DS5

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2\,(1-x)\,y'' - x\,(1+x)\,y' + y = 2x^3 \qquad (E)$$

Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2\,(1-x)\,y'' - x\,(1+x)\,y' + y = 0 \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum\ a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in\ ]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière.
Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

Démonstration.

- La fonction f est la somme d'une série entière. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ (et en particulier de classe $\mathscr{C}^2$) sur l'intervalle ouvert de convergence $]-r, r[$.
- Par théorème de dérivation sous le symbole somme pour les séries entières, les fonctions f' et f'' sont développables en série entière, de même rayon de convergence r.
  De plus, ces fonctions vérifient :

$$\forall x \in\ ]-r, r[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\ x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ a_{n+1}\ x^n$$

$$\text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n\ x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\ a_{n+2}\ x^n$$

$$\boxed{\forall x \in\ ]-r, r[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ a_{n+1}\ x^n \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\ a_{n+2}\ x^n}$$ □

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in\,]-r,r[$, on a :

$$x^2\,(1-x)\,f''(x) - x\,(1+x)\,f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\,(a_n - a_{n-1})\,x^n$$

Démonstration.
Soit $x \in\,]-r,r[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
x^2\,(1-x)\,f''(x) &= x^2\,f''(x) \;-\; x^3\,f''(x) \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n\;x^{n-2} \;-\; x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n\;x^{n-2} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n\;x^{n} \;-\; \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n\;x^{n+1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n\;x^{n} \;-\; \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)\,a_{n-1}\;x^{n} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n\;x^{n} \;-\; \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(n-2)\,a_{n-1}\;x^{n} \qquad \textit{(car le premier terme de la } 2^{\text{ème}} \textit{ somme est nul)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(n(n-1)\,a_n - (n-1)(n-2)\,a_{n-1}\Big)\;x^n
\end{aligned}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
-x(1+x)\,f'(x) &= -x\,f'(x) \;-\; x^2\,f'(x) \\
&= -x \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\;x^{n-1} \;-\; x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\;x^{n-1} \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\;x^{n} \;-\; \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\;x^{n+1} \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\;x^{n} \;-\; \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\,a_{n-1}\;x^{n} \\
&= -\left(a_1\;x + \sum_{n=2}^{+\infty} n\,a_n\;x^n\right) \;-\; \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\,a_{n-1}\;x^{n} \\
&= -a_1\,x \;-\; \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(n\,a_n + (n-1)\,a_{n-1}\Big)\;x^n
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
& x^2\,(1-x)\,f''(x) - x\,(1+x)\,f'(x) + f(x) \\
= \quad & \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(n(n-1)\,a_n - (n-1)(n-2)\,a_{n-1}\Big)\ x^n \\
& - \ a_1\,x \ - \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(n\,a_n + (n-1)\,a_{n-1}\Big)\ x^n \\
& + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n \\
= \quad & \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(n(n-1)\,a_n - (n-1)(n-2)\,a_{n-1}\Big)\ x^n \\
& - \ \cancel{a_1\,x} \ - \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(n\,a_n + (n-1)\,a_{n-1}\Big)\ x^n \\
& + \ \Big(a_0 + \cancel{a_1\,x} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\,x^n\Big) \\
= \quad & a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\big(n(n-1) - n + 1\big)\,a_n - \big((n-1)(n-2) + (n-1)\big)\,a_{n-1}\Big)\ x^n \\
= \quad & a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\big(n(n-1) - (n-1)\big)\,a_n - \big((n-1)(n-2) + (n-1)\big)\,a_{n-1}\Big)\ x^n \\
= \quad & a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big((n-1)\,(n-1)\,a_n - (n-1)\ \big((n-2)+1\big)\,a_{n-1}\Big)\ x^n \\
= \quad & a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2\ \Big(a_n - a_{n-1}\Big)\ x^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (b_n) \text{ définie par : } \forall n \geqslant 2,\ b_n = (n-1)^2 \text{ satisfait les conditions demandées.}}$$ □

