DS5

Exercice

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.
On rappele que dans ce cas $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$ où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.
Montrer qu'il existe une famille $(p_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ de projecteur non nuls de E tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k\, p_j \tag{$*$}$$

- **1 pt : pour tout j on note p_j projecteur sur E_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ \boxed{i \neq j}}}^{m} E_i$**
- **2 pts : vérification, pour tout $x \in E$, de la propriété :**
  $u^k(x) = \sum_{j=1}^{m} u^k(x_j) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k x_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j(x)$

2. **Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable.**
On suppose qu'il existe une famille $(p_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ d'endomorphismes non nul de E et que la famille de scalaires $(\lambda_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.

a) Vérifier que l'on a : $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, p_j$.

- **1 pt : notons $P(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$, alors, $P(u) = \sum_{k=0}^{r} a_k u^k = \sum_{k=0}^{r} a_k \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j\right)$**
- **1 pt : $= \sum_{j=1}^{m} \left(\left(\sum_{k=0}^{r} a_k \lambda_j^k\right) p_j\right)$ soit finalement : $P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, p_j$**

b) Montrer que u est diagonalisable.
On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

- **1 pt : considérons $P = \prod_{j=1}^{m} (X - \lambda_j)$ alors P est scindé, à racines simples et vérifie : $\forall j \in [\![1,m]\!], P(\lambda_j) = 0$**
- **1 pt : ainsi, d'après la question précédente $P(u) = 0$ (endomorphisme nul) et donc u admet un annulateur non nul donc u est diagonalisable.**

c) Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k \in [\![1m]\!], \\ k \neq j}} \dfrac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$.

(i) Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.

- **2 pts : pour tout couple $(i,j) \in [\![1,m]\!]$, on a $L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } i \neq j \\ 1 & \textbf{lorsque } i = j \end{cases}$**

(ii) Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

- **1 pt : soit** $(a_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$**. Supposons que** $\sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j = 0_{\mathbb{R}[X]}$
- **1 pt : pour tout** $k \in [\![1,m]\!]$, $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j\right)(\lambda_k) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j(\lambda_k) = a_k = 0$**, et la famille** $\mathscr{B}$ **est libre**
- **1 pt : de plus** $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = m = \dim(\mathbb{C}_{m-1}[X])$

(iii) Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt : il existe une unique famille de scalaires** $(a_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ **tels que** $P = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j$
- **1 pt : pour tout** $k \in [\![1,m]\!], P(\lambda_k) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j(\lambda_k) = a_k$

d) Prouver que l'on a : $\forall j \in [\![1,m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.

- **1 pt : d'après *2.a)*,** $L_j(u) = \sum\limits_{k=1}^{m} L_j(\lambda_k)\, p_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \delta_{j,k}\, p_k = p_j$

e) Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

- **1 pt : comme** u **est annulé par** $P = \prod\limits_{j=1}^{m}(X-\lambda_j)$**, on a déjà :** $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$
- **0 pt : pour tout** $j_0 \in [\![1,m]\!]$**, comme** $p_{j_0} \neq 0$**, il existe au moins** $x \in E$ **tel que** $p_{j_0}(x) \neq 0$
- **1 pt :** $u(p_{j_0}(x)) = (u \circ L_{j_0}(u))(x) = L_{j_0}(u)(u(x)) = p_{j_0}\big(u(x)\big) = p_{j_0}\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j p_j(x)\right)$
- **1 pt :** $\ldots = \sum\limits_{j=1}^{m} (\lambda_j (p_{j_0} \circ p_j))(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j (L_{j_0} L_j)(u)(x)$
- **1 pt : si** $j \neq j_0, L_{j_0} L_j$ **a pour racines** $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ **et donc,** $(L_{j_0} L_j)(u) = 0$**.**
  Sinon, $L_{j_0} L_{j_0} = L_{j_0}$**.**

  Donc, $u(p_{j_0}(x)) = \lambda_{j_0} p_{j_0}(x)$

Problème

Notations :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $[\![0,n]\!]$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}; 0 \leqslant p \leqslant n\}$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Pour tout entier $n, \mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.
- Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note encore P la fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'un polynôme P est dit unitaire si le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

Objectifs : on se propose d'étudier une famille de polynômes et leurs racines. Dans une première partie, on introduit une famille de polynômes (P_n) vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. L'objet de la seconde partie est l'étude, dans un cas particulier, d'une famille de polynômes orthogonaux. Enfin, dans la dernière partie, on étudie les valeurs propres d'une matrice pour démontrer une propriété des racines de ces polynômes.

