DS5 / 103

EXERCICE 1
Étude d'un endomorphisme matriciel / 33

Partie I - Généralités

1. Montrer pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

- **1 pt :** $\varphi_A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = A\,\big(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2\big) = \lambda_1 AM_1 + \lambda_2 AM_2 = \lambda_1\varphi_A(M_1) + \lambda_2\varphi_A(M_2)$
- **1 pt : caractère endo** $\varphi(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})) \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$

2. Montrer pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ que $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

- **1 pt :** $\varphi_A \circ \varphi_B(M) = \varphi_A(\varphi_B(M)) = \varphi_A(BM) = A(BM) = (AB)M = \varphi_{AB}(M)$

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible. Indication : si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

- **1 pt :** ($\Rightarrow$) **si** $\varphi_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ **est un isom, on note** $B = \varphi_A^{-1}(I_n)$**. Alors** $\varphi_A(B) = I_n$ **donc** $AB = I_n$ **donc** A **inversible d'inverse** B
- **1 pt :** ($\Leftarrow$) **si** A **inversible,** $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ **et donc** φ_A **est un isomorphisme**

Partie II - Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On considère un nombre $a \in \mathbb{C}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

- **0 pt :** $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 0 & X-a \end{vmatrix} = (X-1)(X-a)$
- **1 pt : si** $a \neq 1$**, alors** A **possède exactement deux valeurs propres distinctes (à savoir** a **et 1), et puisque** $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$**,** A **est diagonalisable**
- **1 pt : si** $a = 1$**, alors** A **possède 1 pour unique valeur propre. Si** A **était diagonalisable, alors il existerait** $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ **tel que** $A = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times P^{-1} = PP^{-1} = I_2$**.**

5. Déterminer la matrice de φ_A dans la base $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

- **1 pt :** $\varphi_A(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **et** $\varphi_A(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\varphi_A(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ **et** $\varphi_A(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

On en déduit : $\mathrm{Mat}_C(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

6. En déduire les valeurs propres de φ_A, puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de φ_A en fonction de $a \in \mathbb{C}$.

- **0 pt :** $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{1, a\}$ **ou** $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{a\}$ **(cas** $a = 1$**)**
- **1 pt : théorème du rang** $\dim\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(\varphi_A - \lambda\mathrm{id})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi_A - \lambda\mathrm{id})\big)$
- **2 pts : cas** $a \neq 1$
  - × **1 pt :** $\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi_A - \mathrm{id})\big) = \mathrm{rg}(A - I_4) = 2$ **donc** $\dim\big(E_1(\varphi_A)\big) = 4 - 2 = 2$
  - × **1 pt :** $\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi_A - a\,\mathrm{id})\big) = \mathrm{rg}(A - a\,I_4) = 2$ **donc** $\dim\big(E_a(\varphi_A)\big) = 4 - 2 = 2$
- **0 pt : cas** $a = 1$**, le même calcul donne** $\dim\big(E_1(\varphi_A)\big) = 2$

7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que φ_A soit diagonalisable.

- **1 pt :** φ_A **diagonalisable** $\Leftrightarrow a \neq 1$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_A)} \dim\big(E_\lambda(\varphi_A)\big) = \begin{cases} \dim\big(E_a(\varphi_A)\big) + \dim\big(E_1(\varphi_A)\big) = 4 = \dim\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})\big) & (\textit{si } a \neq 1) \\ \dim\big(E_1(\varphi_A)\big) = 2 \neq \dim\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})\big) & (\textit{si } a = 1) \end{cases}$

Partie III - Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A.

8. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\,\varphi_A\,)^k = \varphi_{A^k}$.

- **2 pts : par récurrence (écrite correctement) à l'aide de la question 2**

9. En déduire : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P\,(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

- **1 pt : soit** $P \in \mathbb{C}[X]$**. Alors, il existe** $d \in \mathbb{N}$ **et** $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ **tels que** $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$
- **1 pt :** $P\,(\varphi_A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k\ \big(\varphi_A\big)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k\ \varphi_{A^k}$
- **1 pt :** $P\,(\varphi_A)\,(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k\ \varphi_{A^k}(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k\ A^k \times M = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k\ A^k\right) \times M = P(A) \times M = \varphi_{P(A)}(M)$

10. Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

- **1 pt : diagonalisable** $\Leftrightarrow$ **il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples**
- **1 pt :** $(\Rightarrow)$ **si** A **diagonalisable alors il existe** P **annulateur de** A **scindé à racines simples. Alors :** $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)} = \varphi_{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$ **donc** P **annulateur de** φ_A
- **2 pts :** $(\Leftarrow)$
  - × **1 pt : si** φ_A **diagonalisable alors il existe** P **annulateur de** φ_A **scindé à racines simples. Alors :** $\varphi_{P(A)} = P(\varphi_A) = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$
  - × **1 pt : pour tout** M**,** $\varphi_{P(A)}(M) = P(A) \times M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ **notamment vérifié en** $M = I_n$ **donc** $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$

11. On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que $\chi_A\,(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul.
En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de φ_A, puis que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.

