DS6

EXERCICE 1

Les urnes de Pólya

- On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.
- On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :
  1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
  2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.
- Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage dans un cas particulier.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche, 0 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

- On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E \mid F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Partie I - Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $\{X_1 = 1\}$. En déduire la loi de X_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

- Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 1\} \mid \{S_n = k\}\big)$.

5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier :

$$\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 1\}\big) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b + r + n}$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

- Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $\{S_n = 1\}$ avec les événements $\{X_k = 0\}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

8. Montrer que $\mathbb{P}\big(\{S_n = 1\}\big) = \dfrac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $\mathbb{P}\big(\{S_n = n+1\}\big) = \dfrac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{S_{n+1} = k\} \mid \{S_n = \ell\}\big)$ dans chacun des trois cas suivants :

(i) $\ell \notin \{k-1, k\}$,

(ii) $\ell = k - 1$,

(iii) $\ell = k$.

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$\mathbb{P}\big(\{S_{n+1} = k\}\big) = \frac{k-1}{n+2}\,\mathbb{P}\big(\{S_n = k-1\}\big) + \frac{n+2-k}{n+2}\,\mathbb{P}\big(\{S_n = k\}\big)$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

EXERCICE 2

Résolution d'une équation fonctionnelle

- Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2} \tag{P}$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

- Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

12. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_k$.

13. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

14. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

15. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

16. Montrer que si $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

17. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

- Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

18. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.

19. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

20. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

21. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

22. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

- Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

23. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t)\, dt = -\frac{1}{(x+k)^2}$$

24. En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}\, dt$$

EXERCICE 3

Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

- Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^{T} la transposée de la matrice M et par $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M.

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

- On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)$$

- On admet que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

27. Déduire des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

I.2 - Majoration de l'erreur

28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)$$

29. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|f_k(x) - \sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1+x}{2^k}$$

EXERCICE 4

- On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.
- Dans cet exercice on pourra utiliser sans démonstration que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = n!$.

30. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P, Q) de polynômes de E :

$$\langle P, Q\rangle \ = \ \int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Démonstration.

- Démontrons que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]$

  Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]$.

  × L'application $t \mapsto P(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

$\times$ ▸ $\forall t \in [0, +\infty[$, $\left| P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t} \right| = \left| P(t) \right| \left| Q(t) \right| \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \geqslant 0$

▸ $\left| P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t} \right| = \underset{t \to +\infty}{o} \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \right)$

En effet :

$$\frac{\left| P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t} \right|}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}} = \frac{\left| P(t) \right| \left| Q(t) \right| \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}} = \frac{\left| P(t) \right| \left| Q(t) \right|}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées.

▸ L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $\dfrac{1}{2} > 0$.

Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est (absolument) convergente.

Commentaire

Dans l'énoncé, il est précisé que l'on peut utiliser le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n\, \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On peut se servir de ce point pour démontrer que la fonction $x \mapsto P(x)\, Q(x)\, \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Plus précisément, en notant $m_1 = \deg(P)$ et $m_2 = \deg(Q)$ alors $\deg(PQ) = m_1 + m_2$. Ainsi, le polynôme produit PQ s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la base canonique $(P_i)_{i \in [\![0, m_1 + m2]\!]}$. La fonction $x \mapsto P(x)\, Q(x)\, \mathrm{e}^{-x}$, quant à elle, s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\left(x \mapsto x^i\, \mathrm{e}^{-x}\right)_{i \in [\![0, m_1 + m2]\!]}$. Chacune des fonctions de cette famille étant intégrable sur $[0, +\infty[$, il en est de même de la fonction $x \mapsto P(x)\, Q(x)\, \mathrm{e}^{-x}$.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

  Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} \langle Q, P \rangle &= \int_0^{+\infty} Q(t)\, P(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \qquad \textit{(car la loi $\times$ est commutative)} \\ &= \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite

  Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.
  Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}
& \langle P, \mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 \rangle \\
= \ & \int_0^{+\infty} P(t) \, \Big(\mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 \Big)(t) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \\
= \ & \int_0^{+\infty} P(t) \, \Big(\mu_1 \cdot Q_1(t) + \mu_2 \cdot Q_2(t) \Big) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt && \textit{(par linéarité de l'évaluation en un point)} \\
= \ & \int_0^{+\infty} \big(\mu_1 \, P(t) \, Q_1(t) + \mu_1 \, P(t) \, Q_1(t) \big) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt && \textit{(par distributivité de la loi } \times \textit{ sur la loi } + \textit{)} \\
= \ & \mu_1 \int_0^{+\infty} P(t) \, Q_1(t) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt + \mu_2 \int_0^{+\infty} P(t) \, Q_2(t) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
= \ & \mu_1 \langle P, Q_1 \rangle + \mu_2 \langle P, Q_2 \rangle
\end{aligned}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant :

- × symétrique,
- × linéaire à droite,

elle est linéaire à gauche. On en déduit qu'elle est bilinéaire.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

× Tout d'abord : $\langle P, P \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$.