Partie I : Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, on pose :
$$A(X) = X^2 - 1 \quad , \quad B(X) = 2X$$

1. **Une application linéaire**

On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par :
$$\Phi(P) = AP'' + BP'$$

a) Montrer que, pour tout entier n, la restriction, notée Φ_n de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$, définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt : linéarité de Φ**
- **1 pt :** $\deg\Big(AP'' + BP'\Big) \leqslant \max\Big(\deg(AP''), \deg(BP')\Big)$
- **1 pt :** $\deg\Big(AP'' + BP'\Big) \leqslant \max\Big(\deg(A) + \deg(P''), \deg(B) + \deg(0P')\Big)$

b) Montrer brièvement que :
$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Vérifier que $\langle XP, Q\rangle = \langle P, XQ\rangle$.

- **1 pt : $\langle ., .\rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et symétrique**
- **1 pt : $\langle ., .\rangle$ linéaire par rapport à la seconde variable**
- **1 pt : pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2\ dt \geqslant 0$**
- **2 pts : si cette quantité est nulle alors P^2 est nul sur $[-1, 1]$ (positif, continu, d'intégrale nulle) et donc $P = 0$ (polynôme avec une infinité de racines)**
- **1 pt : $\langle XP, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)\ dt = \langle P, XQ\rangle$**

2. **Une base de vecteurs propres**

a) Soient P et Q deux polynômes. Déterminer deux polynômes U et V tels que :
$$\langle \Phi(P), Q\rangle - \langle P, \Phi(Q)\rangle = \int_{-1}^{1} \big(A(t)U(t) + A'(t)V(t)\big)\ dt$$

- **2 pts : comme $B = A'$: $\langle \Phi(P), Q\rangle - \langle P, \Phi(Q)\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big((P''Q - PQ'')A + (P'Q - PQ')A'\big)$**
- **0 pt : comme $(P''Q - PQ'')A + (P'Q - PQ')A'$ est la dérivée de $(P'Q - PQ')A$ alors** $\langle \Phi(P), Q\rangle - \langle P, \Phi(Q)\rangle = \big[\ (P'Q - PQ')A\ \big]_{-1}^{1} = 0$

b) Ecrire la matrice de $\Phi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique $\{1, X, \cdots, X^n\}$ et en déduire les valeurs propres de Φ_n.

- **2 pts :** $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$
- **1 pt : comme cette matrice est triangulaire** $\mathrm{Sp}(\Phi(n)) = \{k(k+1)/\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$

c) Montrer qu'il existe une base $(P_0, \cdots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ_n unitaires tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

- **1 pt : Φ_n possède $n+1$ valeurs propres distinctes et est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$.**
  Donc les sep sont tous de dimension 1
- **1 pt : Φ_{k+1} possède une valeur propre de plus que Φ_k. Il y a donc un vecteur propre de Φ_{k+1} qui n'est pas vecteur propre de Φ_k et qui est donc de degré $k+1$**
- **1 pt : un multiple d'un vecteur propre étant encore propre, on peut se ramener au cas d'un polynôme unitaire**

d) Montrer que si $i \neq k$ alors $\langle P_i, P_k \rangle = 0$. En déduire que P_n est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- **2 pts : $\langle \Phi(P_i), P_k \rangle = \langle P_i, \Phi(P_k) \rangle$ et donc $\lambda_i \langle P_i, P_k \rangle = \lambda_k \langle P_i, P_k \rangle$ et comme $\lambda_i \neq \lambda_k$, $\langle P_i, P_k \rangle = 0$**
- **1 pt : en particulier pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est dans l'orthogonal de $\mathrm{Vect}\,(P_0, \ldots, P_{k-1}) = \mathbb{R}_k[X]$**

e) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3, puis déterminer leurs racines.

