DS6 (/ 111)

EXERCICE 1 (/ 33)

Les urnes de Pólya

- On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.
- On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :
  1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
  2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche, 0 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Partie I - Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.

- **1 pt : comme $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ alors $X_1 \sim \mathcal{B}(r)$**
- **1 pt : où $r = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{b+r}$**

2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $\{X_1 = 1\}$. En déduire la loi de X_2.

- **0 pt : $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$**
- **1 pt : si l'événement $\{X_1 = 1\}$ est réalisé, c'est qu'on a tiré une boule blanche au 1^{er} tirage. On remet donc cette boule dans l'urne et on y ajoute une boule blanche. L'événement $\{X_2 = 1\}$ est alors réalisé si et seulement si on pioche une des $b+1$ boules blanches dans une urne qui en contient $r + b + 1$.**
- **1 pt : Dans ce cas, l'événement $\{X_2 = 1\}$ est réalisé ssi . . . et ainsi :**
  $\mathbb{P}_{\{X_1=1\}}\big(\{X_2 = 1\}\big) = \dfrac{b+1}{r+b+1}$ **et** $\mathbb{P}_{\{X_1=1\}}\big(\{X_2 = 0\}\big) = \dfrac{r}{r+b+1}$
- **1 pt : de même $\mathbb{P}_{\{X_1=0\}}\big(\{X_2 = 1\}\big) = \dfrac{b}{r+b+1}$ et $\mathbb{P}_{\{X_1=0\}}\big(\{X_2 = 0\}\big) = \dfrac{r+1}{r+b+1}$**
- **1 pt : par la FPT, $\mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = 0\}\big)$**
- **1 pt : $\ldots = \mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\} \mid \{X_1 = 0\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{X_1 = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\} \mid \{X_1 = 1\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{X_1 = 1\}\big)$**
- **0 pt : $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$**

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

- **1 pt : S_n prend pour valeur le nombre de boules blanches dans l'urne après les n premiers tirages**
- **1 pt : $b \in S_n(\Omega)$ et $b + n \in S_n(\Omega)$**
- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega) = [\![b, b+n]\!]$ (cas intermédiaires)**

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $\mathbb{P}\big(\{X_{n+1}=1\} \mid \{S_n=k\}\big)$.

- **1 pt : si l'événement $\{S_n = k\}$ est réalisé, c'est que l'urne comporte k boules blanches à l'issue des n premiers tirages. L'urne contient donc, à l'issue des n premiers tirages, k boules blanches et $r+b+n$ boules au total (et donc $r+b+n-k$ boules rouges).**
- **1 pt : par équiprobabilité, $\mathbb{P}\big(\{X_{n+1}=1\} \mid \{S_n=k\}\big) = \dfrac{k}{r+b+n}$**

5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier :

$$\mathbb{P}\big(\{X_{n+1}=1\}\big) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$$

- **0 pt : La v.a.r. S_n est d'espérance finie car c'est une v.a.r. finie** `OU` **v.a.r. positive**
- **1 pt : FPT sur le SCE $\big(\{S_n=k\}\big)_{k\in[\![b,n+b]\!]}$**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{X_{n+1}=1\}\big) = \sum\limits_{k=b}^{b+n} \mathbb{P}\big(\{S_n=k\}\big)\ \dfrac{k}{r+b+n} = \dfrac{1}{r+b+n} \sum\limits_{k=b}^{b+n} k\,\mathbb{P}\big(\{S_n=k\}\big) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{r+b+n}$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- **0 pt : initialisation (avec la question *1.*)**
- **3 pts : hérédité**
  - × **1 pt : rédaction récurrence forte**
  - × **1 pt : par linéarité de l'espérance,** $\mathbb{E}(S_n) = b + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = b + n\ \dfrac{b}{b+r}$
  - × **1 pt : d'après la question précédente,** $\mathbb{P}\big(\{X_{n+1}=1\}\big) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{r+b+n} = \dfrac{b}{b+r}$

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $\{S_n = 1\}$ avec les événements $\{X_k = 0\}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

- **1 pt : $\{S_n = 1\}$ est réalisé $\Leftrightarrow$ après n tirages l'urne contient 1 boule blanche**
  $\Leftrightarrow$ on a tiré que des boules rouges lors des n premiers tirages
  $\Leftrightarrow$ on a tiré une boule rouge au 1^{er} `ET` **. . .**`ET` **on a tiré une boule rouge au $n^{\text{ème}}$ tirage**
- **1 pt :** $\{S_n = 1\} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \{X_k = 0\}$