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r,r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& \text{La fonction } f \text{ est solution de } (H) \text{ sur l'intervalle }]-r,r[\\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in\ ]-r,r[,\ x^2\,(1-x)\,f''(x) - x\,(1+x)\,f'(x) + f(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in\ ]-r,r[,\ a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2\ \Big(a_n - a_{n-1}\Big)\ x^n = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ (n-1)^2\ \big(a_n - a_{n-1}\big) = 0 && \textit{(par unicité du développement en série entière)} \\
\Leftrightarrow \quad & a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ (n-1)^2 = 0 \ \texttt{OU} \ \big(a_n - a_{n-1}\big) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ a_n = a_{n-1} && \textit{(car pour tout } n \geqslant 2,\ (n-1)^2 \neq 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est solution de } (H) \text{ sur l'intervalle }]-r,r[\text{ si et seulement si} \\ a_0 = 0 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n.\end{array}}$$ □

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r,r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in\,]-1,1[,\ f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

Démonstration.

- D'après la question ***3*** :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ a_n = a_{n-1}$$

- On en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Plus précisément : $\forall n \geqslant 1$, $a_n = a_1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]-r,r[\quad f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_1\, x^n \\
&= a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\
&= a_1 \times \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} x^n \right) \\
&= a_1 \times \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{x^1 - x^{N+1}}{1-x} \right) && \textit{(formule valable car } |x| < 1\textit{)} \\
&= a_1 \times \frac{x}{1-x} && \textit{(}\lim_{N\to+\infty} x^{N+1} = 0 \ \textit{car } |x| < 1\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } f \text{ est solution de } (H) \text{ sur l'intervalle }]-r,r[, \text{ il existe bien un réel } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall x \in\,]-r,r[,\ f(x) = \frac{\lambda\, x}{1-x}}$$

□

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction :

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $]-1,1[$ développable en série entière.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\lambda x}{(1-x)}$ est le produit $g = \lambda\, f_1 \times f_2$ où :
  - × $f_1 : x \mapsto x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
  - × $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

  On en déduit, par produit de Cauchy, que la fonction f est développable en série entière au moins sur $]-1,1[$.
- En particulier, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus :

$$\forall x \in\,]-1,1[,\ g'(x) = \lambda\, \frac{(1-x) - x \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{\lambda}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad g''(x) = \frac{2\,\lambda}{(1-x)^3}$$

Pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\begin{array}{rl} & x^2\,(1-x)\,g''(x) - x\,(1+x)\,g'(x) + g(x) \\ = & x^2\,(1-x)\,\dfrac{2\,\lambda}{(1-x)^3} - x\,(1+x)\,\dfrac{\lambda}{(1-x)^2} + \dfrac{\lambda\,x}{1-x} \\ = & x^2\,(1-x)\,\dfrac{2\,\lambda}{(1-x)^3} - x\,(1+x)\,\dfrac{\lambda}{(1-x)^2} + \dfrac{\lambda\,x}{1-x} \\ = & \dfrac{\lambda\,x}{(1-x)^2}\,\Big(\cancel{2\,x \;-\; (1+x) \;+\; (1-x)}\Big) \\ = & 0 \end{array}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\lambda\,x}{1-x}$ est une solution de (H) sur $]-1,1[$ développable en série entière. $\square$

Exercice 2

- Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Pour tout $x \in E$, on note : $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

6. Un endomorphisme u de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x \rangle = 0$$

est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

Démonstration.

- Remarquons :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E, \text{ la famille } \big(x, u(x)\big) \text{ est orthogonale}$$

- Considérons :
  × $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique.
  × $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorphisme défini par : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ u\big((x_1, x_2)\big) = (-x_2, x_1)$.

  Alors, pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} \langle u(x), x \rangle & = & \langle\, (-x_2, x_1), (x_1, x_2)\, \rangle \\ & = & -x_2\,x_1 + x_1\,x_2 \\ & = & 0 \end{array}$$

Un endomorphisme u de E vérifiant : $\forall x \in E,\ \langle u(x), x \rangle = 0$ n'est pas forcément l'endomorphisme nul.