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\big(P(t)\big)^2 \, \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$.
On en déduit alors, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \ \geqslant \ 0$$

× Supposons maintenant : $\langle P, P \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = 0$. Démontrons : $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

La fonction $t \mapsto \big(P(t) \big)^2 \, \mathrm{e}^{-t}$ est :

- × continue sur $[0, +\infty[$,
- × positive sur $[0, +\infty[$,
- × d'intégrale nulle sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que cette fonction est nulle sur $[0, +\infty[$. Autrement dit :

$$\begin{array}{ll}
& \forall t \in [0, +\infty[, \ \big(P(t) \big)^2 \, \mathrm{e}^{-t} \ = \ 0 \\
\text{donc} & \forall t \in [0, +\infty[, \ \big(P(t) \big)^2 \ = \ 0 \quad \texttt{OU} \quad \mathrm{e}^{-t} \ = \ 0 \\
\text{donc} & \forall t \in [0, +\infty[, \ P(t) \ = \ 0 \qquad \qquad \textit{(car } e^{-t} > 0 \textit{)}
\end{array}$$

Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines. On en déduit : $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\boxed{\text{L'application } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est bien définie et est de plus bilinéaire, symétrique et définie-positive. C'est donc bien un produit scalaire.}}$$

□

31. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $p_F(X^2)$.

Démonstration.
Dans la suite, on note (P_0, P_1, P_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Méthode 1 : on exploite l'orthogonalité de $X^2 - p_F\left(X^2\right)$ à F
  - × Par définition, $p_F(X^2) \in F = \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1)$.
    Il existe donc $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$, $p_F(X^2) = \alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1$.

$$\begin{array}{rcl} p_F(X^2) \in F & \Leftrightarrow & X^2 - p_F(X^2) \in F^{\perp} \\ & \Leftrightarrow & \langle X^2 - p_F(X^2), P_0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle X^2 - p_F(X^2), P_1\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow & \langle X^2 - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big), P_0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle X^2 - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big), P_1\rangle = 0 \end{array}$$

  - × Or :

$$\begin{array}{rcl} \langle P_2 - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big), P_0\rangle & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\ \big(\ P_2(t) - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big)(t) \ \big) \ \ P_0(t)\Big) \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\ \big(\ P_2(t) - \big(\alpha_0 \cdot P_0(t) + \alpha_1 \cdot P_1(t)\big) \ \big) \times 1 \ \Big) \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(t^2 - \big(\alpha_0 + \alpha_1 \, t\big)\Big) \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t} \ dt - \alpha_0 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ dt - \alpha_1 \int_0^{+\infty} t \, \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & 2! \ - \ \alpha_0 \ (0!) \ - \ \alpha_1 \ (1!) \\ & = & 2 - \alpha_0 - \alpha_1 \end{array}$$

  - × De même :

$$\begin{array}{rcl} \langle P_2 - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big), P_1\rangle & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\ \big(\ P_2(t) - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big)(t) \ \big) \ \ P_1(t)\Big) \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\ \big(\ P_2(t) - \big(\alpha_0 \cdot P_0(t) + \alpha_1 \cdot P_1(t)\big) \ \big) \times t \ \Big) \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(t^3 - \big(\alpha_0 \, t + \alpha_1 \, t^2\big)\Big) \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \, \mathrm{e}^{-t} \ dt - \alpha_0 \int_0^{+\infty} t \, \mathrm{e}^{-t} \ dt - \alpha_1 \int_0^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & 3! \ - \ \alpha_0 \ (1!) \ - \ \alpha_1 \ (2!) \\ & = & 6 - \alpha_0 - 2\,\alpha_1 \end{array}$$

× Finalement :

$$p_F(X^2) \in F \iff \langle P_2 - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big), P_0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle P_2 - \big(\alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1\big), P_1\rangle = 0$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_0 & + & \alpha_1 & = & 2 \\ \alpha_0 & + & 2\,\alpha_1 & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_0 & + & \alpha_1 & = & 2 \\ & & \alpha_1 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_0 & = & -2 \\ \alpha_1 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_F(X^2) = -2 \cdot P_0 + 4 \cdot P_1.}$$

Commentaire

- Lorsque l'espace vectoriel F est de dimension r, cette méthode amène à résoudre un système linéaire à r équations et r inconnues.
- Dans une épreuve de concours, une certaine aisance en calcul est demandée. Cependant, c'est plus la méthode que la capacité de calcul qui est évaluée. Ainsi, il y a généralement des simplifications qui permettent d'éviter des calculs inutilement complexes et longs.