8. Montrer que $\mathbb{P}\big(\{S_n=1\}\big) = \dfrac{1}{n+1}$.

- **1 pt : FPC**
- **1 pt :** $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{\bigcap\limits_{i=1}^{k} \{X_i=0\}}\big(\{X_{k+1}=0\}\big) = \dfrac{1+k}{2+k}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{S_n=1\}\big) = \dfrac{1}{2} \prod\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k+1}{k+2} = \dfrac{1}{n+1}$ **(par télescopage)**

On admet dans la suite que l'on a de même $\mathbb{P}\big(\{S_n=n+1\}\big) = \dfrac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k,\ell) \in [\![1,n+2]\!] \times [\![1,n+1]\!]$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{S_{n+1}=k\} \mid \{S_n=\ell\}\big)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k-1,k\}, \qquad (ii)\ \ell = k-1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$

- **1 pt : cas $\ell \notin \{k-1,k\}$**

$$\mathbb{P}\big(\{S_{n+1}=k\} \mid \{S_n=\ell\}\big) = \frac{\mathbb{P}\big(\{S_{n+1}=k\}\cap\{S_n=\ell\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{S_n=\ell\}\big)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}\big(\{S_n=\ell\}\big)} = 0$$

- **2 pts : cas $\ell = k-1$**
  - × **1 pt :**

$$\mathbb{P}\big(\{S_{n+1}=k\} \mid \{S_n=k-1\}\big) = \frac{\mathbb{P}\big(\{X_{n+1}=1\}\cap\{S_n=k-1\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{S_n=\ell\}\big)} = \mathbb{P}_{\{S_n=k-1\}}\big(\{X_{n+1}=1\}\big)$$

  - × **1 pt : d'après *4.* avec $k-1 \in \mathbb{N}^*$ et $r=b=1$, $\mathbb{P}_{\{S_n=k-1\}}\big(\{X_{n+1}=1\}\big) = \dfrac{k-1}{2+n}$**
- **1 pt : cas $\ell = k$ (avec un raisonnement similaire au cas précédent) :**
  $\mathbb{P}\big(\{S_{n+1}=k\} \mid \{S_n=\ell\}\big) = \dfrac{2+n-k}{2+n}$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2,n+1]\!]$, on a la relation :

$$\mathbb{P}\big(\{S_{n+1}=k\}\big) = \frac{k-1}{n+2}\,\mathbb{P}\big(\{S_n=k-1\}\big) + \frac{n+2-k}{n+2}\,\mathbb{P}\big(\{S_n=k\}\big)$$

- **1 pt : FPT sur le SCE $\big(\{S_n=\ell\}\big)_{\ell\in[\![1,n+1]\!]}$**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{S_{n+1}=k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{S_n=k-1\}\big)\,\mathbb{P}_{\{S_n=k-1\}}\big(\{S_{n+1}=k\}\big)+\mathbb{P}\big(\{S_n=k\}\big)\,\mathbb{P}_{\{S_n=k\}}\big(\{S_{n+1}=k\}\big)$
- **1 pt : d'après la question précédente, on obtient $\mathbb{P}\big(\{S_{n+1}=k\}\big) = \dfrac{k-1}{n+2}\,\mathbb{P}\big(\{S_n=k-1\}\big)+$ $\dfrac{n+2-k}{n+2}\,\mathbb{P}\big(\{S_n=k\}\big)$**

1 pt en tout si FPT réalisée sur une famille qui n'est pas un SCE

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n+1]\!]$.

