DS4

EXERCICE 1

On note : $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Déterminer les valeurs propres de A.

b) Déterminer les sous-espaces propres associés.

c) En déduire que A est diagonalisable et exhiber une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

(on ne demande pas de calculer P^{-1})

2. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & -4\,u_n & + & 2\,v_n & - & 2\,w_n \\ v_{n+1} & = & -6\,u_n & + & 4\,v_n & - & 6\,w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n & + & v_n & - & 3\,w_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}\,X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

EXERCICE 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

3. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

4. Démontrer que f est continue sur D.

5. Calculer la limite de f en $+\infty$.

6. Démontrer que, pour tout $x \in D$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,dt \ \leqslant\ f(x) \ \leqslant\ 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,dt$$

7. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

PROBLÈME

- Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

A. Une intégrale à paramètre

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$$

8. Démontrer que $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

9. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.

10. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.

11. En déduire que pour tout $x \in I$, $x\,F'(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) F(x) = -K$.

12. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$.
Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$:

$$G(x) = C - K \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

13. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

B. Étude de deux séries de fonctions

- Dans toute cette partie, on définit les fonctions :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$$

14. Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

15. Montrer que pour tout $x \in I$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du$$

En déduire un équivalent de f en 0.

16. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

17. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

18. En déduire un équivalent de h en 0.
Montrer alors : $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\,x^{3/2}}$.

C. Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

- À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & si\ n \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n \, \mathrm{e}^{-nx}$ converge.
- On pose $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$.
- Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim\limits_{x \to 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

19. Quel est l'ensemble I_a si A est fini ?

Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

20. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{Card}(A(n)) \, \mathrm{e}^{-nx}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n)) \, \mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$$

- Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

21. Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor \, \mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

En déduire un encadrement de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} \, \mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0.

Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

- Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitués des entiers qui sont la sommes des carrés de deux entiers naturels non nuls.
- On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.
- Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

22. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v(n) \mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) \, \mathrm{e}^{-nx} = (\, f_{A_1}(x) \,)^2$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$: $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

D. Étude de deux séries de fonctions

- Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge.
- On suppose :

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\right) = \ell \in [0,+\infty[$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0,1]$.

- On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\psi(t)|$.
- Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\ \psi(\mathrm{e}^{-nx})$$

23. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F.
Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E_1, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

- On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim\limits_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose :

$$\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$$

24. Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \|\ \|_\infty)$.

25. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0,1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$.
En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

- Pour tous a ,$b \in [0,1]$ tel que $a < b$, on note $\mathbb{1}_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1-a)[$. On note :

$$g_- : x \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & si\ x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & si\ x \in [a,1] \end{cases}$$

et

$$g_+ : x \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & si\ x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & si\ x \in [a+\varepsilon,1] \end{cases}$$

26. ***a)*** Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$.
b) Montrer alors que $\mathbb{1}_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(\mathbb{1}_{[0,a]})$.
c) En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.