- **1 pt : $P_0 = 1$, $P_1 = X$**
- **2 pt : $P_2 = X^2 - \frac{1}{3} = (X - \frac{1}{\sqrt{3}})(X + \frac{1}{\sqrt{3}})$**
- **2 pt : $P_3 = X(X^2 - \frac{3}{5}) = X(X - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})(X + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$**

Partie II : Étude des racines de ces polynômes

3. **Une relation de récurrence**

Soit $n \geqslant 2$ un entier.
Justifier l'existence d'un réel λ_n tel que :

$$P_n - XP_{n-1} + \lambda_n P_{n-1} = S_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X].$$

- **1 pt : P_n est unitaire de degré n, P_{n-1} est unitaire de degré n donc XP_{n-1} est unitaire de degré n et $P_n - XP_{n-1}$ est de degré au plus $n-1$**
- **1 pt : en prenant pour λ_n l'opposé du coefficient du terme de degré $n-1$, on obtient le résultat**

4. **Dans cette question, on suppose $n \geqslant 3$**

En calculant $\langle XP_{n-1}, P_k \rangle$, pour tout polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ (avec $k \leqslant n-3$), montrer que $\langle S_n, P_k \rangle = 0$.

- **1 pt : $\langle XP_{n-1}, P_k \rangle = \langle P_{n-1}, XP_k \rangle = 0$ car $XP_k \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et est donc orthogonal à P_{n-1}**
- **1 pt : $\langle S_n, P_k \rangle = \langle P_n, P_k \rangle - \langle XP_{n-1}, P_k \rangle + \lambda_n \langle P_{n-1}, P_k \rangle = \langle P_n, P_k \rangle = 0$**

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\mu_n > 0$, tels que :

$$P_n = (X - \lambda_n)\, P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}.$$

Calculer de façon directe $\lambda_2, \mu_2, \lambda_3$ et μ_3.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

6. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{-1}^{1} P_k(t)\ dt = 0$$

En déduire que P_k admet au moins une racine d'ordre impair dans $]-1,1[$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

7. Soient $x_1, \cdots, x_k$, les racines distinctes d'ordre impair de P_n dans $]-1,1[$ et soit Q le polynôme $\prod_{1}^{k}(X - x_i)$. En considérant $Q \cdot P_n$, montrer que P_n a n racines simples dans $]-1,1[$ (on pourra raisonner par l'absurde et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_n(t)\ dt$ en supposant $k < n$).

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

Partie III : Étude d'une matrice

8. **Étude d'un déterminant**

Pour tout entier $n > 0$, on considère la matrice :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\mu_2} & \lambda_2 & \sqrt{\mu_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_3} & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \sqrt{\mu_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\mu_n} & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

a) On pose $Q_0(X) = 1$ et, pour tout entier $n > 0, Q_n(X) = \det(XI_n - M_n)$. Calculer $Q_1(X)$. Exprimer $Q_n(X)$ en fonction de $Q_{n-1}(X)$ et de $Q_{n-2}(X)$ pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

- **1 pt :** $Q_1(X) = X$
- **1 pt :** $Q_2(X) = X(X - \lambda_2) - \mu_2 = (X - \lambda_2)Q_1(X) - \mu_2 Q_0(X)$
- **2 pts :** $Q_3(X) = (X - \lambda_3)Q_2(X) + \sqrt{\mu_3}(-\sqrt{\mu_3}X) = (X - \lambda_3)Q_2(X) - \mu_3 Q_1(X)$

b) Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 3$, une relation entre $Q_n(X), Q_{n-1}(X)$ et $Q_{n-2}(X)$.

- **1 pt : en développant par rapport à la dernière colonne dans** $Q_n(X)$**,** $Q_n(X) = (X - \lambda_n)Q_{n-1}(X) + \sqrt{\mu_n}\Delta_{n-1}(X)$
- **1 pt : où** $\Delta_{n-1}(X)$ **est un déterminant de taille** $n-1$ **que l'on développe par rapport à sa dernière ligne pour obtenir** $Q_n(X) = (X - \lambda_n)Q_{n-1}(X) - \mu_n Q_{n-2}(X)$

c) En déduire que toutes les racines de P_n sont réelles (résultat déjà démontré en ***7***).

