DS4 - 110 points

Exercice 1 - (`CCINP 2014 MP1`) - 41 points

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, b_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.
En remarquant que, pour $k \geqslant 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\, B_k + a_n\, B_n \quad \text{(transformation d'Abel)}$$

- **1 pt :** $S_n = a_0\, b_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\, b_k = a_0\, b_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right)$
- **1 pt :** $\ldots = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k + a_n\, B_n$

Pas de point attribué si $b_k = B_k - B_{k-1}$ **utilisé au rang** 0

2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$
- **1 pt :** $\ldots \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_0$ **car** $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge.

- **0 pt :** $S_n \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, b_k \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\, B_k + a_n\, B_n$ **(rappel)**
- **1 pt : Comme** (a_n) **de limite nulle et** (B_n) **bornée,** $(a_n\, B_n)$ **converge vers** 0
- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left|(a_k - a_{k+1})\, B_k\right| \;\leqslant\; M \left(a_k - a_{k+1}\right)$
  - × **1 pt : comme** $\sum \left(a_k - a_{k+1}\right)$ **converge, alors par théorème de comparaison des SATP,** $\sum (a_k - a_{k+1})\, B_k$ **ACV.**

c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

- **1 pt : énoncé du théorème des séries alternées (**$\sum (-1)^n a_n$ **est alternée /** $(|a_n|)$ **décroissante /** $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$**)**
- **1 pt : la suite** (B_n) **est bornée car** $B_n \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \;=\; \begin{cases} 1 & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}$

3. Exemple.
Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\,\theta} \times \dfrac{1 - e^{i\,n\theta}}{1 - e^{i\,\theta}}$
- **1 pt : argument** $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\,\mathbb{Z}$ **donc** $e^{i\theta} \neq 1$
- **1 pt :** (BONUS) $\ldots = e^{i\,\frac{n+1}{2}\,\theta} \times \sin\left(\dfrac{n\,\theta}{2}\right) \times \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

- **1 pt :** $[\alpha < 0]$ $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$ **et donc** $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $[\alpha = 0]$ $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ **et donc** $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $[\alpha > 1]$ $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ **ACV (série de Riemann d'exposant** $\alpha > 1$**)**
- **3 pts :** $[\alpha \in\,]0,1]]$ $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ **et** $b_n = e^{i(n+1)\theta}$
  - × **1 pt :** (a_n) **décroissante de limite nulle**
  - × **1 pt :** $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{i\,(k+1)\,\theta} = e^{i\,\frac{n+2}{2}\,\theta} \times \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
  - × **1 pt :** $|B_n| = \dfrac{\left|\sin\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$

4. Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$ (on notera U sa somme).

- **1 pt : si** $x_0 \in 2\,\pi\,\mathbb{Z}$ **alors :** $u_n(x_0) = \dfrac{\sin(n\,x_0)}{\sqrt{n}} = 0$ **et** $\sum 0$ **CV**
- **2 pts : si** $x_0 \notin 2\,\pi\,\mathbb{Z}$
  - × **1 pt : on note** $z_n : x \mapsto \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$
  - × **1 pt :** $\sum z_n$ **CV (question précédente avec** $\alpha = \frac{1}{2}$**) donc** $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ **CV**

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n : $F_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$.
On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|F_n(z)\right| \leqslant M$ (on dira que la suite (F_n) est uniformément bornée).

a) Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 0} (a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur A.

- **1 pt : (CVS)** $\left|\big(a_n\,F_n\big)(z_0)\right| \;=\; \left|a_n\,F_n(z_0)\right| \;=\; \left|a_n\right| \times \left|F_n(z_0)\right| \;\leqslant\; M\;\left|a_n\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : (CU)** $\forall z \in A, \left|a_n\,F_n(z) - h(z)\right| \;\leqslant\; M\left|a_n\right|$
- **1 pt : (CU) donc** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $0 \;\leqslant\; \|a_n\,F_n - h\|_{\infty,A} \;\leqslant\; M\left|a_n\right|$
- **1 pt : (CU) théorème d'encadrement**
- **1 pt : (CN)** $\forall z \in A, \left|(a_n - a_{n+1})\,F_n(z)\right| \;\leqslant\; M\;\big(a_n - a_{n+1}\big)$
  donc $0 \;\leqslant\; \|(a_n - a_{n+1})\,F_n\|_{\infty,A} \;\leqslant\; M\;\big(a_n - a_{n+1}\big)$
- **1 pt : (CN) La série** $\sum\;\big(a_n - a_{n+1}\big)$ **est convergente**
- **1 pt : (CN) donc par th de comparaison des SATP,** $\sum\;\|(a_n - a_{n+1})\,F_n\|_{\infty,A}$ **CV**