Commentaire

- Dans cette question, il n'est pas demandé de trouver `TOUS` les endomorphismes vérifiant la propriété énoncée mais seulement de savoir s'il en existe (au moins) un. Dans ce cas, il suffit d'exhiber un endomorphisme particulier. Pour de telles questions, il faut aller au plus simple et c'est pour cela qu'on considère $E = \mathbb{R}^2$.
- L'endomorphisme utilisé pour répondre à cette question n'est autre qu'une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui assure que vecteur et image sont orthogonaux.

$\square$

7. Étant donné un endomorphisme u de E, on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), y \rangle \ = \ \langle x, v(y) \rangle$$

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $u \circ v = v \circ u$

(ii) $\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), u(y) \rangle \ = \ \langle v(x), v(y) \rangle$

(iii) $\forall x \in E, \ \| u(x) \| \ = \ \| v(x) \|$

(on pourra par exemple, successivement prouver les implications :
$(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (ii)$ et $(ii) \Rightarrow (i)$)

Démonstration.
On démontre les propriétés proposées par l'énoncé. On rappelle que l'endomorphisme v vérifie :

$$\forall (a,b) \in E^2, \ \langle u(a), b \rangle \ = \ \langle a, v(b) \rangle \qquad (*)$$

- Démontrons : $(i) \Rightarrow (ii)$
  On suppose : $u \circ v = v \circ u$. Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y) \rangle &= \langle x, v\big(u(y)\big) \rangle && \textit{(par $(*)$ en $a = x$ et $b = u(y)$)} \\
&= \langle x, (v \circ u)(y) \rangle && \textit{(par définition de la loi $\circ$)} \\
&= \langle x, (u \circ v)(y) \rangle && \textit{(d'après (i))} \\
&= \langle x, u\big(v(y)\big) \rangle && \textit{(par définition de la loi $\circ$)} \\
&= \langle u\big(v(y)\big), x \rangle && \textit{(par symétrie du produit scalaire)} \\
&= \langle v(y), v(x) \rangle && \textit{(par $(*)$ en $a = v(y)$ et $b = x$)} \\
&= \langle v(x), v(y) \rangle && \textit{(par symétrie du produit scalaire)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } (i) \Rightarrow (ii).}$$

- Démontrons : $(ii) \Rightarrow (iii)$
  Suppposons : $\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), u(y) \rangle \ = \ \langle v(x), v(y) \rangle$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\| u(x) \| &= \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle} \\
&= \sqrt{\langle v(x), v(x) \rangle} && \textit{(d'après (ii) en $y = x$)} \\
&= \| v(x) \|
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } (ii) \Rightarrow (iii).}$$

- Démontrons : $(iii) \Rightarrow (ii)$
  Suppposons : $\forall x \in E, \ \| u(x) \| \ = \ \| v(x) \|$. Soit $(x,y) \in E^2$.
  $\times$ Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\langle u(x+y), u(x+y) \rangle &= \| u(x+y) \|^2 \\
&= \| v(x+y) \|^2 && \textit{(d'après (iii))} \\
&= \langle v(x+y), v(x+y) \rangle
\end{aligned}$$

× Or :

$$\begin{aligned}
&\langle\, u(x+y), u(x+y)\,\rangle \\
=\ &\langle\, u(x)+u(y), u(x)+u(y)\,\rangle && \textit{(car u est un endomorphisme)}\\
=\ &\langle\, u(x), u(x)\,\rangle + \langle\, u(x), u(y)\,\rangle + \langle\, u(y), u(x)\,\rangle + \langle\, u(y), u(y)\,\rangle && \textit{(par bilinéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$)}\\
=\ &\langle\, u(x), u(x)\,\rangle + 2\,\langle\, u(x), u(y)\,\rangle + \langle\, u(y), u(y)\,\rangle && \textit{(par symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$)}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\langle\, v(x+y), v(x+y)\,\rangle &= \langle\, v(x), v(x)\,\rangle + 2\,\langle\, v(x), v(y)\,\rangle + \langle\, v(y), v(y)\,\rangle \\
&= \langle\, u(x), u(x)\,\rangle + 2\,\langle\, v(x), v(y)\,\rangle + \langle\, u(y), u(y)\,\rangle && \textit{(d'après (iii))}
\end{aligned}$$