- **1 pt : initialisation ($S_0 = 1$ donc on a bien : $S_0 \sim \mathcal{U}([\![1,1]\!])$)**
- **2 pts : hérédité**
  - × **1 pt : d'après *3.* $S_{n+1}(\Omega) = [\![1,n+2]\!]$.**
  - × **1 pt : $\mathbb{P}\big(\{S_{n+1}=k\}\big) = \dfrac{1}{n+2}$ (utilisation de la question précédente et hypothèse de récurrence)**

EXERCICE 2 (/ 37)

Résolution d'une équation fonctionnelle

- Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{(P)}$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

I.1 - Existence de la solution

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in]0, +\infty[,\ \varphi_k(x) = \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

12. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

- **1 pt :** $\left|\dfrac{(-1)^k}{(x_0+k)^2}\right| = \dfrac{1}{(x_0+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2} \geqslant 0$
- **1 pt : la série numérique** $\sum \dfrac{1}{k^2}$ **CV en tant que série de Riemann d'exposant** 2 (> 1)**.**
- **0 pt : la série numérique** $\sum \varphi_k(x_0)$ **est (A)CV**

`OU` **2 pts si critère spécial des séries alternées**

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_k$.

13. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

- **1 pt :** $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ + **décalage d'indice à gauche**
- **1 pt : conclusion**

14. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

- **0 pt : la série** $\sum \dfrac{(-1)^k}{(x_0+k)^2}$ **est alternée car, pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ **:** $\dfrac{1}{(x_0+k)^2} > 0$.
- **1 pt : la suite** $\left(\dfrac{1}{(x_0+k)^2}\right)$ **est décroissante et** $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{(x_0+k)^2} = 0$
- **1 pt :** $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \left|\varphi_{n+1}(x)\right| = \dfrac{1}{(x+n+1)^2}$

15. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

- **1 pt : d'après la question précédente** $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \left|\varphi_{n+1}(x)\right| = \dfrac{1}{(x+n+1)^2}$
- **0 pt : si** $x \in [a, +\infty[$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{(a+n+1)^2}$
- **1 pt : donc** $\left\|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{(a+n+1)^2}$
- **1 pt : conclusion par le théorème de la double limite**

On peut tenter un encadrement direct mais la question précédente fournit :
$\left|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{(x+1)^2}$ **(alors qu'on veut en 0 !)**
Ill faut affirmer que cela fonctionne aussi « pour S » et conclure par théorème d'encadrement.

I.2 - Unicité de la solution

16. Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

- **1 pt : comme f est solution de (P), alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:**

$$f(x+k+1) + f(x+k) \ = \ \frac{1}{(x+k)^2}$$

- **1 pt : par décalage d'indice**
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = -\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k f(x+k) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k) = -(-1)^{n+1} f(x+n+1) + f(x)$

17. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

- **1 pt : d'après la question *12.*, la série $\sum \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ est convergente et :**

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(x) \ = \ \varphi(x)$$

- **1 pt : avec le changement de variable $\boxed{u = x+n+1}$:**

$$\lim_{n\to+\infty} f(x+n+1) \ = \ \lim_{u\to+\infty} f(u) \ = \ 0 \qquad \textit{(car } f \textit{ solution de } (P))$$

- **1 pt : On a ainsi démontré que, si la fonction f est solution de (P), alors la fonction f est exactement égale à la fonction φ.**

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

- Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

18. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.

- **1 pt : $\forall x \in [\varepsilon,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \ \leqslant \ \frac{1}{(x+n+1)^2}$**
- **1 pt : $0 \ \leqslant \ \left\|\varphi - \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k\right\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} \ \leqslant \ \dfrac{1}{(\varepsilon+n+1)^2}$**
- **1 pt : conclusion par encadrement**

19. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

- **1 pt : $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^0}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est continue sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : $\boxed{\text{Convergence uniforme (sur tout intervalle adapté)}}$**
d'après la question précédente, $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$
- **1 pt : on en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \varphi_k$ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$. La fonction φ est donc continue sur $]0,+\infty[$**

- **2 pts :** $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$
  - × **1 pt :** φ **est solution de** (P) **donc :** $\varphi(x)+\varphi(x+1) = \dfrac{1}{x^2}$
  - × **1 pt :** φ **est continue en** 1 **donc :** $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x+1) = \varphi(1)$

20. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^1}$ **pour tout** $k\in\mathbb{N}$ **:**
  - × **1 pt :** φ_k **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $]0,+\infty[$
  - × **0 pt :** $\varphi_k' : x \mapsto 2\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Convergence successives}}$
  - × **1 pt :** $\sum \varphi_k$ **converge simplement sur** $]0,+\infty[$ **sur** $[\varepsilon,+\infty[$
  - × **1 pt : pour tout** $\varepsilon>0$**, pour tout** $k\in\mathbb{N}$**, pour tout** $x\in[\varepsilon,+\infty[$ **:**

$$\|\varphi_k'\|_{[\varepsilon,+\infty[} \ \leqslant\ \frac{2}{(\varepsilon+k)^3} = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