- **2 pts :**
  - × **1 pt :** χ_A **est annulateur de** A **(Cayley-Hamilton) donc est annulateur de** φ_A **(raisonnement de la question précédente)**
  - × **1 pt :** $\text{Sp}(\varphi_A) \subset \{$**racines de** $\chi_A\} = \text{Sp}(A)$
- **1 pt :** $\varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)} = \chi_{\varphi_A}(\varphi_A) = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$ **donc** $\varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)}(I) = \chi_{\varphi_A}(A) \times I = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$
- **0 pt : ainsi** χ_{φ_A} **annulateur de** A **et** $\text{Sp}(A) \subset \{$**racines de** $\chi_{\varphi_A}\} = \text{Sp}(\varphi_A)$

12. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de la matrice M est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ.

- **2 pts :**

$$\begin{array}{rcl} M \in E_\lambda(\varphi_A) & \Leftrightarrow & \varphi_A(M) = \lambda M \\ & \Leftrightarrow & AM = \lambda M \\ & \Leftrightarrow & A \times (C_1 \cdots C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\ & \Leftrightarrow & (A \times C_1 \cdots A \times C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\ & \Leftrightarrow & \forall\, k \in [\![1,n]\!], A \times C_k = \lambda C_k \\ & \Leftrightarrow & \forall\, k \in [\![1,n]\!], C_k \in E_\lambda(A) \end{array}$$

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A, l'application Ψ qui à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ associe le n-uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre de $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $(\, E_\lambda(A)\,)^n$.

13. Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A.

- **1 pt : comme A diagonalisable,** $\text{tr}(A) = \sum\limits_{k=1}^{p} m_k\, \lambda_k$ **et** $\det(A) = \prod\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^{m_k}$ **où** $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ **sont les valeurs propres de** A **et** $m_1, \ldots, m_p$ **leurs multiplicités respectives**
- **2 pts :** $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi_A)$

$$\begin{array}{rcll} \dim\big(E_{\lambda_k}(\varphi_A)\big) & = & \dim\Big(\big(E_{\lambda_k}(A)\big)^n\Big) & \textit{(d'après la remarque)} \\ & = & n \times \dim\Big(E_{\lambda_k}(A)\Big) & \\ & = & n \times m_k & \textit{(car } A \textit{ est diagonalisable)} \end{array}$$

- **2 pts : finalement**

$$\begin{array}{rcll} \text{tr}(\varphi_A) & = & \sum\limits_{k=1}^{p} n_k \times \lambda_k & \textit{(avec } n_k \textit{ multiplicité de } \lambda_k \textit{ dans } \chi_{\varphi_A}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_k}(\varphi_A)\big) \times \lambda_k & \textit{(car } \varphi_A \textit{ diagonalisable)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{p} n\ m_k \times \lambda_k & \\ & = & n\ \ \text{tr}(A) & \end{array}$$

En procédant de même : $\det\big(\varphi_A\big) = \big(\det(A)\big)^n$

EXERCICE 2
Les polynômes de Hermite / 37

On définit la suite des polynômes de Hermite dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de cette famille de polynômes.

I.1 - Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Dans cette sous-partie, on introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : $t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$**
- **1 pt : $\left| t^n\ \mathrm{e}^{-t^2} \right| = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$**
- **1 pt : comme $t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t^2}$ (im)paire alors les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\ \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n\ \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$ sont de même nature**

15. En déduire pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ que la fonction $t \mapsto R(t)\ \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : la fonction $t \mapsto R(t)\ \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$**

On peut aussi refaire la démo précédente en remarquant : $R(t)\ \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} a_d\, t^d\ \mathrm{e}^{-t^2}$

On déduit de la question précédente que l'on peut définir l'application $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\ \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$$

16. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- **1 pt : φ est linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale**
- **1 pt : φ est symétrique + bilinéaire car linéaire à gauche**
- **3 pts : φ est définie positive**
  - × **1 pt : $\varphi(P, P) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 f(t)\ dt \geqslant 0$ par croissance de l'intégrale**
  - × **1 pt : $t \mapsto \big(P(t)\big)^2 f(t)$ est : continue / $\geqslant 0$ / d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$ donc nulle sur $\mathbb{R}$**
  - × **1 pt : donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\big(P(t)\big)^2 f(t) = 0$ donc $\big(P(t)\big)^2 = 0$ donc P s'annule une infinité de fois -> c'est le polynôme nul**

I.2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette sous-partie, on détermine la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$ dont on a prouvé la convergence dans la sous-partie précédente.

