
DS5

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3 \quad (E)$$

Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \quad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Justifier que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière.

Exprimer avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (a_n - a_{n-1}) x^n$$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $] -r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $] -r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $] -1, 1[$ développable en série entière.

Exercice 2

- Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
 - Pour tout $x \in E$, on note : $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.
6. Un endomorphisme u de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$$

est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

7. Étant donné un endomorphisme u de E , on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

- (i) $u \circ v = v \circ u$
 - (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle v(x), v(y) \rangle$
 - (iii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|v(x)\|$
- (on pourra par exemple, successivement prouver les implications :
(i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (iii), (iii) \Rightarrow (ii) et (ii) \Rightarrow (i))

Exercice 3

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \Delta_n = u_n - u_{n-1}$$

8. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}$.
9. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \Delta_n$ est convergente.
10. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans 10, on a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

II.1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

11. Soit $t \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geq n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$$

12. Dédurre de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$.

14. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u) du$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

16. Dédurre des résultats de la sous-partie II.1 que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$$

17. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

18. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) + nJ_n$$

19. Dédurre des questions précédentes que :

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$$