DS5

Exercice

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.
On rappele que dans ce cas $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$ où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.
Montrer qu'il existe une famille $(p_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ de projecteur non nuls de E tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k\, p_j \qquad (*)$$

- **1 pt : pour tout j on note p_j projecteur sur E_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ \boxed{i \neq j}}}^{m} E_i$**
- **2 pts : vérification, pour tout $x \in E$, de la propriété :**
  $u^k(x) = \sum_{j=1}^{m} u^k(x_j) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k x_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j(x)$

2. **Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable.**
On suppose qu'il existe une famille $(p_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ d'endomorphismes non nul de E et que la famille de scalaires $(\lambda_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.

a) Vérifier que l'on a : $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, p_j$.

- **1 pt : notons $P(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$, alors, $P(u) = \sum_{k=0}^{r} a_k u^k = \sum_{k=0}^{r} a_k \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j\right)$**
- **1 pt : $= \sum_{j=1}^{m} \left(\left(\sum_{k=0}^{r} a_k \lambda_j^k\right) p_j\right)$ soit finalement : $P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, p_j$**

b) Montrer que u est diagonalisable.
On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

- **1 pt : considérons $P = \prod_{j=1}^{m} (X - \lambda_j)$ alors P est scindé, à racines simples et vérifie :** $\forall j \in [\![1,m]\!], P(\lambda_j) = 0$
- **1 pt : ainsi, d'après la question précédente $P(u) = 0$ (endomorphisme nul) et donc u admet un annulateur non nul donc u est diagonalisable.**

c) Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k \in [\![1m]\!], \\ k \neq j}} \dfrac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$.

(i) Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.

- **2 pts : pour tout couple $(i,j) \in [\![1,m]\!]$, on a $L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } i \neq j \\ 1 & \textbf{lorsque } i = j \end{cases}$**

(ii) Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

- **1 pt : soit** $(a_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$**. Supposons que** $\sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j = 0_{\mathbb{R}[X]}$
- **1 pt : pour tout** $k \in [\![1,m]\!]$, $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j\right)(\lambda_k) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j(\lambda_k) = a_k = 0$**, et la famille** $\mathscr{B}$ **est libre**
- **1 pt : de plus** $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = m = \dim(\mathbb{C}_{m-1}[X])$

(iii) Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt : il existe une unique famille de scalaires** $(a_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ **tels que** $P = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j$
- **1 pt : pour tout** $k \in [\![1,m]\!], P(\lambda_k) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j L_j(\lambda_k) = a_k$

d) Prouver que l'on a : $\forall j \in [\![1,m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.

- **1 pt : d'après *2.a)*,** $L_j(u) = \sum\limits_{k=1}^{m} L_j(\lambda_k)\, p_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \delta_{j,k}\, p_k = p_j$

e) Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

- **1 pt : comme** u **est annulé par** $P = \prod\limits_{j=1}^{m} (X - \lambda_j)$**, on a déjà :** $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$
- **0 pt : pour tout** $j_0 \in [\![1,m]\!]$**, comme** $p_{j_0} \neq 0$**, il existe au moins** $x \in E$ **tel que** $p_{j_0}(x) \neq 0$
- **1 pt :** $u(p_{j_0}(x)) = (u \circ L_{j_0}(u))(x) = L_{j_0}(u)(u(x)) = p_{j_0}\big(u(x)\big) = p_{j_0}\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j p_j(x)\right)$
- **1 pt :** $\ldots = \sum\limits_{j=1}^{m} (\lambda_j (p_{j_0} \circ p_j))(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j (L_{j_0} L_j)(u)(x)$
- **1 pt : si** $j \neq j_0, L_{j_0} L_j$ **a pour racines** $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ **et donc,** $(L_{j_0} L_j)(u) = 0$**.**
  Sinon, $L_{j_0} L_{j_0} = L_{j_0}$**.**

  Donc, $u(p_{j_0}(x)) = \lambda_{j_0} p_{j_0}(x)$

Problème

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on appelle fonction polynomiale sur I toute fonction de la forme $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

I. Résultats préliminaires

I.1. Étude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.