b) À l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum\; a_n f_n$ converge uniformément sur A.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\;f_k \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(a_k - a_{k+1}\big)\;F_k + a_n\,F_n$
- **1 pt : la suite** $(a_n\,F_n)$ **converge uniformément sur** A **(vers la fonction** h**)**
  la série $\sum\;\big(a_n - a_{n+1}\big)\;F_n$ **converge normalement donc uniformément sur** A
- **1 pt : donc par somme, la suite** $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \big(a_k - a_{k+1}\big)\;F_k\right)$ **CU sur** A

6. Exemple.

Pour x réel et n entier naturel non nul : $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $1 - \mathrm{e}^{ix} = -2i\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}$.

- **1 pt :** $1 - \mathbf{e}^{ix} = \mathbf{e}^{i\,\frac{x}{2}}\;\left(\mathbf{e}^{-i\,\frac{x}{2}} - \mathbf{e}^{i\,\frac{x}{2}}\right) = -\mathbf{e}^{i\,\frac{x}{2}}\;\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \times 2i$

b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.
En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

- **1 pt :** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ / $f_n : x \mapsto \sin\big((n+1)\,x\big)$ / $A = [a, 2\pi - a] \subset \mathbb{C}$
- **0 pt :** (a_n) **décroissante**
- **1 pt :** $F_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin\big((k{+}1)\,x\big) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathbf{e}^{ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{i\,\frac{n+2}{2}\,x} \;\times\; \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$
- **0 pt :** $\left|F_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
- **2 pts :** $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leqslant \dfrac{1}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$ **avec explication**
- **1 pt : la fonction** U **est continue sur** $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [\frac{1}{k}, 2\pi - \frac{1}{k}] =]0, 2\pi[$

c) Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel p, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,\pi[$.

- **1 pt :** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ / $f_n : x \mapsto \sin\big((n+1)\,x\big)\ \sin\big(p\,x\big)$ / $A = [0,\pi[\subset \mathbb{C}$
- **1 pt :** $|F_n(x)| = |\sin(p\,x)| \times \left|\ \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\,\frac{n+2}{2}\,x} \times \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right|$ **avec** $x \notin 2\pi\,\mathbb{Z}$
- **1 pt :** $\ldots = \dfrac{|\sin(p\,x)|}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leqslant \dfrac{|\,p\,x\,|}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leqslant p\,\cancel{x} \times \dfrac{\pi}{\cancel{x}}$
- **1 pt : cas** $x = 0$ **:** $F_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \sin(0) \times \sin(0) = 0 \ \leqslant\ p\pi$

Exercice 2 - (CCINP 2020 PC) - 21 points

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

et de calculer sa valeur.
On considère la fonction $f : [0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[,\ f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$$

On définit également la fonction $u : [0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[,\ u(x,t) = -\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}\ \mathrm{e}^{-xt}$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

7. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt :** $\underline{f}_{x_0} : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-x_0 t}$ **est continue sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** $\underline{f}_{x_0}(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-x_0\,t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t}\ \mathrm{e}^0 = 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ **donc l'intégrale est faussement impropre en** 0
- **1 pt :** $\forall t > 0,\ |\,\underline{f}_{x_0}(t)\,| = \left|\dfrac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-x_0 t}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x_0 t}$ **et théorème de comparaison des SATP**

8. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

- **1 pt : (IPP)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ dt = \left[\ \frac{\cos(t)-1}{t}\ \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$

  `OU` $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \left[\ \frac{1-\cos(t)}{t}\ \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ dt$
- **1 pt : le crochet est convergent en $+\infty$ car** $\left|\dfrac{\cos(t)-1}{t}\right| \leqslant \dfrac{2}{t}$
- **1 pt : le crochet est convergent en 0 car** $\dfrac{\cos(t)-1}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\right| = \dfrac{|\,1-\cos(t)\,|}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ **donc par th de comp des intégrales de fonctions continues positives . . .**