On considère les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}\, dt$$

17. Justifier que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

- **1 pt : la fonction u est `LA` primitive qui s'annule en 0 de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. Cette dernière fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.**
- **1 pt :** $u'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

18. Justifier que v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^1 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$**
  - × **0 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\underline{h}_t{}'(x) = \dfrac{1}{t\,(1+t^2)} \left(-2\,(1+t^2)\ x \right) \mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2} = -\dfrac{2x}{t}\ \mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}$**
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ car continue sur le segment $[0,1]$**
  - × **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto -\dfrac{2x}{t}\ \mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}$ est c. p. m. sur $[0,1]$**
  - × **1 pt : si $x \in [a,b]$ alors $\left| -\dfrac{2x}{t}\ \mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2} \right| = \dfrac{2}{1+t^2}\ |\,x\,|\ \mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2} \leqslant 2\ \max\left(|a|, |b|\right)$ et $\varphi : t \mapsto 2\ \max\left(|a|,|b|\right)$ est intégrable sur $[0,1]$ car continue sur ce segment**
  - × **0 pt :** $v'(x) = -2x \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{t}\, dt = -2x \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{t}\, dt = -2x\ \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(tx)^2}}{t}\, dt$

19. Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)^2 + v(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$, puis que sa valeur est $\dfrac{\pi}{4}$.

- **1 pt : la fonction $w : x \mapsto u(x)^2 + v(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,** $w'(x) = 2\,u(x) \times u'(x) + v'(x) = 2\ \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt - 2x\ \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(tx)^2}}{t}\, dt$
- **1 pt : changement de variable** $\boxed{u = xt}$ **:** $-2x\ \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(tx)^2}}{t}\, dt = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\, du$
- **1 pt : $\forall x$, $w'(x) = 0$ donc** $w(x) = w(0) = \cancel{(u(0))^2} + v(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \left[\ \arctan(t)\ \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

20. En déduire que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est $\sqrt{\pi}$.

- **0 pt :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } x \textbf{ »}}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2} = 0$$

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - $\times$ **1 pt :** $\ell : t \mapsto 0$ / $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}$ **c.p.m. sur** $[0,1]$ **(au moins une)**
  - $\times$ **1 pt :** $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}\right| \leqslant 1$ **et** $\varphi : t \mapsto 1$ **est intégrable sur** $[0,1]$
- **0 pt : ainsi par TCD** $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \displaystyle\int_0^1 0\ dt = 0$

Il est aussi possible (et plus simple) de procéder par encadrement.

$\times$ **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2\,(t^2+1)}}{t^2+1} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

$\times$ **1 pt : par croissance de l'intégrale,** $0 \leqslant v(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ **et** $\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$
- **1 pt : par parité** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt = 2 \times \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}$

Partie II - Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on établit quelques propriétés sur la famille des polynômes de Hermite. On rappelle que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie dans la présentation générale de l'exercice.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^n.

- **1 pt : récurrence écrite correctement (dont initialisation correcte)**
- **1 pt :** $H_n = R + 2^n\ X^n$ **ou écriture similaire**
- **1 pt :** $H_{n+1} = 2\,X H_n - H_n' = \left(2\,X\ R - H_n'\right) + 2^{n+1}\ X^{n+1}$ **de degré** $= n+1$

22. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ qu'on a $f^{(n)}(x) = (-1)^n\ H_n(x) f(x)$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**
  - $\times$ **1 pt :** $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = (-1)^n\,(H_n'(x)\,f(x) + H_n(x)\,f'(x))$
  - $\times$ **1 pt : comme** $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} = -2x\ f(x)$ **alors** $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\ \left(H_n'(x) - 2x\,H_n(x)\,\right)\ f(x)$

On rappelle que le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est défini dans la sous-partie I.1.

23. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant q$. Montrer pour tout entier $k \in [\![0,q]\!]$ que :

$$\varphi\left(H_p, H_q\right) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t)\ f^{(q-k)}(t)\ dt$$

- **0 pt :** $\varphi(H_p, H_q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t)\ H_q(t)\ \mathrm{e}^{-t^2}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t)\ \left((-1)^q f^{(q)}(t)\right)\ dt$
- **3 pts : récurrence dont IPP**

24. Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(\ H_0, \ldots, H_d\ )$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.

