^2)\,n^2} \right| = \frac{2\,n}{(1+\pi^2)\,n^2} = \frac{2}{(1+\pi^2)\ n}$$

On raisonne alors par l'absurde. Supposons que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est bornée sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \ \geqslant\ \left| u_n(n) \right| \ =\ \frac{2}{1+\pi^2}\ \frac{1}{n}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. On en conclut, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge. Absurde !

Il est à noter que procéder par l'absurde permet de pouvoir affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est bornée. Si on veut raisonner de manière directe, il faudrait rigoureusement faire une disjonction de cas : si les fonctions ne sont pas bornées (ce qui éliminer la possibilité de la convergence normale de la série) et si elles le sont. □

d) Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

(i) Caractère $\mathscr{C}^0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Convergence uniforme (par convergence normale sur tout segment)

Soit $a > 0$. D'après la question ***8b***, la série $\sum \|u_n\|_{\infty,[-a,a]}$ est convergente.

Par théorème de régularité des séries de fonctions, la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. □

9. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n.

Démonstration.

- La primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n est la fonction :

$$H_n : x \mapsto \int_0^x u_n(t)\, dt$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \int_0^x u_n(t)\, dt \\ &= \int_0^x \frac{2\,t}{t^2 + n^2\,\pi^2}\, dt \\ &= \Big[\ln\left(\left| t^2 + n^2\,\pi^2 \right| \right) \Big]_0^x \\ &= \ln\left(\left| x^2 + n^2\,\pi^2 \right| \right) - \ln\left(\left| n^2\,\pi^2 \right| \right) \\ &= \ln\left(x^2 + n^2\,\pi^2 \right) - \ln\left(n^2\,\pi^2 \right) \\ &= \ln\left(\frac{x^2 + n^2\,\pi^2}{n^2\,\pi^2} \right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\,\pi^2} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\,\pi^2} \right)}$$

□

b) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\,\pi^2} \right)$$

Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On note alors $V = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$ alors :

$$v_n(0) = \ln\left(1 + \frac{0^2}{n^2\,\pi^2} \right) = 0$$

  Et la série $\sum 0$ est convergente.

- Si $x_0 \neq 0$ alors :

$$v_n(x_0) = \ln\left(1 + \frac{{x_0}^2}{n^2\,\pi^2} \right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{{x_0}^2}{n^2\,\pi^2}$$

Or :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$

× $\dfrac{{x_0}^2}{\pi^2\, n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

× La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1)

Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum v_n(x_0)$ est (absolument) convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ la série numérique } \sum v_n(x) \text{ est convergente. Ainsi, la série de fonctions } \sum v_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

□

c) Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

Démonstration.

- Il s'agit de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$V(x) \;=\; \int_0^x U(t)\; dt \;=\; \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,t}{t^2 + n^2\,\pi^2} \right) dt$$

Par ailleurs, d'après la question **9a** : $V(x) \;=\; \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{2\,t}{t^2+n^2\,\pi^2}\; dt\right)$.

En résumé, il s'agit de démontrer :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,t}{t^2 + n^2\,\pi^2} \right) dt \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{2\,t}{t^2+n^2\,\pi^2}\; dt\right)$$

- On doit donc appliquer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le théorème d'interversion des symboles $\displaystyle\int_0^x$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^0 \text{ sur le segment d'extrémités 0 et } x}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^0$ sur le segment d'extrémités 0 et x ($[0, x]$ si $x \geqslant 0$ ou $[x, 0]$ si $x < 0$). On note S_x ce segment.

(ii) $\boxed{\text{Convergence uniforme (par convergence normale) sur le segment d'extrémités 0 et } x}$

Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est bornée sur $[-x, x]$ (d'après la question **8b**) et donc sur S_x. De plus :

$$0 \;\leqslant\; \|u_n\|_{\infty, S_x} \;\leqslant\; \|u_n\|_{\infty,[-x,x]}$$

Or, toujours d'après la question **8b**, la série $\sum \|u_n\|_{\infty,[-x,x]}$ est convergente.
On en déduit, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum \|u_n\|_{\infty,S_x}$ est convergente.