- **1 pt : Soit $x_0 > 0$. La fonction $f_{x_0} : t \mapsto t^{x_0-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$**
- **1 pt : intégrabilité en 0 ($f_{x_0}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x_0}}$ et $1 - x_0 < 1$)**
- **1 pt : intégrabilité en $+\infty$ ($f_{x_0}(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$)**
- **1 pt : f_{x_0} est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_{x_0}(t) > 0$. Ainsi : $\Gamma(x_0) > 0$**

2. À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

- **3 pts :**
  - $\times$ **1 pt : sous réserve de convergence, par IPP**
  - $\times$ **1 pt : $\Gamma(x+1) \;=\; \Big[\ t^x\,\mathrm{e}^{-t}\ \Big]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$**
  - $\times$ **1 pt : le crochet vaut 0 + convergence**

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

- **1 pt : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\Gamma\big((n+\alpha+1)+1\big)}{(n+1)\,\Gamma(n+\alpha)} = \dfrac{(n+\alpha+1)\,\cancel{\Gamma(n+\alpha+1)}}{(n+1)\,\cancel{\Gamma(n+\alpha+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$**
- **1 pt : $R = \dfrac{1}{1}$ par critère de d'Alembert**

4. Montrer :
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in \,]-R, R[$$

On pourra effectuer une permutation des symboles $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}$, que l'on justifiera soigneusement.

- **1 pt : la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{t^{n+\alpha}\,x^n\,\mathrm{e}^{-t}}{n!}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question *1***
- **1 pt : la série $\sum f_n(t_0)$ est convergente car la série $\sum \dfrac{(x\,t_0)^n}{n!}$ est convergente en tant que série exponentielle de paramètre $x\,t_0$ et :**
$$f(t) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \;=\; t^\alpha\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{xt} \;=\; t^\alpha\,\mathrm{e}^{(x-1)\,t}$$
- **0 pt : la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$**
- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{|x|^n}{n!}\,\Gamma(n+\alpha+1) = a_n\,|x|^n$.**
Or, d'après la question précédente, comme $x \in \,]-1, 1[$, la série $\sum\ a_n\,|x|^n$ est convergente
- **1 pt : par théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, avec le changement de variable $\boxed{u = (1-x)\,t}$:**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n \;=\; \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} t^\alpha\,\mathrm{e}^{(x-1)\,t}\,dt \;=\; \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^\alpha\,\mathrm{e}^{-u}\,du \;=\; \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$$

I.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

5. Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

- **1 pt : comme F est de dimension finie : $E = F \oplus F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$.**
  La projection orthogonale π_F sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E.

6. Montrer que $\pi_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i$.

- **1 pt : Soit $x \in E$. Comme $E = F \oplus F^\perp$, alors il existe $(y, z) \in F \times F^\perp$ tel que : $x = y + z$.**
  De plus, comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON, alors : $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle \cdot e_i$.
- **1 pt : Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle + \cancel{\langle z, e_i\rangle} = \langle y, e_i\rangle$. Donc : $\pi_F(x) = y = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i$.**

7. Montrer enfin que

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$$

- **1 pt : $\|x\|^2 = \|(x - \pi_F(x)) + \pi_F(x)\|^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x)\|^2$ par théorème de Pythagore car $\pi_F(x) \in F$ est orthogonal à $x - \pi_F(x) \in F^\perp$**
- **1 pt : d'après la question précédente**

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 \;=\; \|x\|^2 - \|\pi_F(x)\|^2 \;=\; \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$$

II. Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} f(x)^2\, dx$ est convergente.

8. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

- **1 pt : il suffit de remarquer $\big(|a| - |b|\big)^2 \geqslant 0$**

9. En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} f(x) g(x)\, dx$ est convergente.

- **1 pt : la fonction $x \mapsto x^\alpha\, \mathrm{e}^{-x}\, f(x)\, g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est le produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$**
- **1 pt : pour tout $x > 0$, d'après la question précédente :**

$$0 \;\leqslant\; \left|x^\alpha\, \mathrm{e}^{-x}\, f(x)\, g(x)\right| \;\leqslant\; x^\alpha\, \mathrm{e}^{-x}\, \frac{\big(f(x)\big)^2 + \big(g(x)\big)^2}{2}$$

- **1 pt : comme $(f, g) \in E_\alpha^2$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\, \mathrm{e}^{-x} \big(f(x)\big)^2\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\, \mathrm{e}^{-x} \big(g(x)\big)^2\, dx$ sont convergentes. On conclut par théorème de comparaison**

10. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^($[0,+\infty[,\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

- **1 pt : $E_\alpha \subset C^0\big([0,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ par définition de E_α**
- **1 pt : $E_\alpha \neq \varnothing$. En effet, la fonction nulle appartient à E_α car...**
- **2 pts : stabilité de E_α par combinaison linéaire**
  - × **1 pt : la fonction $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car elle est la combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$**
  - × **1 pt : pour tout $x > 0$:**

$$x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x}\,\big((\lambda\cdot f+\mu\cdot g)(x)\big)^2 \;=\; \lambda^2\,x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x}\,\big(f(x)\big)^2 + 2\lambda\mu\,x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x}\,f(x)\,g(x) + \mu^2\,x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x}\,\big(g(x)\big)^2$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x}\,\big((\lambda\cdot f+\mu\cdot g)(x)\big)^2\,dx$ est convergente car elle est la combinaison linéaire d'intégrales convergentes. Et on conlut grâce à la linéarité de l'intégrale

11. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$ est élément de E_α.

- **1 pt : Soit f une fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$. Alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt : comme la fonction f^2 est encore polynomiale, alors il existe $d\in\mathbb{N}$ et $(a_0,\dots,a_d)\in\mathbb{R}^{d+1}$ tels que : $\big(f(x)\big)^2 = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\,x^k$**
- **1 pt : pour tout $x>0$, $x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x}\big(f(x)\big)^2 = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\,x^{\alpha+k}\,\mathbf{e}^{-x}$**

  Or, pour tout $k\in[\![0,d]\!]$, d'après *1*, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{(\alpha+1+k)-1}\,\mathbf{e}^{-x}\,dx$ est convergente.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x}\,\big(f(x)\big)^2\,dx$ est convergente car elle est la combinaison linéaire d'intégrales convergentes

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions

$$\varphi_n : \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}$$

et

$$\psi_n : \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{-\alpha}\mathrm{e}^{x}\varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

- **1 pt : $\psi_0 : x \mapsto x^{-\alpha}\,\mathbf{e}^{x}\,\varphi_0^{(0)}(x) = x^{-\alpha}\,\mathbf{e}^{x}\,x^{\alpha}\,\mathbf{e}^{-x} = 1$**
- **1 pt : $\varphi_1' : x \mapsto (\alpha+1)\,x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x} - x^{\alpha+1}\,\mathbf{e}^{-x}$.**
  Donc : $\psi_1 : x \mapsto (\alpha+1) - x$
- **1 pt : $\varphi_2'' : x \mapsto (\alpha+2)\,(\alpha+1)\,x^\alpha\,\mathbf{e}^{-x} - 2\,(\alpha+2)\,x^{\alpha+1}\,\mathbf{e}^{-x} + x^{\alpha+2}\,\mathbf{e}^{-x}$.**
  Donc : $\psi_2 : x \mapsto (\alpha+2)\,(\alpha+1) - 2\,(\alpha+2)\,x + x^2$

13. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

- **1 pt : on note $g_a : x \mapsto x^a$. Alors g_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par récurrence immédiate :**

$$\forall k\in\mathbb{N},\;\; g_a^{(k)} : x \mapsto \Big(\prod_{i=0}^{k-1}(a-i)\Big)\,x^{a-k}$$

- **1 pt : on note $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. Alors h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :**

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ h^{(k)} : x \mapsto (-1)^k\,\mathrm{e}^{-x}$$

- **1 pt : par formule de Leibniz, pour tout $x > 0$:**

$$\varphi_n^{(n)}(x) \ = \ (g_{n+\alpha} \times h)^{(n)}(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, g_{n+k}^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x)$$

- **1 pt : $\psi_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right) x^{n-k}$**
On en déduit que ψ_n est polynomiale sur $\mathbb{R}_+^*$. Son degré est n et son coefficient dominant est $(-1)^n$

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty\,[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} f(x)g(x)dx$$

14. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

- **1 pt : l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est bien définie sur E_α^2 d'après *9*, et est symétrique**
- **1 pt : l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est linéaire à droite par linéarité de l'intégrale**
- **1 pt : l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est positive par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant)**
- **1 pt : l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est définie positive car l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si cette fonction est identiquement nulle**