9. Soit $x \geqslant 0$.
Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

- **1 pt :** $\underline{u}_{x_0} : t \mapsto \dfrac{-1}{1+{x_0}^2}\ \big(x_0\ \sin(t)+\cos(t)\big)\ \mathbf{e}^{-x_0\,t}$ **est dérivable (le dire)**
- **1 pt : calculer correctement la dérivée de** $\underline{u}_{x_0}$

Dans la suite, on définit la fonction $F : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\ dt.$

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

10. Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x>0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

- **1 pt :** $\forall t \in\ ]0,+\infty[,\ \left|\ \dfrac{\sin(t)}{t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ \right| \leqslant \mathbf{e}^{-x\,t}$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\ \frac{\sin(t)}{t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ \right|\ dt \leqslant \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-x\,t}\ dt = \frac{1}{x}$
- **1 pt : inégalité triangulaire** $0 \leqslant \left|\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ dt\ \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\ \frac{\sin(t)}{t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ \right|\ dt = \frac{1}{x}$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ **par théorème d'encadrement**

11. Soit $a>0$.
Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a,+\infty[,\ F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\ dt$$

- **1 pt :** $\underline{f}_x : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}$ **est intégrable (*7.*)**
- **1 pt : si $t>0$,** $\underline{f}_t : x \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\ \mathbf{e}^{-t\,x}$ **est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et si $x \geqslant a$:** $\underline{f}_t'(x) = -\sin(t)\ \mathbf{e}^{-t\,x}$
- **1 pt :** $\forall x \in [a,+\infty[,\ \forall t \in\ ]0,+\infty[,\ \big|-\sin(t)\ \mathbf{e}^{-x\,t}\big| = |-1|\ \ |\sin(t)|\ \ \mathbf{e}^{-x\,t} \leqslant \mathbf{e}^{-x\,t}$

- **1 pt : $\leqslant$ $\mathrm{e}^{-x\,t}$ $\leqslant$ $\mathrm{e}^{-a\,t}$ détaillé**

12. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

- **1 pt : la fonction F est dérivable sur $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [\frac{1}{k}, +\infty[\ = \ ]0,+\infty[$**
- **1 pt : $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -\sin(t)\ \mathrm{e}^{-x\,t}\ dt = -\left[\ \underline{u}_x(t)\ \right]_0^{+\infty}$**
- **1 pt : $\left(\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}\ \mathrm{e}^{-xt}\right) = 0$ par encadrement**
- **1 pt : $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2} = -\arctan'(x)$ donc $F = \alpha - \arctan$ + valeur de α par limite en 0**

Exercice 3 - (`CCINP 2018 PC` - 48 points

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P)\ =\ (X^2-1)\,P'' + 2XP'$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\ U_n^{(n)}$.

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

13. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

- **1 pt : $L_0 = 1$ `ET` $L_1 = X$**
- **1 pt : $L_2 = \dfrac{1}{2^2\times 2!}\ {U_2}^{(2)} = \dfrac{1}{8}\left(\left(X^2-1\right)^2\right)^{(2)} = \dfrac{1}{8}\left(2\ \left(X^2-1\right)\ 2X\right)' = \dfrac{4}{8}\left(\left(X^2-1\right)\ X\right)'$**
  $= \dfrac{1}{2}\left(2X\times X + \left(X^2-1\right)\times 1\right)$

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

14. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

- **1 pt : $U_n = \left(X^2-1\right)^n = X^{2n} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dbinom{n}{k}\ \left(X^2\right)^{n-k}\ (-1)^k\right) = X^{2n} + R_n$**
- **1 pt : $L_n = \dfrac{1}{2^n\,n!}\ \left(U_n\right)^{(n)} = \dfrac{1}{2^n\,n!}\ \left(X^{2n}+R_n\right)^{(n)} = \dfrac{1}{2^n\,n!}\ \left(\left(X^{2n}\right)^{(n)} + {R_n}^{(n)}\right)$**
- **1 pt : $\left(X^{2n}\right)^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{n!}\ X^n$ par dérivations successives**

  1 pt si seul le calcul de degré apparaît

15. Montrer que la famille $(L_0,\ldots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt : famille échelonnée en degrés + de bon cardinal**
- **1 pt : les polynômes de la famille sont `NON NULS`**

16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' \;=\; \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