Par théorème d'interversion, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{V(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{2\,t}{t^2+n^2\,\pi^2}\; dt\right) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,t}{t^2+n^2\,\pi^2}\; dt\right) = \int_0^x U(t)\; dt}$$

Commentaire

- Pour des raisons pédagogiques, on a fait le choix dans cette question d'utiliser le théorème permettant d'intervertir des symboles $\int_0^x$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}$.
- Cependant, on aurait aussi pu démontrer que la fonction V est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée U et s'annule en 0. Pour cela, il suffit d'utiliser le théorème de régularité (caractère $\mathscr{C}^1$) d'une somme de séries de fonctions. Cela demande a minima de démontrer la convergence uniforme (on le fait généralement par convergence normale) sur tout segment de $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum u_n'$.

$\square$

10. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} p_0 : x \mapsto x \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n : x \mapsto x \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\,\pi^2}\right) \end{cases}$$

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in N}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite donnant $p(x)$ sera alors notée : $p(x) = x \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Comme $x_0^2 \geqslant 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{x_0^2}{k^2\pi^2} \ \geqslant\ 1$$

On en conclut, par produit de termes plus grand que 1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x_0^2}{k^2\pi^2}\right) \geqslant 1 > 0$.

- On peut alors écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} p_n(x_0) & = & x_0 \times \exp\left(\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x_0^2}{k^2\pi^2}\right) \right) \right) & \\ & = & x_0 \times \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x_0^2}{k^2\pi^2}\right) \right) & \\ & = & x_0 \times \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k(x_0) \right) & \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & x_0 \times \exp\left(V(x_0)\right) & \textit{(car } V_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} V(x_0) \textit{ d'après la question } \mathbf{9b} \\ & & & \textit{et par continuité de la fonction } \exp \textit{ en } V(x_0)\textit{)} \\ & = & x_0 \times \exp\left(\displaystyle\int_0^{x_0} U(t)\,dt \right) & \end{array}$$

Ainsi, la suite de fonctions (p_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto x \times \exp\left(\displaystyle\int_0^{x} U(t)\,dt \right)$.

$\square$

PARTIE II

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \ h(x, t) = \frac{\sin(t\, x)}{\exp(\pi\, t) - 1}$$

11. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto h(x, t)$ admet, quand t tend vers 0 par valeurs positives, une limite finie que l'on déterminera.

Démonstration.

- Rappelons : $e^u = 1 + u + \underset{u \to 0}{o}(u)$ et $\sin(v) = v + \underset{v \to 0}{o}(v)$. En particulier : $e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$ et $\sin(v) \underset{v \to 0}{\sim} v$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
  × Si $x_0 = 0$: alors $h(0, t) = \dfrac{\sin(0)}{\exp(\pi\, t) - 1} = 0 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$
  × Si $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Comme $x_0\, t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\pi\, t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit :

$$h(x_0, t) \ = \ \frac{\sin(x_0\, t)}{\exp(\pi\, t) - 1} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{x_0\, t}{\pi\, t} = \frac{x_0}{\pi}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } t \mapsto h(x_0, t) \text{ admet pour limite } \frac{x_0}{\pi} \text{ en } 0.}$$

□

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(x_0\, t)}{\exp(\pi\, t) - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $\dfrac{h_1}{h_2}$ où :
  × $h_1 : t \mapsto \sin(x_0\, t)$ continue sur $\mathbb{R}$,
  × $h_2 : t \mapsto \exp(\pi\, t) - 1$:
    ▸ est continue sur $\mathbb{R}$,
    ▸ `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}$.