Dans la suite, on note $\|\cdot\|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^\alpha f(x)^2 dx\right)^{1/2} \quad \text{pour tout } f \in E_\alpha$$

15. Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \to 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)$$

- **1 pt : d'après les calculs de la question *13*, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $x > 0$:**

$$\varphi_n^{(k)}(x) \ = \ \sum_{i=0}^{k}\left(\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j) \times x^{n+\alpha-i}\,\mathrm{e}^{-x}\right)$$

- **1 pt : pour tout $i \in [\![0, k]\!]$: $n + \alpha - i \geqslant \alpha + 1 \geqslant 0$ (car $k \leqslant n-1$). Donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^{n+\alpha-i} = 0$.**
D'où : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_n^{(k)}(x) = 0$
- **1 pt : pour les mêmes raisons qu'au point précédent**

$$\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}} \ = \ \sum_{i=0}^{k}\left(\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j) \times x^{n+\alpha-i}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

16. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x)\ dx$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

- **3 pts : démontrer par récurrence :** $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ **où :**

$$\mathscr{P}(k) \ : \ \langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\, \varphi_n^{(n-k)}(x)\ dx$$

  × **1 pt : initialisation**

  × **2 pts : hérédité**

- **1 pt : si** $m \neq n$**, on peut supposer sans perte de généralité** $m < n$**. Comme** ψ_m **est polynomiale de degré** $m < n$ **d'après** ***13*** **:**

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle \ = \ (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\, \varphi_n(x)\ dx \ = \ (-1)^n \int_0^{+\infty} 0 \times \varphi_n(x)\ dx \ = \ 0$$

17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n!\ \Gamma(n + \alpha + 1)$ (la fonction Γ a été définie dans la partie I).

- **1 pt : d'après** ***13*****, la fonction** ψ_n **est polynomiale de degré** n **et de coefficient dominant** $(-1)^n$ **ainsi :** $\forall x > 0$, $\psi_n^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!$
- **1 pt : on obtient :**

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 \ = \ (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\, \varphi_n(x)\, dx \ = \ (-1)^n \int_0^{+\infty} (-1)^n\, n!\, x^{n+\alpha}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx \ = \ n!\, \Gamma(n+\alpha+1)$$

III. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-kx},$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier). Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

18. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.

- **1 pt : comme en question** ***16*****, on obtient par récurrence :**

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \langle \psi_n, f_k \rangle \ = \ k^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x)\, \mathrm{e}^{-kx}\ dx$$

- **1 pt : pour** $i = n$**, avec le changement de variable** $\boxed{u = (k+1)\,x}$ **:**

$$\langle \psi_n, f_k \rangle \ = \ k^n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} \mathrm{e}^{-(k+1)\,x}\ dx \ = \ \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n\ \Gamma(n+\alpha+1)$$

- **1 pt : d'après** ***17*** **:**

$$\frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \ = \ \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \ = \ \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \times a_n$$

- **1 pt : d'après *3* et *4*, comme** $\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^2 \in]-1,1[$**, alors la série** $\sum \dfrac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ **est convergente et :**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^{\alpha+1}} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}$$

19. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- **1 pt : l'ensemble** V_N **est un sev de dimension finie de** E_α **et** $\left(\dfrac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\right)_{n\in[\![0,N]\!]}$ **en est une BON. On peut donc appliquer *7* :**

$$\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \langle f_k, \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\rangle^2 = \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$$

- **1 pt :** $\|f_k\|^2 = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}$ **(avec le changement de variable** $\boxed{u=(2k+1)\,x}$**)**
- **1 pt : on obtient avec la question précédente :**

$$\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = 0$$

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.

- **1 pt : d'après la question précédente, pour tout** $k \in N$**,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha = 0$**.**
Pour tout $\varepsilon > 0$ **il existe alors** $N_0 \in \mathbb{N}$ **tel que :**

$$\forall N \geqslant N_0,\ \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leqslant \varepsilon$$

- **1 pt : en particulier, pour** $N = N_0$**, on obtient :** $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leqslant \varepsilon$**. Or** $V_N \subset \mathcal{P}$ **et** $\pi_N(f_k) \in V_N$**. la fonction** $p = \pi_N(f_k)$ **répond donc aux contraintes de l'énoncé.**

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

21. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\|_\alpha \leqslant \varepsilon$$

On pourra utiliser la fonction :

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) \text{ si } t \in]0,1] \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat admis suivant : si $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$.