× Ces deux quantités étant égales, on obtient :

$$\cancel{\langle\, u(x), u(x)\,\rangle} + 2\,\langle\, u(x), u(y)\,\rangle + \cancel{\langle\, u(y), u(y)\,\rangle} \ = \ \cancel{\langle\, u(x), u(x)\,\rangle} + 2\,\langle\, v(x), v(y)\,\rangle + \cancel{\langle\, u(y), u(y)\,\rangle}$$

et finalement : $\langle\, u(x), u(y)\,\rangle \ = \ \langle\, v(x), v(y)\,\rangle$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (iii) \Rightarrow (ii).}$$

- Démontrons : $(ii) \Rightarrow (i)$

Suppposons : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle \ = \ \langle v(x), v(y)\rangle$. Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
\langle\, u\circ v(x), y\,\rangle &= \langle\, u\big(v(x)\big), y\,\rangle \\
&= \langle\, v(x), v(y)\,\rangle && \textit{(par $(*)$ en $a = v(x)$ et $b = y$)}\\
&= \langle\, u(x), u(y)\,\rangle && \textit{(d'après (ii))}\\
&= \langle\, u(y), u(x)\,\rangle && \textit{(par symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$)}\\
&= \langle\, y, v\big(u(x)\big)\,\rangle && \textit{(par $(*)$ en $a = y$ et $b = u(x)$)}\\
&= \langle\, v\circ u(x), y\,\rangle && \textit{(par symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$)}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\langle\, u\circ v(x), y\,\rangle - \langle\, v\circ u(x), y\,\rangle = 0$. Et par linéarité à gauche, on en conclut :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle\, u\circ v(x) - v\circ u(x), y\,\rangle \ = \ 0$$

En particulier, en choisissant $y = u\circ v(x) - v\circ u(x)$, on obtient : $\forall x \in E,\ \|\, u\circ v(x) - v\circ u(x)\,\|^2 \ = \ 0$.

On en conclut, par propriété de séparation de la norme : $\forall x \in E,\ u\circ v(x) - v\circ u(x) \ = \ 0$.

Finalement, on a bien : $u\circ v = v\circ u$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (ii) \Rightarrow (i).}$$

Commentaire

- Les deux premières propriétés à démontrer sont assez directes et demandent un faible niveau d'initiative. Il faut prendre les points sur celles-ci. Les deux suivantes sont beaucoup plus difficiles car le niveau d'initiative est élevé.
- Dans la première question de l'exercice, on démontre que la propriété : $\forall x \in E,\ \langle\, u(x), x\,\rangle = 0$ n'est pas suffisante pour conclure $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En revanche :

$$\Big(\forall (x,y) \in E^2, \langle\, u(x), y\,\rangle = 0\Big) \ \Rightarrow \ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

En effet, pour tout $x \in E$, évaluer la propriété en $y = u(x)$ permet de conclure $\|u(x)\|^2 = 0$ et donc $u(x) = 0$.

□

Exercice 3

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \Delta_n = u_n - u_{n-1}$$

8. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n^2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= u_n - u_{n-1} \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) \right) - \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \ln(n-1) \right) \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) \right) + \left(\ln(n-1) - \ln(n) \right) \\
&= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

- Or : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Ainsi :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement :

$$\Delta_n = -\frac{\frac{1}{2}}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\frac{1}{2}}{n^2}$.

$$\boxed{\text{La valeur recherchée est } a = -\frac{1}{2}.}$$

□

9. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \Delta_n$ est convergente.

Démonstration.

- $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $|\,\Delta_n\,| \geqslant 0$
- D'après la question précédente : $|\,\Delta_n\,| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$
- La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $2 > 1$. La série $\sum \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$ l'est aussi (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général à un scalaire non nul).

Ainsi, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \Delta_n$ est (absolument) convergente.

Commentaire

Pour éviter la discussion un peu longue (« on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général à un scalaire non nul »), on aurait aussi pu utiliser le théorème de domination des séries à termes positifs et remarquer :

$$\Delta_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

□

10. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} \Delta_k\right)_{n\geqslant 2}$ est convergente. Notons S sa limite.
- Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \Delta_k &= \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) \\ &= u_n - u_1 \end{aligned}$$

Ainsi : $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \Delta_k + u_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S + u_1$.