- **1 pt :** $U_n = \left(X^2-1\right)^n = \left(X-1\right)^n \left(X+1\right)^n$ **donc** -1 **et** 1 **racines de multiplicité** n
- **1 pt : ainsi** -1 **et** 1 **sont racines de** U_n' **de multicplicité** $n-1$ **donc** U_n' **est factorisable par** $\left(X-1\right)^{n-1} \left(X+1\right)^{n-1}$
- **1 pt : le théorème de Rolle (continue sur** $[-1,1]$ **/ dérivable sur** $]-1,1[$ **/ vérifie** $U_n(-1) = U_n(1)$**) assure l'existence de** $\alpha \in]-1,1[$ **tel que** $U_n'(\alpha) = 1$
- **1 pt : finalement** $U_n{}' = (X-\alpha)\ (X-1)^{n-1}\ V_n = \lambda\,(X-\alpha)\ (X-1)^{n-1}\ (X+1)^{n-1}$

17. Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} \;=\; \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} \;=\; \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$$

- **1 pt : comme** -1 **et** 1 **racines de multiplicité** $n-k$ **de** $U_n{}^{(k)}$ **ils sont racines de** $U_n{}^{(k)}$ **de multicplicité** $n-k-1$ **donc** U_n' **est factorisable par** $\left(X-1\right)^{n-k-1} \left(X+1\right)^{n-k-1}$
- **1 pt : on note** $\alpha_0 = -1$ **et** $\alpha_{k+1} = 1$
- **1 pt : on applique Rolle sur chacun des intervalles** $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ **à** $U_n{}^{(k)}$ **(**k **intervalles qui donnent** k **nouvelles racines de** $U_n{}^{(k)}$

18. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$. On les note $x_1, \ldots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n}(X-x_k)$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

- **2 pts : toute justification convenable que la question *16* est l'initialisation et la *17* l'hérédité de la propriété** $\forall k \in [\![1,n]\!]$**,** $\mathscr{P}(k)$ **où :**

$\mathscr{P}(k)$: **il existe des réels** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ **deux à deux distincts dans** $]-1,1[$ **et un réel** μ **tels que :** $U_n{}^{(k)} \;=\; \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

19. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- **1 pt :** ϕ **est linéaire**
- **1 pt :** ϕ **est à valeurs dans** $\mathbb{R}[X]$ **(au moins le dire)**

Dans les questions 20 à 25, n désigne un entier naturel.

20. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

- **1 pt :** $\deg\left(\phi(P)\right) = \deg\left((X^2-1)\,P'' + 2X\,P'\right) \leqslant \max\left(\deg\left((X^2-1)P''\right), \deg\left(2X\,P'\right)\right)$
- **1 pt :** $\deg\left((X^2-1)P''\right) \leqslant n$ **et** $\deg\left(2X\,P'\right) \leqslant n$

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

21. On note $M = (m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

- **1 pt :** $\phi(P_0) = (X^2-1)\ P_0'' + 2X\ P_0' = (X^2-1)\times 0 + 2X \times 0 = 0 = 0\,(0+1)\cdot P_0$
- **1 pt :** $\phi(P_1) = (X^2-1)\ P_1'' + 2X\ P_1' = (X^2-1)\times 0 + 2X \times 1 = 2X = 2\,P_1 = 1\,(1+1)\cdot P_1$
- **1 pt :** $(\phi(P_k))(X) = \Big(k\,(k+1)\ P_k - k\,(k-1)P_{k-2}\Big)(X)$ **si** $k \in [\![2,n]\!]$

22. Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question 21.*

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(\phi_n) = \mathrm{Sp}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(\phi_n)\right) = \{m_{k,k} \mid k \in [\![0,n]\!]\} = \{k\,(k+1) \mid k \in [\![0,n]\!]\}$
- **1 pt : la fonction** $g : x \mapsto x(x+1)$ **est injective donc les racines** $k(k+1)$ **sont toutes distinces**

23. Vérifier : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

- **1 pt : si** $k=0$, $(X^2-1)\ U_0' - \cancel{2\times 0\,X\,U_0} = (X^2-1)\ \Big((X^2-1)^0\Big)' = (X^2-1)\ P_0' = 0_{\mathbb{R}[X]}$
- **1 pt : si** $k \geqslant 1$, $(X^2-1)\ U_k' - 2k\,X\,U_k = (X^2-1)\ \Big((X^2-1)^k\Big)' - 2k\,X\,(X^2-1)^k = \ldots = 0_{\mathbb{R}[X]}$

24. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 23, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz :

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} \ = \ 0$$

- **3 pts :**
  - **1 pt : si** $k=0$, $\Big((X^2-1)\ U_0'\Big)^{(1)} = \Big((X^2-1)\ ((X^2-1)^0)'\Big)^{(1)} = \Big((X^2-1)\ P_0'\Big)^{(1)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$
  - **1 pt : si** $k \geqslant 1$, $\Big((X^2-1)\ U_k'\Big)^{(k+1)} = \sum\limits_{j=0}^{2} \dbinom{k+1}{j} \Big((X^2-1)\Big)^{(j)}\ \Big(U_k'\Big)^{(k+1-j)}$
    $\cancel{+\sum\limits_{j=3}^{k+1} \dbinom{k+1}{j} \Big((X^2-1)\Big)^{(j)}\ \Big(U_k'\Big)^{(k+1-j)}}$
  - **1 pt :** $\ldots = (X^2-1)\ U_k{}^{(k+2)} + (k+1)\,2X\ U_k{}^{(k+1)} + k(k+1)\ U_k{}^{(k)}$
- **2 pts :**
  - **1 pt :** $\Big(2kX\,U_k\Big)^{(k+1)} = \sum\limits_{j=0}^{1} \dbinom{k+1}{j} \Big(2kX\Big)^{(j)}\ \Big(U_k\Big)^{(k+1-j)}$
  - **1 pt :** $2kX\ U_k{}^{(k+1)} + (k+1)\ 2k\ U_k{}^{(k)}$

25. Montrer que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question 24.*

- **1 pt :** $\phi_n(L_k) = (X^2-1)\ L_k'' + 2X\ L_k' = \dfrac{1}{2^k\ k!}\ \Big((X^2-1)\ U_k{}^{(k+2)} + 2X\ U_k{}^{(k+1)}\Big)$
- **1 pt :** $\ldots = \dfrac{1}{2^k\ k!}\ k(k+1)\ U_k{}^{(k)} = k(k+1)\ L_k$ **d'après la question précédente**

26. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ.

- **1 pt :** $k \in [\![0, n]\!]$ **:** $E_{k(k+1)}(\phi_n) = \text{Vect}\,(L_k)$
- **3 pts :** $\text{Sp}(\phi) = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$
  - × **1 pt :** $(\supset)$ $\phi(L_k) = \phi_k(L_k) = k(k+1)\ L_k$
  - × **2 pts :** $(\subset)$ **soit** $\lambda \in \text{Sp}(\phi)$ **alors il exsite** $P \in \mathbb{R}[X]$ **non nul tel que :** $\phi(P) = \lambda \cdot P$
    En notant $m = \deg(P)$ **:** $\phi_m(P) = \phi(P) = \lambda \cdot P$ **et** $\lambda \in \text{Sp}(\phi_m)$
- **2 pts :** $\forall k \in \mathbb{N},\ E_{k(k+1)}(\phi) = \text{Vect}\,(L_k)$
  - × **1 pt :** $(\supset)$ $E_{k(k+1)}(\phi) \supset \text{Vect}\,(L_k)$
  - × **1 pt :** $(\subset)$

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle \ = \ \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

27. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- **1 pt : l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ et est symétrique (1 pt pour la présence d'un des deux)**
- **1 pt : l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite**
- **1 pt : l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive**
- **2 pts : l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie-positive (l'application P est nulle sur $[-1, 1]$ et en déduire $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$)**

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

28. Etablir que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q \rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt$, puis que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$$

- **1 pt :** $\langle \phi(P), Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \Big(2t\,P'(t) + (t^2 - 1)\,P''(t)\Big)\,Q(t)\ dt = \int_{-1}^{1} g'(t)\,Q(t)\ dt$
- **1 pt :** $\ldots = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)\,P'(t)\,Q'(t)\ dt$ **par IPP**
- **1 pt : cette expression étant symétrique en P, Q,**
  $\langle \phi(Q), P \rangle \ = \ -\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)\,Q'(t)\,P'(t)\ dt \ = \ -\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)\,P'(t)\,Q'(t)\ dt \ = \ \langle \phi(P), Q \rangle$