- Méthode 2 : on utilise l'expression de p dans une base orthonormale (Q_0, Q_1) de F)
  × On applique tout d'abord l'algorithme de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la famille génératrice (P_0, P_1) de F.
  - On pose tout d'abord : $Q_0 = P_0$.
  - On cherche alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} Q_1 = P_1 + \alpha \cdot Q_0 \\ \langle Q_1, Q_0\rangle = 0 \quad (*) \end{array}\right.$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \langle Q_1, Q_0\rangle & = & \langle P_1 + \alpha \cdot Q_0, Q_0\rangle \\ & = & \langle P_1 + \alpha \cdot P_0, P_0\rangle \\ & = & \langle P_1, P_0\rangle + \alpha\,\langle P_0, P_0\rangle \end{array}$$

On en déduit, d'après $(*)$:

$$\alpha \;=\; -\frac{\langle P_1, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle}$$

Enfin :

$$\langle P_1, P_0\rangle \;=\; \int_0^{+\infty} P_1(t)\,P_0(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} t \times 1 \times \mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; 1! \;=\; 1$$

$$\langle P_0, P_0\rangle \;=\; \int_0^{+\infty} P_0(t)\,P_0(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} 1 \times 1 \times \mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; 0! \;=\; 1$$

Ainsi : $\alpha = -\dfrac{1}{1} = -1$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$Q_0(t) = P_0(t) = 1 \qquad \text{et} \qquad Q_1(t) = P_1(t) - \; P_0(t) = t - 1$$

$$\boxed{\text{La famille } \big(Q_0, Q_1\big) \text{ définie par : } Q_0(X) = 1 \text{ et } Q_1(X) = X - 1 \text{ est une base orthogonale de } F.}$$

× On définit enfin (R_0, R_1), base orthonormale de F, en notant :

$$R_0 = \frac{Q_0}{\|Q_0\|} \quad \text{et} \quad R_1 = \frac{Q_1}{\|Q_1\|}$$

× Il reste alors à calculer $\|Q_0\|$ et $\|Q_1\|$:

$$\begin{aligned} \|Q_0\|^2 &= \langle Q_0, Q_0 \rangle \\ &= \langle P_0, P_0 \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Q_1\|^2 &= \langle Q_1, Q_1 \rangle \\ &= \int_0^{+\infty} (t-1) \times (t-1) \times \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \big(t^2 - 2\,t + 1\big) \times \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t} \, dt - 2 \int_0^{+\infty} t \, \mathrm{e}^{-t} \, dt + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= 2! - 2\ (1!) + (0!) \\ &= 2 - 2 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La famille } \big(R_0, R_1\big) \text{ définie par : } R_0(X) = 1 \text{ et } R_1(X) = X - 1 \text{ est une base orthonormale de } F.}$$

× Finalement, le projeté orthogonal de P_2 sur F est le vecteur $p_F(X^2)$ obtenu par :

$$\begin{aligned} p_F(X^2) &= \langle P_2, R_0 \rangle \cdot R_0 + \langle P_2, R_1 \rangle \cdot R_1 \\ &= \left\langle P_2, \frac{Q_0}{\|Q_0\|} \right\rangle \cdot \frac{Q_0}{\|Q_0\|} \ + \left\langle P_2, \frac{Q_1}{\|Q_1\|} \right\rangle \cdot \frac{Q_1}{\|Q_1\|} \\ &= \langle P_2, Q_0 \rangle \cdot \frac{Q_0}{\|Q_0\|^2} \ + \langle P_2, Q_1 \rangle \cdot \frac{Q_1}{\|Q_1\|^2} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \langle P_2, Q_0 \rangle &= \int_0^{+\infty} t^2 \times \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle P_2, Q_1 \rangle &= \int_0^{+\infty} t^2\ (t-1) \times \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^3 \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \ - \int_0^{+\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= 3! \ - \ 2! \\ &= 6 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p_F(X^2) &= \langle P_2, Q_0\rangle \cdot \frac{Q_0}{\|Q_0\|^2} \ + \ \langle P_2, Q_1\rangle \cdot \frac{Q_1}{\|Q_1\|^2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1} \ + \ 4 \cdot \frac{(X-1)}{1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } p_F(X^2) = -2 + 4\,X.}$$