La suite (u_n) est bien convergente.

□

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans 10, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & si\ t < n \\ 0 & si\ t \geqslant n \end{cases}$$

II.1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ valable pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

11. Soit $t \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$$

Démonstration.

- Notons $n_0 = \lfloor t \rfloor + 1$. Par définition de la partie entière :

$$\lfloor t \rfloor \ \leqslant\ t\ <\ \lfloor t \rfloor + 1\ =\ n_0$$

- Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, $t\ <\ n_0\ \leqslant\ n$ et :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$$

$$\boxed{\text{L'entier } n_0 = \lfloor t \rfloor + 1 \text{ convient.}}$$

□

12. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $t_0 \in]0,+\infty[$.

- Pour n suffisamment grand (d'après la question précédente, il suffit de choisir $n \geqslant n_0 = \lfloor t_0 \rfloor + 1$), $t < n$ et donc : $f_n(t_0)\ =\ \left(1 - \frac{t_0}{n}\right)^n \ln(t_0)\ =\ \mathrm{e}^{n\,\ln\left(1-\frac{t_0}{n}\right)} \times \ln(t_0)$.
- Or : $\ln\left(1 - \dfrac{t_0}{n}\right) \times n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{t_0}{n} \times n = -t_0$. Donc :

$$\mathrm{e}^{n\,\ln\left(1-\frac{t_0}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t_0}$$

- Finalement, pour tout $t_0 \in]0,+\infty[$:

$$f_n(t_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t_0}\ \ln(t_0)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut que la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge simplement} \\ \text{vers } f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ \ln(t) \text{ sur }]0,+\infty[.\end{array}}$$

Commentaire

- Déterminer la limite simple d'une suite de fonction (f_n) sur un intervalle I, c'est déterminer, pour tout $x_0 \in I$, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)$. Cette limite peut dépendre de la valeur de x_0 ce qui amène naturellement à faire une disjonction de cas. C'est par exemple le cas lorsque l'on détermine la limite d'une suite géométrique. Plus précisément, pour tout $x_0 \geqslant 0$:

$${x_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \textit{si } 0 \leqslant x_0 < 1 \\ 1 & \textit{si } x_0 = 1 \\ +\infty & \textit{si } x_0 > 1 \end{cases}$$

- Lorsque l'on détermine la limite simple d'une suite de fonctions, il est assez classique d'avoir à effectuer une disjonction de cas.

Commentaire

- Cet exercice illustre le cas où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie par cas et où les cas dépendent de n. Plus précisément :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ \ln(t) & \textit{si } t \in I_n \\ 0 & \textit{si } t \in J_n \end{cases}$$

où $I_n = \,]0, n[$ et $J_n = [n, +\infty[$. Raisonner sur la limite (quand n tend vers $+\infty$) de la suite $(\, f_n(t_0)\,)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à t_0 fixé n'est pas si simple :

× si l'on souhaite utilier l'expression de $f_n(t_0)$ qui correspond au cas où $t_0 \in I_n$, il faudrait s'assurer que t_0 appartient à I_n pour toute valeur de n.

× si l'on souhaite utilier l'expression de $f_n(t_0)$ qui correspond au cas où $t_0 \in J_n$, il faudrait s'assurer que t_0 appartient à J_n pour toute valeur de n.

Dans un tel cas, on commence par « déterminer la limite » des intervalles I_n et J_n.

$$\text{« } \lim_{n \to +\infty} \,]0, n[\ = \ ]0, +\infty[\ = \ I \text{ »} \qquad \text{et} \qquad \text{« } \lim_{n \to +\infty} [n, +\infty[\ = \ [+\infty, +\infty[\ = \ \varnothing \ = \ J \text{ »}$$

Insistons sur le fait que ces notations de limites n'ont pas de sens mathématiquement parlant. Une telle démarche doit donc apparaître uniquement au brouillon et pas sur une copie de concours. Cette étape est cependant essentielle. Elle permet de comprendre que commencer la rédaction par « Soit $t_0 \in [n, +\infty[$ » ne fait pas de sens si l'on souhaite déterminer la limite de $f_n(t_0)$ car pour n suffisamment grand, t_0 n'appartiendra plus à J_n. La bonne disjcontion de cas à effectuer est donc celle sur les intervalles limite I et J. Dans le cas qui nous intéresse comme $J = \varnothing$, on suppose donc uniquement $t_0 \in I = \,]0, +\infty[$. On est assuré (c'est ce qu'on démontre en question ***11.***) que pour n suffisamment grand, t_0 sera toujours élément de I_n. À partir de ce rang, on peut donc utiliser la définition de $f_n(t_0)$ correspondant au cas où $t_0 \in I_n$.