- **1 pt : famille libre (car échelonnée / orthogonale et constituée de vecteurs non nuls)**
- **1 pt : si** $i < j$**,** $\varphi(H_i, H_j) = \left\langle H_i^{(j)} \,|\, H_0 \right\rangle = \langle 0 \,|\, H_0 \rangle = 0$
- **1 pt : si** $i > j$**,** $\varphi(H_i, H_j) = \varphi(H_j, H_i) = 0$ **d'après le point précédent**

25. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, calculer la norme du polynôme H_p.

- **1 pt :** $\varphi(H_p, H_p) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(p)}(t)\ f(t)\ dt$
- **1 pt :** $H_p^{(p)} = 2^p\ p!$ **car** H_p **est un polynôme de degré** p **et de coefficient dominant** 2^p
- **1 pt :** $\varphi(H_p, H_p) = 2^p\ p! \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt = 2^p\ p!\ \sqrt{\pi}$ **donc** $\|H_p\| = \sqrt{2^p\ p!\ \sqrt{\pi}}$

EXERCICE 3
Succession de tirages dans une urne / 16

Présentation générale

On fixe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels non nuls. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

1. si la boule tirée est de couleur blanche lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, on la replace dans l'urne et on ajoute u_k boules blanches supplémentaires ;

2. si la boule tirée est de couleur rouge lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, on la replace dans l'urne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par B_n l'événement « la boule tirée lors du $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche » et on note :

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$$

On considère également la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Partie I - Probabilité de l'événement E

Dans cette partie, on considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $p_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

26. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente, puis justifier que $\mathbb{P}(E) = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

- **1 pt :** $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k = B_{n+1} \cap \bigcap_{k=1}^{n} B_k \ \subset\ \bigcap_{k=1}^{n} B_k$
- **1 pt : par croissance de l'application** $\mathbb{P}$**,** $p_{n+1} \leqslant p_n$**.**
  Comme de plus $p_n \geqslant 0$**, alors** (p_n) **est décroissante minorée et donc convergente**
- **1 pt : par théorème de la limite monotone** $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} p_n$

27. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si l'événement $\bigcap_{i=1}^{k} B_i$ est réalisé, décrire la composition de l'urne en fonction de S_k juste avant d'effectuer le $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage. En déduire la probabilité $\mathbb{P}\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^{k} B_i\right)$.

- **1 pt : Si l'événement $\bigcap_{i=1}^{k} B_i$ est réalisé, c'est que l'on a tiré une boule blanche à chacun des k premiers tirages. Partant d'une urne contenant initialement 1 boule blanche et 1 rouge, on a ajouté successivement u_1 puis u_2 puis ...puis u_k boules blanches.**
  L'urne contient alors $1 + \sum_{i=1}^{k} u_i$ boules blanches et une rouge
- **1 pt : Dans ce cas, B_{k+1} est réalisé SSI on a tiré une boule blanche lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage. L'équiprobabilité des boules tirées permet d'affirmer :**

$$\mathbb{P}\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{k} u_i}{1 + \left(1 + \sum_{i=1}^{k} u_i\right)} = \frac{S_k}{1 + S_k}$$

28. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1}$.

- **1 pt :** $p_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}}(B_n)$
- **0 pt :** $p_n = \mathbb{P}(B_1) \times \frac{S_1}{1 + S_1} \times \ldots \times \frac{S_{n-1}}{1 + S_{n-1}}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2} = \frac{S_0}{1 + S_0}$

Partie II - Caractérisation de la propriété $\mathbb{P}(E) = 0$

29. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

- **1 pt :** $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant n + 1$ **car** $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \in \mathbb{N}^*$ **donc** $u_k \geqslant 1$
- **1 pt :** $n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$**, donc, par comparaison,** $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

30. Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{S_k}{S_k + 1}\right)$ et $\sum \frac{1}{S_k}$ sont de même nature.