□

32. Justifier : $\left\| X^2 - p_F\big(X^2\big) \right\|^2 \ = \ \left\| X^2 \right\|^2 - \left\| p_F\big(X^2\big) \right\|^2$ puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \big(x^2 - ax - b\big)^2 \ \mathrm{e}^{-x} \ dx$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$X^2 \ = \ p_F(X^2) \ + \ \big(\, X^2 - p_F(X^2)\,\big)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|X^2\|^2 &= \left\| p_F(X^2) + \big(X^2 - p_F(X^2)\big) \right\|^2 \\ &= \left\| p_F(X^2) \right\|^2 + \left\| \big(X^2 - p_F(X^2)\big) \right\|^2 \qquad \textit{(par théorème de Pythagore car } p_F(X^2) \in F \textit{ et } X^2 - p_F(X^2) \in F^{\perp}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \|\, X^2 - p_F(X^2)\,\|^2 \ = \ \|X^2\|^2 \ - \ \|p_F(X^2)\|^2.}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \big(t^2 - at - b\big)^2 \ \mathrm{e}^{-t} \ dt &= \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \big(t^2 - at - b\big) \ \big(t^2 - at - b\big) \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ &= \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \langle X^2 - \big(a\,X + b\big), X^2 - \big(a\,X + b\big)\rangle \\ &= \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left\| X^2 - \big(a\,X + b\big) \right\|^2 \\ &= \inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \|\ X^2 - P\ \|^2 \\ &= \Big(\mathrm{d}\,\big(X^2, \mathbb{R}_1[X]\big)\ \Big)^2 \\ &= \|\ X^2 - p_F(X^2)\ \|^2 \\ &= \|X^2\|^2 \ - \ \|p_F(X^2)\|^2 \end{aligned}$$

- Enfin : $\left\|X^2\right\|^2 = \langle X^2, X^2\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^4\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = 4! = 24.$

  Et :

$$\begin{aligned}
\left\|p_F(X^2)\right\|^2 &= \|-2+4X\|^2 \\
&= \langle -2+4X, -2+4X\rangle \\
&= \langle -2, -2\rangle + 2\,\langle -2, 4X\rangle + \langle 4X, 4X\rangle \\
&= (-2)^2\,\langle 1, 1\rangle - 16\,\langle 1, X\rangle + 16\,\langle X, X\rangle \\
&= 4\int_0^{+\infty} t^0\ \mathrm{e}^{-t}\ dt - 16\int_0^{+\infty} t^1\ \mathrm{e}^{-t}\ dt + 16\int_0^{+\infty} t^2\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
&= 4\times 0! - 16\times 1! + 16\times 2! \\
&= 4 - 16 + 32 \\
&= 20
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \Big(\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right)\Big)^2 = 24 - 20 = 4.}$$

□

EXERCICE 5

- Pour n entier, $n \geqslant 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes x_1, …, x_n par :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

- L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \big(x_j - x_i\big)$.

33. Calculer $V(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes x_1, x_2, …, x_n deux à deux distincts.

Démonstration.

- Par définition :

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

$$\boxed{V(x_1, x_2) = x_2 - x_1}$$

- Supposons qu'il existe deux entiers distincts de $[\![1,n]\!]$ notés i, j et tels que $x_i = x_j$. Dans ce cas, les colonnes i et j de la matrice dont on calcule le déterminant sont égales. On en conclut :

$$V(x_1, \dots, x_n) \ = \ 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dans le cas où les nombres } x_1, \dots, x_n \text{ ne sont pas deux à deux distincts :}\\ V(x_1,\dots,x_n) \ = \ 0 \ = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i).\end{array}}$$

□

Dans la suite, x_1, x_2, ..., x_n sont n nombres complexes deux à deux distincts.

34. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.
Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.
Démontrer par récurrence que $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$.

Démonstration.

