DS6

EXERCICE 1

Les urnes de Pólya

- On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.
- On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :
  1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
  2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.
- Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage dans un cas particulier.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche, 0 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

- On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E \mid F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Partie I - Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $\{X_1 = 1\}$. En déduire la loi de X_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

- Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 1\} \mid \{S_n = k\}\big)$.

5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier :

$$\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 1\}\big) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b + r + n}$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

- Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $\{S_n = 1\}$ avec les événements $\{X_k = 0\}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

8. Montrer que $\mathbb{P}\big(\{S_n = 1\}\big) = \dfrac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $\mathbb{P}\big(\{S_n = n+1\}\big) = \dfrac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{S_{n+1} = k\} \mid \{S_n = \ell\}\big)$ dans chacun des trois cas suivants :

(i) $\ell \notin \{k-1, k\}$,

(ii) $\ell = k - 1$,

(iii) $\ell = k$.

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$\mathbb{P}\big(\{S_{n+1} = k\}\big) = \frac{k-1}{n+2}\,\mathbb{P}\big(\{S_n = k-1\}\big) + \frac{n+2-k}{n+2}\,\mathbb{P}\big(\{S_n = k\}\big)$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

EXERCICE 2

Résolution d'une équation fonctionnelle

- Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2} \tag{P}$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

- Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

12. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty \ \to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_k$.

13. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

14. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

15. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

16. Montrer que si $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

17. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

- Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

18. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

19. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

20. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

21. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

22. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

- Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

23. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t)\, dt = -\frac{1}{(x+k)^2}$$

24. En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}\, dt$$

EXERCICE 3

Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

- Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^{T} la transposée de la matrice M et par $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M.

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

- On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)$$

- On admet que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

27. Déduire des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

I.2 - Majoration de l'erreur

28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)$$

29. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|f_k(x) - \sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1+x}{2^k}$$

EXERCICE 4

- On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.
- Dans cet exercice on pourra utiliser sans démonstration que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = n!$.

30. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P, Q) de polynômes de E :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

31. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $p_F(X^2)$.

32. Justifier : $\left\|X^2 - p_F(X^2)\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \left\|p_F(X^2)\right\|^2$ puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(x^2 - ax - b\right)^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx$$

EXERCICE 5

- Pour n entier, $n \geqslant 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes $x_1, \ldots, x_n$ par :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

- L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \big(x_j - x_i\big)$.

33. Calculer $V(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes x_1, x_2, …, x_n deux à deux distincts.

Dans la suite, x_1, x_2, …, x_n sont n nombres complexes deux à deux distincts.

34. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)$.
Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.
Démontrer par récurrence que $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

35. **Première application**
Calculer le déterminant de la matrice $A = \big(i^j\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \ldots, n)$.

36. **Deuxième application**
Donner un exemple de n nombres complexes a_1, a_2, …, a_n deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} {a_k}^2 = 0$.
Soit n nombre complexes x_1, x_2, …, x_n deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^3$, …, $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^n$ est non nulle.
On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.