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

9. **Valeurs propres de M_n**

On considère M_n comme la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel (noté $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$), dans la base canonique. On note $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \alpha_n$, les valeurs propres de M_n et $(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de M_n, tels que $u(e_i) = \alpha_i e_i$.

a) Soit F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_1, e_2, \cdots, e_i)$. Montrer que sur la sphère unité de F_i, l'application $x \mapsto \langle u(x) \mid x \rangle$ atteint un maximum et le calculer.

- **1 pt : soit $x \in F_i$. On peut l'écrire $x = \sum\limits_{k=1}^{i} x_k e_k$ et come (e_k) est une BON** $(u(x)|x) = \sum\limits_{k=1}^{i} \alpha_k x_k^2 \leqslant \alpha_i \sum\limits_{k=1}^{i} x_k^2 = \alpha_i \|x\|^2$
- **1 pt : avec égalité pour $x = e_i$. Ainsi :** $\max_{x \in F_i, \|x\|=1} (u(x)|x) = \alpha_i$

b) Soit G_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_i, \cdots, e_n)$. Montrer que sur la sphère unité de G_i, l'application $x \mapsto \langle u(x) \mid x \rangle$ atteint un minimum que l'on calculera.

- **1 pt : soit $x \in F_i$. On peut l'écrire $x = \sum\limits_{k=1}^{i} x_k e_k$ et comme (e_k) est une BON :** $(u(x)|x) = \sum\limits_{k=1}^{i} \alpha_k x_k^2 \leqslant \alpha_i \sum\limits_{k=1}^{i} x_k^2 = \alpha_i \|x\|^2$
- **1 pt : avec égalité pour $x = e_i$. Ainsi :** $\max_{x \in F_i, \|x\|=1} (u(x)|x) = \alpha_i$

10. **Une expression des valeurs propres**

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension i. Montrer que $G_i \cap F \neq \{0\}_{\mathbb{R}^n}$ et que si $x \in G_i \cap F$ vérifie $\|x\| = 1$, alors $\langle u(x) \mid x \rangle \geqslant \alpha_i$. En déduire que :

$$\alpha_i = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ dim(F) = i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} \langle u(x) \mid x \rangle \right\}.$$

- **1 pt :** $\dim(F \cap G_i) = \dim(F) + \dim(G_i) - \dim(F + G_i) = n + 1 - \dim(F + G_i) \geqslant 1$ **donc** $F \cap G_i \neq \{0\}$
- **1 pt : d'après la question précédente $(u(x)|x) \geqslant \alpha_i$ pour x unitaire dans G et donc a fortiori dans $G \cap F_i$. Comme il existe un tel x (puisque $F \cap G_i$ contient une droite) :** $\max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \geqslant \alpha_i$
- **1 pt : comme ceci est vrai pour tout sous-espace F de dimension i (la borne inférieure est le plus grand des minorants et α_i est un minorant) :** $\alpha_i \leqslant \inf_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \right\}$

11. Une démonstration analogue montre, ce que l'on admettra, que :

$$\alpha_i = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ dim(F) = n+1-i}} \left\{ \min_{x \in F, \|x\|=1} \langle u(x) \mid x \rangle \right\}.$$

a) On note $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_{n-2} \leqslant \beta_{n-1}$ les valeurs propres de M_{n-1}. En utilisant ce qui précède, montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, on a $\beta_i \geqslant \alpha_i$ et $\alpha_{i+1} \geqslant \beta_i$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

b) En déduire que :

$$\alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \beta_{n-1} \leqslant \alpha_n$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

c) Soit n un entier strictement positif. On sait que P_n admet n racines distinctes $(x_1, \cdots, x_n)$ rangées par ordre croissant dans l'intervalle $]-1, 1[$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, le polynôme P_{n-1} admet une racine dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**