- Dans toute la suite, pout tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice dont on calcule le déterminant.
- Soit $t \in \mathbb{R}$. En développant suivant la dernière colonne, on obtient :

$$V(x_1,\dots,x_{n-1},t) \ = \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & t \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_{n-1}}^2 & t^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_{n-1}}^{n-1} & t^{n-1} \end{vmatrix} \ = \ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n} \, t^{k-1} \, \Delta_{k,n}$$

- Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) \ = \ (-1)^{n+1} \, \Delta_{1,n} \ + \ (-1)^{n+2} \, \Delta_{2,n} \, t \ + \ \dots \ + \ (-1)^{n+n} \, \Delta_{n,n} \, t^{n-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } P \text{ est bien une fonction polynomiale de degré au plus } n-1.\\ \text{Le coefficient devant } t^{n-1} \text{ est } \Delta_{n,n} = V(x_1,\dots,x_{n-1}).\end{array}}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\mathscr{P}(n)$ où :

$$\mathscr{P}(n) \ : \ \begin{array}{l}\text{pour tout } n\text{-uplet } (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n \text{ de complexes deux à deux distincts,}\\ V(x_1,\dots,x_n) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)\end{array}$$

  ▸ **Initialisation** :
  En question 33, on a démontré : $V(x_1,x_2) = x_2 - x_1$.
  Par ailleurs : $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 2} (x_j - x_i) \ = \ \prod_{i=1}^{1} \left(\prod_{j=i+1}^{2} (x_j - x_i) \right) \ = \ \prod_{j=2}^{2} (x_j - x_1) = x_2 - x_1.$
  D'où $\mathscr{P}(2)$.

- **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
  Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ un $(n+1)$-uplet de complexes deux à deux distincs. Considérons alors :

$$Q(X) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & X \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} & X^{n-1} \\ {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n & X^n \end{vmatrix} \in \mathbb{K}[X]$$

  × Comme démontré en début de question, le polynôme Q est de degré n et de coefficient dominant :

$$\Delta_{n+1,n+1} \;=\; V(x_1, \dots, x_n) \;=\; \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)}$$

  × De plus, x_1, …, x_n sont des racines de Q : en effet, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Q(x_i)$ est le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales donc est nul. Comme ces racines sont toutes distinctes alors il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$Q(X) \;=\; R(X) \times \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

  Enfin, comme Q est de degré n, alors R est de degré 0 : c'est une constante égale au coefficient dominant de Q, c'est-à-dire $V(x_1, \dots, x_n)$.

  × Finalement :

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_{n+1}) &= Q(x_{n+1}) && \textit{(par définition)} \\ &= V(x_1, \dots, x_n) \times \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \times \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{j=2}^{n} \left(\prod_{i=1}^{j-1} (x_j - x_i) \right) \times \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{1} (x_2 - x_i) \times \prod_{i=1}^{2} (x_3 - x_i) \times \ldots \times \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \right) \times \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{j=2}^{n+1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} (x_j - x_i) \right) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathscr{P}(n)$.

□

35. **Première application**

Calculer le déterminant de la matrice $A = \left(i^j\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \dots, n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^{n-1} & 1^n \\ 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ 3^1 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ n^1 & n^2 & \cdots & n^{n-1} & n^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ n & n^2 & \cdots & n^{n-1} & n^n \end{vmatrix} \\
&= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^1 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ n & n^2 & \cdots & n^{n-1} & n^n \end{vmatrix} && \textit{(en factorisant par 2 dans la } 2^{\text{ème}} \textit{ ligne)} \\
&= \dots \\
&= \left(2 \times \dots \times n\right) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^1 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\ 1 & 3^1 & \cdots & 3^{n-2} & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & n^1 & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1} \end{vmatrix} && \textit{(en factorisant par 2 dans la } 2^{\text{ème}} \textit{ ligne)}
\end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$V(1,\ldots,n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^1 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\ 1 & 3^1 & \cdots & 3^{n-2} & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & n^1 & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(car pour toute matrice carrée $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(B) = \det\left({}^tB\right)$*)*

- On en conclut :

$$\det(A) = n!\, V(1,\ldots,n)$$

$$= n! \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (j-i)$$

(d'après la question 34 car les éléments de la famille $(k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ *sont deux à deux distincts)*

$$= n! \prod_{j=2}^{n} \left(\prod_{i=1}^{j-1} (j-i)\right)$$

$$= n! \prod_{j=2}^{n} \Big((j-1)\times(j-2)\times\ldots\times\big(j-(j-1)\big)\Big)$$

$$= n! \prod_{j=2}^{n} (j-1)!$$

$$= n! \prod_{j=1}^{n-1} j!$$

$$= \prod_{j=1}^{n} j!$$

$$= 1\times\big(1\times2\big)\times\big(1\times2\times3\big)\times\ldots\times\big(1\times\ldots\times n\big)$$

$$= 1^n \times 2^{n-1}\times 3^{n-2}\times\ldots\times n^2\times n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \det(A) = \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k}}$$

□

36. **Deuxième application**

Donner un exemple de n nombres complexes a_1, a_2, …, a_n deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} {a_k}^2 = 0$.