- **1 pt :** $\ln\left(\frac{S_k}{S_k + 1}\right) = -\ln\left(\frac{S_k + 1}{S_k}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{S_k}\right)$
- **0 pt : comme** $\frac{1}{S_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **alors** $\ln\left(1 + \frac{1}{S_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S_k}$
- **1 pt : ainsi, par équivalence des séries à termes positifs,** $\sum -\ln\left(\frac{S_k}{S_k + 1}\right)$ **et** $\sum \frac{1}{S_k}$ **sont de même nature**

31. Montrer que $\mathbb{P}(E)=0$ si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{S_k}$ est divergente.

- **1 pt :** $\ln(p_n)=\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{S_k}{S_k+1}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(E)=0 \Leftrightarrow p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} -\ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\dfrac{1}{S_k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$ **La série** $\sum \dfrac{1}{S_k}$ **est divergente**

32. Dans cette question, on suppose que $u_n=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(E)$.

- **1 pt :** $p_n=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\ldots\times\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

33. Proposer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{P}(E)\neq 0$ en justifiant votre réponse.

- **1 pt : on choisit par exemple** $u_n=n$ **pour tout** $n\in\mathbb{N}^*$
- **1 pt : dans ce cas,** $S_n=1+\sum_{k=1}^{n}k=1+\dfrac{n(n+1)}{2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n^2}{2}$ **donc** $\dfrac{1}{S_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{n^2}$

EXERCICE 4
Fonction zêta / 15

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par : $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$.

On note $\mathscr{D}_\zeta$ son ensemble de définition.

34. Déterminer $\mathscr{D}_\zeta$.

- **1 pt : la série** $\sum\dfrac{1}{n^x}$ **est convergente SSI** $x>1$ **(critère de Riemann). Ainsi :** $\mathscr{D}_\zeta=]0,+\infty[$

35. Montrer que ζ est continue sur $\mathscr{D}_\zeta$.

- **0 pt : pour tout** $n\in\mathbb{N}^*$**, on note** $f_n : x\mapsto\dfrac{1}{n^x}=\dfrac{1}{\mathbf{e}^{x\,\ln(n)}}=\dfrac{1}{\mathbf{e}^{\ln(n)\,x}}$
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^0}$

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est de classe** $\mathscr{C}^0$ **sur** $]1,+\infty[$
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Convergence uniforme sur tout segment (par convergence normale)}}$

  Pour tout $[a,b]\subset\,]1,+\infty[$ **la série de fonctions** $\sum f_n$ **converge normalement sur** $[a,b]$**. En effet, pour tout** $x\in[a,b]$**,** $a\,\ln(n)\leqslant x\,\ln(n)\leqslant b\,\ln(n)$ **donc** $\mathbf{e}^{a\,\ln(n)}\leqslant\mathbf{e}^{x\,\ln(n)}\leqslant\mathbf{e}^{b\,\ln(n)}$ **donc** $\left|\dfrac{1}{n^x}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^a}$**. Ainsi,** f_n **bornée et** $\|f_n\|_{\infty,[a,b]}\leqslant\dfrac{1}{n^a}$ **+ th de comparaison des SATP**
- **1 pt : Par théorème de régularité, la fonction** $\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ **est de classe** $\mathscr{C}^0$ **sur** `TOUT SEGMENT` $[a,b]$ **de** $]1,+\infty[$**. Elle est donc continue sur** $]1,+\infty[$

36. Étudier le sens de variation de ζ.

- **1 pt :** $\forall x\leqslant y,\ f_n(x)\leqslant f_n(y)$ **(les fonctions** f_n **sont décroissantes)**
- **1 pt : ainsi,** $\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n}f_k(y)$ **et on passe à la limite quand** $n\to+\infty$ **(possible par convergence de la série de fonctions** $\sum f_n$**)**

37. Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

- **1 pt : la fonction ζ est décroissante et minorée (par 0) sur $]1,+\infty[$. Par théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite finie en $+\infty$**

38. Soit $x \in \mathscr{D}_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

- **1 pt : $n \leqslant t \leqslant n+1$ donc $\ln(n) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(n+1)$ et $x\ln(n) \leqslant x\ln(t) \leqslant x\ln(n+1)$**
  On en conclut : $\dfrac{1}{n^x} \geqslant \dfrac{1}{t^x} \geqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$
- **1 pt : par croissance de $\displaystyle\int_n^{n+1}$: $\displaystyle\frac{1}{n^x} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\, dt \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\, dt \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^x}\, dt = \frac{1}{(n+1)^x}$**
- **0 pt : si $n \geqslant 2$, l'inégalité de droite en $n-1$ donne l'inégalité de droite de l'énoncé**

39. En déduire, que pour tout $x \in \mathscr{D}_\zeta$:

$$1 + \frac{1}{(x-1)\,2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

- **1 pt : $\displaystyle\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} = \sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} = \int_1^N \frac{dt}{t^x}$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty}$**

40. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

- **1 pt : $\displaystyle 1 + \frac{1}{(x-1)\,2^{x-1}} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$**

41. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt : $\displaystyle 1 + \frac{1}{(x-1)\,2^{x-1}} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\displaystyle 1 + \frac{1}{x-1} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$**
- **1 pt : donc, par théorème d'encadrement, $\zeta(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$**