  - × **1 pt : par critère de convergence des SATP,** $\sum \varphi_k'$ **converge normalement sur** $[\varepsilon,+\infty[$**, et donc uniformément sur** $[\varepsilon,\infty[$**.**
- **0 pt : en conclusion** φ **est de calsse** $\mathscr{C}^1$ **(et donc dérivable) en tout point de** $]0,+\infty[$

21. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt : hypothèses du critère spécial des séries alternées**
  - × **la série** $\sum \varphi_k'(x)$ **est alternée**
  - × **la suite** $\big(|\varphi_k'(x)|\big) = \left(\dfrac{2}{(x+k)^2}\right)$ **est décroissante**
  - × **la suite** $\big(|\varphi_k'(x)|\big)$ **tend vers** 0
- **1 pt : par CSSA,** $\varphi'(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \varphi_k'(x)$ **est du signe de son premier terme, donc négative.**
  Ainsi φ **est décroissante sur** $]0,+\infty[$

22. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x\in\,]1,+\infty[,\ \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

- **1 pt : comme** φ **est décroissante sur** $]0,+\infty[$**, pour tout** $x\in\,]1,+\infty[$**, comme** $(x-1,x,x+1)\in]0,+\infty[^3$ **:**

$$\varphi(x+1)\ \leqslant\ \varphi(x)\ \leqslant\ \varphi(x-1)$$

- **1 pt :**

$$\underbrace{\varphi(x+1)+\varphi(x)}_{=\,\frac{1}{x^2}}\ \leqslant\ 2\,\varphi(x)\ \leqslant\ \underbrace{\varphi(x-1)+\varphi(x)}_{=\,\frac{1}{(x-1)^2}}$$

- **1 pt :** $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,x^2}$

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

- Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in \,]0, +\infty[$.

23. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(x+k)^2}$$

- **0 pt : $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{t^{x+k}}{x+k}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 1]$**
- **1 pt : IPP sous réserve de convergence**

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\, dt \;=\; \left[\, \frac{t^{x+k}}{x+k} \;\ln(t) \,\right]_0^1 - \frac{1}{x+k} \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x-k}}\, dt$$

- **1 pt :**
  × $\left[\, \dfrac{t^{x+k}}{x+k} \;\ln(t) \,\right]_0^1$ **converge (vers 0)**
  × **l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x-k}}\, dt$ **converge car c'est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant** $1 - x - k < 1$

24. En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}\, dt$$

- **1 pt :** **Existence d'une limite finie - étude « en n »**
  pour tout $t_0 \in [0, 1]$, la série numérique $\sum f_k(t_0)$ ACV car c'est une série géométrique de raison $-t \in \,]-1, 1[$ donc la série $\sum f_k$ CS sur $]0, 1]$.
- **1 pt :** **Intégrabilité - étude « en t »**
  × **1 pt : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : (-1)^k\, t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ d'après la question précédente**
  × **0 pt : la fonction $S : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(t) = \dfrac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$**
- **1 pt :** **Hypothèse spécifique**
  la série $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_k(t)|\, dt$ est convergente. En effet :

$$\int_0^1 |f_k(t)|\, dt \;=\; \frac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$$

EXERCICE 3 (/ 11)

Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

- Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^{T} la transposée de la matrice M et par $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M.

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

- On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$
et la relation de récurrence :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)$$
- On admet que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- **1 pt :** $\big(f_k(x)\big)^2 - x = \dfrac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) - \dfrac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2$
- **1 pt :** $\big(f_k(x)\big)^2 - x \geqslant 0$
- **1 pt :** $\big(f_k(x)\big)^2 - x = \big(f_k(x) - \sqrt{x}\big)\big(f_k(x) + \sqrt{x}\big)$**. Or** $f_k(x) + \sqrt{x} \geqslant 0$ **donc** $f_k(x) - \sqrt{x} \geqslant 0$

26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- **1 pt :** $f_{k+1}(x) - f_k(x) = \dfrac{1}{2\, f_k(x)}\left(x - \big(f_k(x)\big)^2\right)$
- **1 pt :** $\ldots \leqslant 0$ **d'après la question précédente**