  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x_0, t)\, dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
  Or, d'après la question précédente, l'intégrande $t \mapsto \dfrac{\sin(x_0\, t)}{\exp(\pi\, t) - 1}$ admet une limite finie en 0.
  Ainsi, l'intégrale est faussement impropre en 0.
- Par aileurs :
  × $\forall t > 0$, $e^{-\pi\, t} \geqslant 0$
  × $\left| \dfrac{\sin(x_0\, t)}{\exp(\pi\, t) - 1} \right| = \dfrac{|\sin(x_0\, t)|}{|\exp(\pi\, t) - 1|} = \dfrac{|\sin(x_0\, t)|}{\exp(\pi\, t) - 1} = \underset{t \to +\infty}{O}\left(\dfrac{1}{\exp(\pi\, t)}\right)$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\pi\, t}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $\pi > 0$.

  Ainsi, par théorème de domination des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x_0, t)\, dt$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } t \mapsto h(x, t) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$$

□

12. a) (i) Montrer que h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times \,]0, +\infty[$ et à tout ordre.

Démonstration.
Soit $t_0 > 0$.
La fonction $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto \dfrac{1}{e^{\pi\, t_0} - 1} \, \sin(t_0\, x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car elle s'écrit sous la forme $\underline{h}_{t_0} = c \times h_2 \circ h_1$ où c est une constante et :

× $h_1 : x \mapsto t_0\, x$ est :
  - ▶ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
  - ▶ telle que : $h_1\big(\mathbb{R}\big) \subset \mathbb{R}$.

× $h_2 : x \mapsto \sin(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times \,]0, +\infty[$.

Commentaire

- Par définition, la fonction h admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point de $I \times J$ si, pout tout $t_0 \in J$, la fonction partielle $\underline{h}_{t_0}$ est dérivable sur I.
- Lorsque c'est le cas :
$$\forall t_0 \in J, \forall x \in I, \ \frac{\partial h}{\partial x}(x, t_0) = \underline{h}'_{t_0}(x)$$

□

(ii) Calculer, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \,]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$.
On distinguera les cas n pair et n impair.

Démonstration.

- Soit $t_0 > 0$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

  × $\underline{h}^{(0)}_{t_0}(x) = \underline{h}_{t_0}(x) = \dfrac{1}{e^{\pi\, t_0} - 1} \, \sin(t_0\, x)$

  × $\underline{h}'_{t_0}(x) = c \times h'_2\big(h_1(x)\big) \times h'_1(x) = \dfrac{1}{e^{\pi\, t_0} - 1} \times \cos(t_0\, x) \times t_0 = \dfrac{t_0}{e^{\pi\, t_0} - 1} \, \cos(t_0\, x)$

  × $\underline{h}''_{t_0}(x) = \big(\underline{h}'_{t_0}\big)'(x) = \dfrac{t_0^2}{e^{\pi\, t_0} - 1} \, \big(- \sin(t_0\, x) \big) = \dfrac{-t_0^2}{e^{\pi\, t_0} - 1} \, \sin(t_0\, x)$

  × $\underline{h}'''_{t_0}(x) = \big(\underline{h}''_{t_0}\big)'(x) = \dfrac{-t_0^3}{e^{\pi\, t_0} - 1} \, \cos(t_0\, x)$

  × $\underline{h}^{(4)}_{t_0}(x) = \big(\underline{h}'''_{t_0}\big)'(x) = \dfrac{t_0^4}{e^{\pi\, t_0} - 1} \, \sin(t_0\, x)$

  × $\underline{h}^{(5)}_{t_0}(x) = \Big(\underline{h}^{(4)}_{t_0}\Big)'(x) = \dfrac{t_0^5}{e^{\pi\, t_0} - 1} \, \cos(t_0\, x)$

  × ...

