DS6

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- On traitera les deux problèmes (sans obligation de commencer par le premier).
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 - Suites et séries de fonctions

- Dans tout ce problème, on désigne par f une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur l'intervalle $[0,1[$.
- On s'intéresse, respectivement dans les **parties II** et **III** ci-dessous, à des suites et à des séries de fonctions dont le terme général est de la forme $f_n : x \mapsto f(x^n)$, pour $n \geqslant 1$.
- La **partie I** est quant-à-elle consacrée à des résultats préliminaires qui serviront dans les parties **parties II** et **III**.

Partie I - préliminaires

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

2. Donner un développement en série de $\dfrac{1}{1-x}$ pour $x \in [0,1[$, et en déduire :

$$\forall u \in [0,1[,\ -\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$$

3. Justifier alors que la fonction $u \mapsto -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$ et :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

On admettra pour toute la suite de ce problème que cette somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Partie II - étude de quelques suites d'intégrales

On s'intéresse dans cette partie à la suite des intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,dt$, pour $n \geqslant 1$.

On rappelle que f désigne une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$.

4. Énoncer le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est bien définie, et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

6. On suppose de plus, dans cette question, que la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Montrer alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$.

Indication : on pourra transformer l'intégrale nI_n grâce à un changement de variable approprié.

7. Application

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^n)\,dt$ est bien définie.

Déterminer la limite et un équivalent simple de J_n quand $n \to +\infty$.

Partie III - étude de quelques séries de fonctions

On s'intéresse dans cette partie à la fonction F définie, lorsque c'est possible, par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$$

On rappelle que f désigne une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$.

On suppose de plus, dans toute cette partie, que la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$.

On souhaite alors démontrer que la fonction F est bien définie sur l'intervalle $]0,1[$, puis calculer la limite $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} (1-x)F(x)$, et enfin comparer cette limite à $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} (1-x)^2F'(x)$ sur deux exemples.

8. Un premier exemple

Dans cette question, on pose $F_1(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$.

Préciser le domaine de définition de la fonction F_1. Calculer, pour $x \in [0,1[$, $F_1(x)$ puis $F_1'(x)$.

En déduire les valeurs des limites $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} (1-x)F_1(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} (1-x)^2F_1'(x)$.

9. Retour au cas général

On revient au cas général où f désigne une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$, et telle que $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$. On fixe un réel $x \in]0,1[$.

a) Justifier l'existence de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x^t)\,dt$ et l'égalité $G(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)}\displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'encadrement $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x^t)\,dt \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^t)\,dt$.

c) En déduire l'existence de la somme $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$ ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

d) En déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$.

10. Un dernier exemple

Dans cette question, on pose $F_2(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0,1[$. Montrer que la fonction $f_n : x \mapsto -\ln(1-x^n)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,a]$ et : $\forall x \in [0,a]$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{na^{n-1}}{1-a^n}$.

b) En déduire que la fonction F_2 est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et exprimer sa dérivée sous forme d'une somme de série de fonctions.

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)F_2(x)$.

d) Par une méthode analogue à celle de **9**, calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left((1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}\right)$.

En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)^2 F_2'(x)$.

Problème 2

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le but du problème est d'étudier la réduction de certaines *matrices de Toeplitz*, c'est-à-dire de matrices d'ordre n de la forme suivante, où $(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$:

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

dans laquelle les coefficients diagonaux sont tous égaux à t_0, ceux de la première sur-diagonale tous égaux à t_1, ceux de la première sous-diagonale tous égaux à t_{-1}, etc.

On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \{T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \mid (t_k)_{-n+1 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1}\}$$

Partie 0 - Généralités

11. Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
En donner une base et en préciser la dimension.

12. *Un exemple.* Soit N la matrice de Toeplitz dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première sous-diagonale qui valent 1 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Donner les valeurs propres de N et les sous-espaces propres associés.
La matrice N est-elle diagonalisable ?

b) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice commutant avec N (c'est-à-dire telle que $MN = NM$).

Montrer que $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,1}\, N^{i-1}$.

On pourra commencer par considérer la colonne ME_1, puis les colonnes ME_k pour $k \in [\![2, n]\!]$, où $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

c) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

Partie 1 - Cas de la dimension 2

13. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz d'ordre 2, où (a, b, c) sont des complexes.

a) Donner le polynôme caractéristique de A.

b) Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

14. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

b) En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

Partie 2 - Un cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de type $T(0, \ldots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \ldots, 0)$, c'est-à-dire une matrice de la forme :

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

15. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

16. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation :

$$bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0 \tag{1}$$

17. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

18. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que $\dfrac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$, ensemble des racines $(n+1)$-èmes de l'unité.

19. En utilisant l'équation (1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$.
En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1, n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que :

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \tag{2}$$

20. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0, n+1]\!]$, $x_k = 2i\ \alpha \dfrac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

21. Conclure que $A_n(a, b, c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.