- **1 pt :** g **est continue sur** $[0,1]$ **(**g **est continue en** 0 **car, d'après l'énoncé :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$**).**
Ainsi, d'après le théorème admis, il existe $p : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k t^k$ **telle que :**

$$\forall t \in [0,1],\ \big|g(t) - p(t)\big| \leqslant \varepsilon$$

- **1 pt : on en déduit, pour tout $x > 0$, puisque $\mathbf{e}^{-x} \in \,]0,1]$:**

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, f_k(x)\right| \;=\; \left|f\big(-\ln(\mathbf{e}^{-x})\big) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, (\mathbf{e}^{-x})^k\right| \;=\; \left|g(\mathbf{e}^{-x}) - p(\mathbf{e}^{-x})\right| \;\leqslant\; \varepsilon$$

- **1 pt : on obtient :**

$$0 \;\leqslant\; x^\alpha\, \mathbf{e}^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, f_k(x)\right)^2 \;\leqslant\; x^\alpha\, \mathbf{e}^{-x}\, \varepsilon^2$$

D'où, par positivité de l'intégrale (convergente) :

$$0 \;\leqslant\; \|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot f_k\|_\alpha^2 \;\leqslant\; \int_0^{+\infty} x^\alpha\, \mathbf{e}^{-x}\, \varepsilon^2 \;=\; \varepsilon^2\, \Gamma(\alpha+1)$$

- **0 pt : en remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}$, on obtient le résultat voulu**

22. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.

- **1 pt : d'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :**

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot f_k\|_\alpha \;\leqslant\; \varepsilon$$

De plus, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, d'après *20*, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que : $\|f_k - p_k\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.

- **1 pt : la fonction $p = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot p_k$ convient. En effet, par inégalité triangulaire :**

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot p_k\|_\alpha \;\leqslant\; \|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda \cdot f_k\|_\alpha + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|\, \|f_k - p_k\|_\alpha \;\leqslant\; \left(1 + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|\right) \varepsilon$$

(quitte à remplacer ε par $\dfrac{\varepsilon}{1 + \sum\limits_{k=0}^{n} |\lambda_k|}$)

23. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A] (A > 0)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2\, dx \leqslant \varepsilon$$

On pourra appliquer le résultat de la question *22* à la fonction $f : [0, +\infty[\,\to \mathbb{R}, x \mapsto h(\sqrt{x})\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ et à un α bien choisi.

On peut montrer que le résultat de la question 23 est en réalité valable pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite nulle en $+\infty$ (car elle est nulle en dehors de $[-A, A]$).**
Ainsi, d'après *22*, pour tout $\alpha > -1$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que : $\|f - p\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.
- **2 pts : on calcule :**

$$\begin{aligned}
\|f - p\|_\alpha^2 \;&=\; \int_0^{+\infty} x^\alpha\, \mathbf{e}^{-x}\, \big(f(x) - p(x)\big)^2\, dx \\
&=\; \int_0^{+\infty} x^\alpha\, \big(f(x)\, \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}} - p(x)\, \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}\big)^2\, dx \\
&=\; \int_0^{+\infty} x^\alpha\, \big(h(\sqrt{x}) - p(x)\, \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}\big)^2\, dx \\
&=\; \int_0^{+\infty} t^{2\alpha}\, \big(h(t) - p(t^2)\, \mathbf{e}^{-\frac{t^2}{2}}\big)^2\, 2t\, dt
\end{aligned}$$

- **1 pt : on choisit $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, la fonction p correspondant à cette valeur de α et on note $q : t \mapsto p(t^2)$ qui une fonction polynomiale paire. Alors, par parité de $t \mapsto h(t) - q(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$:**

$$\begin{aligned}
\|f-p\|_{-\frac{1}{2}} &= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha}\left(h(t)-p(t^2)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right)^2 2t\ dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} \left(h(t)-q(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right)^2\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(t)-q(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2\ dx
\end{aligned}$$

D'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(t)-q(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2\ dx \leqslant \varepsilon$