- On démontre, par une récurrence immédiate :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \underline{h}_{t_0}^{(2m)}(x) = \frac{(-1)^m\ (t_0)^{2m}}{e^{\pi\, t_0} - 1}\ \sin\left(t_0\, x\right)$$

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \underline{h}_{t_0}^{(2m+1)}(x) = \frac{(-1)^m\ (t_0)^{2m+1}}{e^{\pi\, t_0} - 1}\ \cos\left(t_0\, x\right)$$

Commentaire

- Dans cette question, on doit trouver la formule de la dérivée $n^{\text{ème}}$. La formule n'étant pas donnée, la fournir de manière exacte démontre la compréhension et permet d'obtenir tous les points même si la récurrence n'est pas réalisée. Évidemment, si l'énoncé fournit la formule, il est nécessaire d'effectuer la récurrence permettant de la démontrer.
- L'énoncé suggère d'effectuer une disjonction de cas suivant la parité de n. Cela permet en effet d'obtenir la formule générale. Si on s'intéresse au cas où n est pair :

$$\begin{array}{rcl} \underline{h}_{t_0}^{(0)}(x) & = & \dfrac{1}{e^{\pi\, t_0} - 1}\ \sin(t_0\, x) \\ \underline{h}_{t_0}^{(2)}(x) & = & \dfrac{-t_0^2}{e^{\pi\, t_0} - 1}\ \sin(t_0\, x) \\ \underline{h}_{t_0}^{(4)}(x) & = & \dfrac{t_0^4}{e^{\pi\, t_0} - 1}\ \sin(t_0\, x) \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots \end{array}$$

En dérivant un nombre pair de fois, on voit apparaître la multiplication d'une puissance paire de t_0 par la quantité $\sin(t\, x_0)$. Par ailleurs, une multiplication par -1 apparaît une fois sur deux.
- On pouvait aussi écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underline{h}_{t_0}^{(n)}(x) = \frac{(t_0)^n}{e^{\pi\, t_0} - 1}\ \sin^{(n)}\left(t_0\, x\right) \qquad (*)$$

Il suffit alors de déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction sin.
Attention à bien lire l'égalité $(*)$. La notation $\sin^{(n)}(t_0\, x)$ correspond à la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction sin évaluée en $t_0\, x$. Cette notation a du sens contrairement à la notation :

$$\left(\sin\left(t_0\, x\right)\right)^{(n)}$$

Une telle notation n'a `AUCUN SENS` : on ne dérive pas une quantité mais une fonction. Par ailleurs, même si on acceptait une telle notation, on ne pourrait savoir s'il s'agit de dériver suivant la variable x ou la variable t_0.

$\square$

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***11b***.

- On suppose maintenant $n \neq 0$. Deux cas se présentent.
  - $\times$ Si n est pair, alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2\,m$. Dans ce cas, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^{2m} h}{\partial x^{2m}}(x,t) \right| &= \left| \frac{(-1)^m \; t^{2m}}{\mathrm{e}^{\pi\, t} - 1} \; \sin\big(t\,x\big) \right| \\
&= \frac{|\,(-1)^m\,| \;\; |\,t\,|^{2m}}{|\,\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1\,|} \; \big|\sin\big(t\,x\big)\,\big| \\
&= \frac{t^{2m}}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1} \; \big|\sin\big(t\,x\big)\,\big| \\
&\leqslant \frac{t^{2m}}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1}
\end{aligned}$$

  - $\times$ Si n est pair, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2\,m + 1$. En agissant de manière similaire, comme, pour tout $t > 0$, $\big|\sin\big(t\,x\big)\big| \leqslant 1$, on obtient :

$$\left| \frac{\partial^{2m+1} h}{\partial x^{2m+1}}(x,t) \right| = \left| \frac{(-1)^m \; t^{2m+1}}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1} \; \cos\big(t\,x\big) \right| \leqslant \frac{t^{2m+1}}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \,]0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) \right| \leqslant \frac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1}.}$$

- En démontrant que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, on peut conclure, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \left| \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) \right|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

  Démontrons ce point. Remarquons tout d'abord que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, elle admet pour limite 0 en 0. En effet :

$$\frac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^n}{\pi\,t} = \frac{1}{\pi}\; t^{n-1} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1}\, dt$ est faussement impropre en 0 et impropre en $+\infty$.