□

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in \,]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} \, |\ln(t)|$.

Démonstration.
Soit $t \in \,]0, +\infty[$. Deux cas se présentent.

- Si $t \in \,]0, n[$ alors :

$$|\, f_n(t)\,| = \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \, |\, \ln(t)\,| = \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right) \right|^n \, |\, \ln(t)\,| \ = \ \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \, |\, \ln(t)\,|$$

Comme $t \in \,]0, n[$, $0 < t < n$ et donc $0 < \dfrac{t}{n} < 1$ et $0 < 1 - \dfrac{t}{n} < 1$.

Donc	$\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) < -\dfrac{t}{n}$	*(car $\forall u \in \,]-1, +\infty[$, $\ln(1+u) < u$)*
donc	$n \ \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) < -t$	*(car $n > 0$)*
donc	$\exp\left(\, n \ \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \,\right) < \mathrm{e}^{-t}$	*(par stricte croissance de la fonction* exp *sur* $\mathbb{R}$*)*

On en conclut que pour tout $t \in \,]0, n[$, $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n = \exp\left(\, n \ \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \,\right) < \mathrm{e}^{-t}$

- Si $t \in [n, +\infty[$ alors :
$$|\, f_n(t)\,| = 0 \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-t}\ |\,\ln(t)\,|$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall t \in\,]0, +\infty[,\ \ |f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}\ |\ln(t)|.}$$ □

14. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ln(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\ dt$
- Démontrons que h est intégrable en 0.
× $|\,\mathrm{e}^{-t} \ln(t)\,| \underset{t\to 0}{\sim} |\,\ln(t)\,| = -\ln(t)$
× L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\ dt$ est convergente.
Ainsi, par théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} h(t)\ dt$ est convergente.
- Démontrons que h est intégrable en $+\infty$.
× $|\,\mathrm{e}^{-t} \ln(t)\,| = |\,\ln(t)\,|\ \mathrm{e}^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)$. En effet :
$$\frac{|\,\ln(t)\,|\ \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}} \ =\ \frac{|\,\ln(t)\,|}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\ dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence (avec $\frac{1}{2} > 0$).
Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\ dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } h \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$$ □

II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :
$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt = \int_0^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\ dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{1} u^n \ln(1-u)\ du$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $f_n : t \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t)$ est continue sur $]0, n]$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{n} f_n(t)\ dt$ est donc impropre seulement en 0.

- D'autre part :
  × $\left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) \right| \underset{t \to 0}{\sim} \left| 1^n \ \ln(t) \right| = -\ln(t)$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) \, dt$ est convergente.

  Ainsi, par théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f_n(t) \, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'intégrale } I_n \text{ est convergente.}}$$

□

16. Déduire des résultats de la sous-partie **II.1** que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t) \, dt$$

Démonstration.
Déterminons la limite de la suite (I_n) par théorème de convergence dominée.

- Convergence simple de la suite (f_n)
  D'après le résultat de la question ***12***, la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ \ln(t)$.
- Hypothèse de domination
  D'après le résultat de la question ***13*** :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in \,]0, +\infty[, \ |f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} \ |\ln(t)|$$
  De plus, la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ |\ln(t)|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***14***.

Ainsi, par théorème de convergence dominée, la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} I_n &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} h(t) \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ \ln(t) \, dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ \ln(t) \, dt}$$

Commentaire

- On a ici affaire à une question bilan : tous les aspects techniques ont été traités dans les autres questions. Il ne reste donc plus qu'à rappeler les hypothèses permettant l'utilisation du théorème de convergence dominée.
- Il ne faut pas hésiter à traiter ce type de questions même sans avoir traité les précédentes : les résultats étant annoncés dans l'énoncé, il n'y a pas de questions bloquantes.