27. Déduire des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

- **1 pt : la suite** $\big(f_k(x)\big)$ **est décroissante et minorée par** $\sqrt{x}$**. Elle converge donc vers un réel** $\ell(x)$ **vérifiant :** $\ell(x) \geqslant \sqrt{x}$
- **1 pt : comme** $f_{k+1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_k(x) + \dfrac{x}{f_k(x)}\right)$**, alors** $2\, f_{k+1}(x)\, f_k(x) = \big(f_k(x)\big)^2$**. D'où :**
$$2\,\big(\ell(x)\big)^2 = \big(\ell(x)\big)^2 + x$$
- **1 pt :** $\ell(x) = \sqrt{x}$ **car** $\ell(x) \geqslant \sqrt{x} \geqslant 0$

I.2 - Majoration de l'erreur

28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \dfrac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)$.

- **1 pt**

29. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leqslant \frac{1+x}{2^k}$$

- **3 pts : récurrence**
  - × **1 pt : initialisation** $f_1(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{x}{1}\right) = \dfrac{1}{2}\,(1+x)$
  - × **2 pts : hérédité**
  $$|f_{k+1}(x) - \sqrt{x}| = \frac{|f_k(x) - \sqrt{x}|}{2}\left|1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right| \quad \textbf{et} \quad \left|1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right| \in [0,1] \quad \textbf{donc :}$$
  $$|f_k(x) - \sqrt{x}| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,|f_k(x) - \sqrt{x}|$$

EXERCICE 4 (/15)

- On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.
- Dans cet exercice on pourra utiliser sans démonstration que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n \, e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \, e^{-x} \, dx = n!$.

30. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P, Q) de polynômes de E :

$$\langle P, Q \rangle \; = \; \int_0^{+\infty} P(x) \, Q(x) \, e^{-x} \, dx$$

On notera $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

- **1 pt : l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ ET symétrique**
- **1 pt : l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:** $\langle P, P \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 \, \mathbf{e}^{-t} \, dt \; \geqslant \; 0$
- **2 pts :**
  - × **1 pt : $t \mapsto \big(P(t)\big)^2 \, \mathbf{e}^{-t}$ est : continue sur $[0, +\infty[$, positive sur $[0, +\infty[$, d'intégrale nulle sur $[0, +\infty[$ donc est nulle sur $[0, +\infty[$**
  - × **1 pt : ainsi $\forall t \in [0, +\infty[, \; P(t) \; = \; 0$ donc P admet une infinté de racines et $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$**

31. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $p_F\big(X^2\big)$.

- **1 pt : $p_F(X^2) \in F = \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1)$, il existe donc $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$, $p_F(X^2) = \alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1$.**
- **1 pt :** $p_F(X^2) \in F \Leftrightarrow X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp \Leftrightarrow \langle X^2 - p_F(X^2), P_0 \rangle = 0$ **et** $\langle X^2 - p_F(X^2), P_1 \rangle = 0$
- **1 pt :** $\langle P_2 - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big), P_0 \rangle \; = \; 2 - \alpha_0 - \alpha_1$
- **1 pt :** $\langle P_2 - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big), P_1 \rangle = 6 - \alpha_0 - 2\,\alpha_1$
- **1 pt :** $p_F(X^2) \in F \iff \left\{ \begin{array}{lcr} \alpha_0 & = & -2 \\ \quad \alpha_1 & = & 4 \end{array} \right.$

32. Justifier : $\Big\| X^2 - p_F\big(X^2\big) \Big\|^2 \; = \; \Big\| X^2 \Big\|^2 - \Big\| p_F\big(X^2\big) \Big\|^2$ puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \big(x^2 - ax - b\big)^2 \, e^{-x} \, dx$$