  - $\times$ $\forall t \geqslant 1,\ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$
  - $\times$ $\dfrac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi\,t}} = t^n\, \mathrm{e}^{-\pi\,t}$ et $t^n\, \mathrm{e}^{-\pi\,t} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
  - $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 (> 1).

  Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{e}^{\pi\,t} - 1}\, dt$ est absolument convergente.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction} \\ t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.\end{array}}$$

$\square$

13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t\,x)}{\exp(\pi\,t)-1}\,dt$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$:

$$f^{(2m)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,dt \quad \text{et} \quad f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,dt$$

Démonstration.
On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^n$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in \,]0,+\infty[$, la fonction $\underline{h_t} : x \mapsto \dfrac{\sin(t\,x)}{\exp(\pi\,t)-1}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ d'après la question ***12(a)i***.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la question ***12(a)ii*** :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \underline{h_t}^{(2m)}(x) = \frac{(-1)^m\ (t)^{2m}}{e^{\pi\,t}-1}\ \sin(t\,x)$$

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \underline{h_t}^{(2m+1)}(x) = \frac{(-1)^m\ (t)^{2m+1}}{e^{\pi\,t}-1}\ \cos(t\,x)$$

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)
  (0) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h_t}^{(0)}(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question ***11b***.
  (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h_t}^{(1)}(x)$ est intégrable d'après la question ***12b***.
  (2) ...
  (n-1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h_t}^{(n-1)}(x)$ est intégrable d'après la question ***12b***.
- Intégrabilité par domination
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h_t}^{(n)}(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
  - De plus, comme démontré en question ***12b*** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left|\underline{h_t}^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{t^n}{e^{\pi\,t}-1} \qquad (*)$$

Et la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^n}{e^{\pi\,t}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(cette inégalité démontre au passage que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h_t}^{(n)}(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$)

> Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$f^{(2m)}(x) = \int_0^{+\infty} \underline{t_t}^{(2m)}(x)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m\ t^{2m}\ \sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,dt$$

et

$$f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \underline{t_t}^{(2m)}(x)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m\ t^{2m+1}\ \cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,dt$$

□

14. a) Montrer que, pour tout $t > 0$:

$$\frac{1}{\exp(\pi t) - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t)$$

Démonstration.
Soit $t > 0$.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\exp(-n\pi t) = \left(e^{-\pi t}\right)^n$$

- Comme $t > 0$, $-\pi t < 0$ et donc $e^{-\pi t} \in]0, 1[$.

  On en déduit que la série numérique $\sum \left(e^{-\pi t}\right)^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $e^{-\pi t} \in]-1, 1[$. De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\pi t}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\pi t}}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-\pi t}\right)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\pi t}\right)^n - \left(e^{-\pi t}\right)^0 \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\pi t}} - 1 \\
&= \frac{1 - \left(1 - e^{-\pi t}\right)}{1 - e^{-\pi t}} \\
&= \frac{e^{-\pi t}}{e^{-\pi t}\left(e^{\pi t} - 1\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien, pour tout } t > 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-\pi t}\right)^n = \frac{1}{e^{\pi t} - 1}.}$$

□

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t) \sin(tx)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\ \sin(tx)\ dt$ à l'aide de $u_n(x)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$.
  La fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t)\ \sin(x\,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\ \sin(x\,t)$ est impropre seulement en $+\infty$.
- Par ailleurs, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
|\exp(-n\pi t) \sin(x\,t)| &= |\exp(-n\pi t)|\ |\sin(x\,t)| \\
&= \exp(-n\pi t) \times |\sin(x\,t)| \\
&\leqslant \exp(-n\pi t)
\end{aligned}$$

Finalement :

× $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\exp(-n\pi t)\sin(tx)| \leqslant e^{-(n\,\pi)\,t}$

× L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n\,\pi)\,t}\,dt$ est absolument convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $n\,\pi > 0$.

Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\ \sin(x\,t)\ dt$ est absolument convergente.

> Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t)\ \sin(x\,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- Remarquons alors, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\exp(-n\pi t) \times e^{i\,x\,t} &= \exp(-n\pi t) \times \big(\cos(x\,t) + i\ \sin(x\,t)\big)\\ &= \exp(-n\pi t)\ \cos(x\,t)\ +\ i\ \exp(-n\pi t)\ \sin(x\,t)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\exp(-n\pi t)\ \sin(x\,t)\ =\ \mathrm{Im}\left(\exp(-n\pi t) \times e^{i\,x\,t}\right)$$

> On en déduit alors, par définition des intégrales de fonctions de la variable réelle à valeurs complexes :
> $$\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\ \sin(x\,t)\ dt\ =\ \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t) \times e^{i\,x\,t}\ dt\right)$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t) \times e^{i\,x\,t}\ dt &= \int_0^{+\infty} e^{(-n\pi + i\,x)\,t}\ dt\\ &= \left[\frac{e^{(-n\pi+i\,x)\,t}}{-n\pi + i\,x}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{-n\pi + i\,x}\ \left(\left(\lim_{t\to+\infty} e^{(-n\pi+i\,x)\,t}\right)\ -\ e^0\right)\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\left|\, e^{(-n\pi+i\,x)\,t}\,\right|\ =\ \left|\, e^{-n\pi\,t} \times e^{ix\,t}\,\right|\ =\ \left|\, e^{-n\pi\,t}\,\right| \times \left|\, e^{ix\,t}\,\right|\ =\ e^{-n\pi\,t} \times 1 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t) \times e^{i\,x\,t}\ dt &= \frac{1}{-n\pi + i\,x}\ (0\ -\ 1)\\ &= \frac{-1 \times \big(-n\pi - i\,x\big)}{\big(-n\pi + i\,x\big)\ \big(-n\pi - i\,x\big)}\\ &= \frac{n\pi + i\,x}{\big(-n\pi\big)^2 - \big(i\,x\big)^2}\\ &= \frac{n\pi}{x^2 + n^2\,\pi^2}\ +\ i\ \frac{x}{x^2 + n^2\,\pi^2}\end{aligned}$$

> Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi\,t)\ \sin(x\,t)\ dt = \frac{x}{x^2 + n^2\,\pi^2} = \frac{1}{2}\ u_n(x)$.

□

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on pose :

$$h_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \exp(-k\pi t)\ \sin(tx)$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, +\infty[$:

$$h_n(x,t) = \big(1 - \exp(-n\pi t)\big)\ \frac{\sin(tx)}{e^{\pi t} - 1}$$

Puis, montrer : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\ dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En déduire une expression simple de la fonction f à l'aide de la fonction U.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \exp(-k\pi t) &= \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-\pi t}\right)^k \\ &= \frac{\left(e^{-\pi t}\right)^1 - \left(e^{-\pi t}\right)^{n+1}}{1 - e^{-\pi t}} \qquad \textit{(car } e^{-\pi t} \neq 1 \textit{ puisque } t \neq 0\textit{)} \\ &= \frac{e^{-\pi t}}{e^{-\pi t}} \times \frac{1 - \left(e^{-\pi t}\right)^n}{e^{\pi t} - 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in [0, +\infty[\text{ :} \\ h_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \big(\exp(-k\pi t)\ \sin(tx)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n} \exp(-k\pi t)\right) \sin(tx) = \frac{1 - \left(e^{-\pi t}\right)^n}{e^{\pi t} - 1}\ \sin(tx)\end{gathered}}$$

- Il reste alors à calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\ dt$.