□

17. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :
$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\, du$$
est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :
$$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1} \mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Démonstration.

- On procède par intégration par parties. Sous réserve d'existence :
$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 u^n \ \ln(1-u)\, du \\ &= \left[\frac{u^{n+1}-1}{n+1} \ \ln(1-u) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{n+1} \ \frac{-1}{1-u}\, du \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\left(u^{n+1}-1\right) \ \ln(1-u) \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{1-u}\, du \end{aligned}$$
- Démontrons alors que le crochet généralisé est convergent. Tout d'abord :
$$\begin{aligned} \left[\left(u^{n+1}-1\right) \ \ln(1-u) \right]_0^1 &= \lim_{u\to 1} \Big(\left(u^{n+1}-1\right) \ \ln(1-u) \Big) - \cancel{\left(0^{n+1}-1\right) \ln(1-0)} \\ &= \lim_{v \to 0} \Big(\left((1-v)^{n+1}-1\right) \ \ln(v) \Big) \qquad \textit{(en posant le changement de variable } v=1-u\textit{)} \end{aligned}$$
Or : $(1-v)^{n+1} = 1-(n+1)\, v + \underset{v\to 0}{o}(v)$ donc $(1-v)^{n+1}-1 = -(n+1)\, v + \underset{v\to 0}{o}(v)$.
Finalement :
$$\Big(\left((1-v)^{n+1}-1\right) \ \ln(v) \Big) \underset{v\to 0}{\sim} -(n+1) \ v \ \ln(v)$$
$$\boxed{\text{Comme } \lim_{v\to 0} v \ \ln(v) = 0, \text{ on en conclut : } \left[\left(u^{n+1}-1\right) \ \ln(1-u) \right]_0^1 = 0.}$$
- Ainsi, sous réserve d'existence :
$$J_n = \int_0^1 u^n \ \ln(1-u)\, du = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{1-u}\, du = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1-u^{n+1}}{1-u}\, du$$
$$\boxed{\text{On en déduit que ces deux intégrales sont de même nature (l'une est convergente si et seulement si l'autre l'est).}}$$
- Il reste alors à démontrer que cette nouvelle intégrale est convergente.
  × La fonction $g_n : u \mapsto \dfrac{1-u^{n+1}}{1-u}$ est continue sur $[0,1[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(u)\, du$ est impropre seulement en 1.
  × Or, pour tout $u \in [0,1[$:
$$g_n(u) = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} = \sum_{k=0}^{n} u^k \underset{u\to 1}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$
  Ainsi, la fonction g_n est prolongeable par continuité en 1 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(u)\, du$ est faussement impropre en 1.

$$\boxed{\text{On en conclut que l'intégrale } \int_0^1 g_n(u)\, du \text{ est convergente. Il en est de même de } J_n.}$$

- Enfin : $$\begin{array}{rcll} J_n & = & -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-u^{n+1}}{1-u}\, du & \\ & = & -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} u^k \, du & \\ & = & -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 u^k \, du \right) & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 & \\ & = & -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1^{k+1}}{k+1} - \cancel{\dfrac{0^{k+1}}{k+1}} \right) & \\ & = & -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1} & \\ & = & -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \end{array}$$

$$\boxed{J_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}$$

□

18. Montrer que l'on a la relation : $I_n = \dfrac{n}{n+1} \ \ln(n) + nJ_n$.

Démonstration.
Posons le changement de variable $\psi : u \mapsto n\,(1-u)$. La fonction ψ est :
× de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ car polynomiale.
× une bijection strictement décroissante de $]0,1[$ dans $]0,n[$.
Comme l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^n f_n(t)\,dt$ est convergente (d'après ***15***), le changement de variable est licite :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^n f_n(t)\,dt & = & \displaystyle\int_1^0 (f_n \circ \psi)(u)\ \psi'(u)\ du & \\ & = & \displaystyle\int_1^0 f_n\big(n\,(1-u)\big)\ (-n)\ du & \\ & = & n \displaystyle\int_0^1 u^n \ \ln\big(n\,(1-u)\big)\ du & \\ & = & n \displaystyle\int_0^1 u^n \Big(\ln(n) + \ln(1-u) \Big)\ du & \\ & = & n\ \ln(n) \displaystyle\int_0^1 u^n\, du + n \int_0^1 u^n \ \ln\big(1-u\big)\ du & \textit{(par linéarité de l'intégrale, les intégrales en présence étant convergentes)} \\ & = & n\ \ln(n)\ \dfrac{1}{n+1} + n\ J_n & \end{array}$$