- **1 pt : par th. de Pythagore** $\|X^2\|^2 = \Big\| p_F(X^2) + \big(X^2 - p_F(X^2)\big) \Big\|^2 = \Big\| p_F(X^2) \Big\|^2 + \Big\| \big(X^2 - p_F(X^2)\big) \Big\|^2$
- **1 pt :** $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \big(t^2 - at - b\big)^2 \, \mathbf{e}^{-t} \, dt = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \Big\| X^2 - \big(a\,X + b\big) \Big\|^2$
- **1 pt :** $\ldots = \displaystyle\inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \| \; X^2 - P \; \|^2 = \Big(\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) \Big)^2 = \| \; X^2 - p_F(X^2) \; \|^2 = \|X^2\|^2 - \|p_F(X^2)\|^2$
- **0 pt :** $\|X^2\|^2 = \langle X^2, X^2 \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^4 \, \mathbf{e}^{-t} \, dt = 4! = 24$
- **1 pt :** $\|p_F(X^2)\|^2 = \langle -2 + 4X, -2 + 4X \rangle = \langle -2, -2 \rangle + 2\,\langle -2, 4X \rangle + \langle 4X, 4X \rangle = 4 \times 0! - 16 \times 1! + 16 \times 2! = 20$
- **0 pt :** $\Big(\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) \Big)^2 = 24 - 20 = 4$

EXERCICE 5 (/ 15)

- Pour n entier, $n \geqslant 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes x_1, ..., x_n par :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

- L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \big(x_j - x_i\big)$.

33. Calculer $V(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes x_1, x_2, ..., x_n deux à deux distincts.

- **1 pt :** $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$
- **1 pt : s'il existe deux entiers distincts de $[\![1, n]\!]$ notés i, j tels que $x_i = x_j$ alors les colonnes i et j de la matrice dont on calcule le déterminant sont égales donc** $V(x_1, \ldots, x_n) = 0$

Dans la suite, x_1, x_2, ..., x_n sont n nombres complexes deux à deux distincts.

34. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)$.
Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.
Démontrer par récurrence que $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

- **1 pt :** $P(t) = (-1)^{n+1}\, \Delta_{1,n} + (-1)^{n+2}\, \Delta_{2,n}\, t + \ldots + (-1)^{n+n}\, \Delta_{n,n}\, t^{n-1}$ **en développant suivant la dernière colonne**
- **1 pt : le coefficient devant t^{n-1} est** $\Delta_{n,n} = V(x_1, \ldots, x_{n-1})$
- **3 pts : par récurrence**
  - × **1 pt :** $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$ **et** $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (x_j - x_i) = \prod\limits_{i=1}^{1} \left(\prod\limits_{j=i+1}^{2} (x_j - x_i) \right) = \prod\limits_{j=2}^{2} (x_j - x_1) = x_2 - x_1$
  - × **2 pts :**

35. **Première application**
Calculer le déterminant de la matrice $A = \big(i^j\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \ldots, n)$.

- **1 pt :** $\det(A) = n!\ \det(M_n)$ **(pour chaque colonne j on met j en facteur)**
- **1 pt :** $V(1, \ldots, n) = \det\left({}^t M_n\right) = \det(M_n) = \dfrac{1}{n!}\ \det(A)$
- **1 pt :** $\det(A) = n! \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i) = n! \prod\limits_{j=2}^{n} \Big((j-1) \times (j-2) \times \ldots \times \big(j - (j-1)\big) \Big)$
- **1 pt :** $\ldots = n! \prod\limits_{j=2}^{n} (j-1)! = n! \prod\limits_{j=1}^{n-1} j! = \prod\limits_{j=1}^{n} j!$
- **0 pt :** $\ldots = 1^n \times 2^{n-1} \times 3^{n-2} \times \ldots \times n^2 = \prod\limits_{k=1}^{n} k^{n+1-k}$

36. **Deuxième application**

Donner un exemple de n nombres complexes a_1, a_2, …, a_n deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} {a_k}^2 = 0$.

Soit n nombre complexes x_1, x_2, …, x_n deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^3$, …, $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^n$ est non nulle.

On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

- **2 pts : on considère la famille** $(a_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ **définie par :** $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = \mathrm{e}^{i\,\frac{k\,\pi}{n}}$
- **0 pt : par l'absurde, on suppose que toutes les sommes sont nulles**
- **1 pt :** $\big(x_1 \times \ldots \times x_n\big)\ V(x_1, \ldots, x_n) \ = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \\ {x_1}^{n} & {x_2}^{n} & {x_3}^{n} & \cdots & {x_n}^{n} \end{vmatrix}$
- **1 pt :** $\ldots = \begin{vmatrix} \cancel{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cancel{\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^2} & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cancel{\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^{n-1}} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \\ \cancel{\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^{n}} & {x_2}^{n} & {x_3}^{n} & \cdots & {x_n}^{n} \end{vmatrix} = 0$