Pour ce faire, on applique le théorème de convergence dominée. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- ▶ Soit $t_0 \in]0, +\infty[$. La suite **numérique** $\big(h_n(x,t_0)\big)$ est convergente, de limite :

$$\lim_{n \to +\infty} h_n(x,t_0) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1 - \left(e^{-\pi t_0}\right)^n}{e^{\pi t_0} - 1}\ \sin(t_0 x)\right) = \frac{1}{e^{\pi t_0} - 1}\ \sin(t_0 x) = h(x,t_0)$$

- ▶ La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(x\,t}{e^{\pi t} - 1}$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- ▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto h_n(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- ▶ Pour tout $t \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}|\,h_n(x,t)\,| &= \left|\frac{1 - \left(e^{-\pi t}\right)^n}{e^{\pi t} - 1}\ \sin(x\,t)\right| \\ &= \frac{\left|1 - \left(e^{-\pi t}\right)^n\right|}{\left|e^{\pi t} - 1\right|}\ |\sin(x\,t)| \\ &= \frac{1 - \left(e^{-\pi t}\right)^n}{e^{\pi t} - 1}\ |\sin(x\,t)| \\ &\leqslant \frac{|\sin(x\,t)|}{e^{\pi t} - 1}\end{aligned}$$

Or $\varphi : t \mapsto \dfrac{|\sin(x\,t)|}{e^{\pi\,t} - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***11b***.

Cette inégalité démontre au passage que la fonction $t \mapsto h_n(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} h_n(x,t)\right)\,dt = \int_0^{+\infty} h(x,t)\,dt = f(x)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt.}$$

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \exp(-n\pi\,t)\,\sin(x\,t)\right)\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi\,t)\,\sin(x\,t)\,dt\right) && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k(x)}{2} && \textit{(d'après la question } \boldsymbol{14b}\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)
\end{aligned}$$

On en conclut :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \\
&= \frac{1}{2}\,U(x) && \textit{(car la série de fonctions } \sum u_n \textit{ converge simplement sur } \mathbb{R} \textit{ d'après la question } \boldsymbol{8a}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\,U(x).}$$

Commentaire

- Les dernières questions du sujet consistent à démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\,t)}{\exp(\pi\,t) - 1}\, dt \;=\; \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cancel{2}\,x}{x^2 + \pi^2\,k^2} \;=\; \frac{1}{2}\, U(x)$$

- Pour ce faire, la technique classique consiste à faire apparaître l'intégrande sous forme d'une somme d'une série de fonctions. C'est tout l'intérêt de la question ***14a*** :

$$\frac{\sin(x\,t)}{\exp(\pi\,t) - 1} \;=\; \sin(x\,t) \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi\,t} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-n\pi\,t}\, \sin(x\,t) \right)$$

- On cherche alors à démontrer :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\,t)}{\exp(\pi\,t) - 1}\, dt \;&=\; \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi\,t}\, \sin(x\,t) \right) dt \\ &\overset{?}{=}\; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi\,t}\, \sin(x\,t)\, dt \right) \qquad \textit{(cette égalité doit être démontrée !)} \\ &=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\, u_n(x) \end{aligned}$$

  On pourrait alors vouloir utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Pour ce faire, on doit déterminer la nature de la série numérique :

$$\sum \int_0^{+\infty} \left| \mathrm{e}^{-n\pi\,t}\, \sin(x\,t) \right| dt$$

  Ce n'est pas si simple notamment car la fonction sin n'est pas de signe constant. Il n'est donc pas simple de se débarrasser et d'ainsi effectuer le calcul précis de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \mathrm{e}^{-n\pi\,t}\, \sin(x\,t) \right| dt$.
  C'est pour cela que le sujet se rabat sur l'étude du théorème de convergence dominée utilisée sur la suite partielle de fonctions.

$\square$