$$\boxed{I_n = \frac{n}{n+1} \ \ln(n) + n\ J_n}$$

Commentaire

- Le programme officiel autorise le changement de variable directement sur les intégrales généralisées. Cela peut avoir pour conséquence de complexifier la recherche de bornes de l'intégrale résultat. En effet, lorsqu'on considère une intégrale généralisée, les bornes de l'intégrale initiale ne sont pas nécessairement finies et elles ne peuvent donc pas forcément s'écrire sous la forme $\psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$. Pour se prémunir d'une telle écriture et d'une discussion sur le fait que les bornes initiales puissent être atteinte par ψ, le programme officiel préfère considérer le cas d'une fonction :

$$\psi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$$

où a et b sont les bornes de l'intégrale de départ et α et β celles d'arrivée. Le caractère bijectif et strictement croissant assure que $a = \lim\limits_{t \to \alpha} \psi(t)$ et $b = \lim\limits_{t \to \beta} \psi(t)$. C'est essentiellement à cela que sert cette hypothèse : faire le lien entre a et α ainsi qu'entre b et β. On obtient alors un théorème qui s'écrit simplement mais dont l'utilisation est un peu pénible.

- Pour éviter la discussion sur le caractère $\mathscr{C}^1$ bijectif du changement de variable, on peut aussi décider de l'effectuer d'abord sur un segment puis faire tendre la borne où se situe l'impropreté. Typiquement, si l'intégrale initiale est impropre en b, on considère d'abord cette intégrale sur le segment $[a, B]$ (où $B \in [a, b[$), puis on effectue le changement de variable sur $[a, B]$ et enfin on fait tendre B vers b pour obtenir le résultat (ce qui est valide si l'on sait qu'au moins l'une des deux intégrales (celle de départ ou celle d'arrivée) est convergente.

- Globalement, le programme officiel semble considérer que les changements de variable sont des techniques calculatoires et qu'il convient de ne pas trop s'appesantir sur les hypothèses. Dans cette question, on serait tenté de poser le changement de variable sous la forme $\boxed{u = 1 - \dfrac{t}{n}}$ et de raisonner alors comme suit :

$u = 1 - \dfrac{t}{n}$ donc $t = n(1-u)$ *(on note alors $\psi : u \mapsto n(1-u)$)*

$\hookrightarrow dt = -n\, du$

- $t = 0 \Rightarrow u = 1 - \dfrac{0}{n} = 1$
- $t = n \Rightarrow u = 1 - \dfrac{n}{n} = 0$

On peut alors justifier du caractère valide de ce changement de variable par le fait que $\psi : u \mapsto n(1-u)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui est bijective et strictement décroissante.

- Enfin, notons que le programme officiel stipule que l'on peut utiliser la technique du changement de variable sur les intégrales généralisées sans aucune justification dès lors que le changement de variable est usuel. Ce dernier terme n'est pas précisé mais on peut considérer qu'un changement de variable affine (comme c'est le cas ici) est usuel et que les points de cette question seront attribués à tout candidat effectuant le bon changement de variable même sans aucune justification.

□

19. Déduire des questions précédentes :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\ dt$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n}\ I_n &= \ln(n) + (n+1)\, J_n \\
&= \ln(n) + \cancel{(n+1)} \left(-\frac{1}{\cancel{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\
&= -\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\
&= -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) - \frac{1}{n+1} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma - 0 \qquad \textit{(par définition de } \gamma \textit{ en début de } \textbf{Partie II}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Enfin, par produit de limites :

$$\frac{n+1}{n}\ I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \ln(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{Par unicité de la limite, on en déduit : } \gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \ln(t)\ dt.}$$

□