Soit n nombre complexes x_1, x_2, …, x_n deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^3$, …, $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^n$ est non nulle.

On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

Démonstration.

- Il s'agit d'exhiber une famille de termes dont la somme des carrés est nulle. Or on sait que la famille constituée des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est de somme nulle. On peut alors obtenir le résultat souhaité en considérant la famille dont le carré de chaque terme est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

  Autrement dit, on considère la famille $(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ définie par : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_k = \mathrm{e}^{i \, \frac{k\,\pi}{n}}$.

  On construit ainsi une famille constituée de n racines $\big(2n\big)^{\text{ème}}$ de l'unité successives. En particulier, ces nombres sont deux à deux distincts. De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\,\frac{k\,\pi}{n}}\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\,\pi}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\,\frac{2\,\pi}{n}}\right)^k \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{i\,\frac{2\,\pi}{n}}\right)^1 - \left(\mathrm{e}^{i\,\frac{2\,\pi}{n}}\right)^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{i\,\frac{2\,\pi}{n}}} \\
&= \left(\mathrm{e}^{i\,\frac{2\,\pi}{n}}\right) \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{i\,\frac{2\,\pi}{n}}\right)^{n}}{1 - \mathrm{e}^{i\,\frac{2\,\pi}{n}}} \\
&= \left(\mathrm{e}^{i\,\frac{2\,\pi}{n}}\right) \frac{1 - 1}{1 - \mathrm{e}^{i\,\frac{2\,\pi}{n}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Commentaire

- Dans cette question, on fait en sorte qu'une somme de carrés de termes s'écrive comme la somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité. De la même manière, on aurait pu exhiber une famille de termes 2 à 2 distincts, dont la somme des cubes est nulle. Pour ce faire, il suffit de considérer la famille $(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ définie par :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \ a_k = \mathrm{e}^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{3\,n}}$$

  On peut procéder de même pour trouver une famille de termes 2 à 2 distincts dont la somme des élévations à la puissance 4 (ou 5, 6, ..., n) est nulle.

- Si c'est l'élévation au carré qui est mise en avant dans l'énoncé c'est pour insister sur le fait que l'on travaille avec des nombres complexes. Si $(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ vérifie :

$$\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \ = \ 0$$

  alors chacun des termes de la famille $(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est nul puisque une somme de terme positif ne peut être nulle que si chacun des termes est nul. On ne peut donc pas trouver de famille de réels vérifiant la propriété demandée.

- Pour la deuxième partie de la question, on procède par l'absurde.
  Supposons qu'aucune des sommes n'est non nulle. Autrement dit, supposons que toutes les sommes sont nulles.

$$\begin{aligned}
V(x_1,\dots,x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{x_1} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ {x_1}^2 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^3 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} && \textit{(on multiplie le déterminant par } \frac{1}{x_1} \times x_1 \textit{ et la multiplication par } x_1\ (\neq 0) \textit{ est alors reportée sur la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne par linéarité du déterminant par rapport à cette colonne)} \\
&= \frac{1}{x_1\ x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 & \cdots & 1 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^3 & {x_2}^3 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n} & {x_2}^{n} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} && \textit{(en agissant de même pour la } 2^{\text{ème}} \textit{ colonne)} \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{x_1 \times \dots \times x_n} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \\ {x_1}^{n} & {x_2}^{n} & {x_3}^{n} & \cdots & {x_n}^{n} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

  On obtient ainsi :

$$\big(x_1 \times \dots \times x_n\big)\ V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \\ {x_1}^{n} & {x_2}^{n} & {x_3}^{n} & \cdots & {x_n}^{n} \end{vmatrix}$$

En isolant le déterminant, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
{x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
{x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \\
{x_1}^n & {x_2}^n & {x_3}^n & \cdots & {x_n}^n
\end{vmatrix} \\
= &\begin{vmatrix}
\sum\limits_{k=1}^{n} x_k & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \\
\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^n & {x_2}^n & {x_3}^n & \cdots & {x_n}^n
\end{vmatrix} \qquad \textit{(en ajoutant à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne chacune des autres colonnes)} \\
= &\begin{vmatrix}
0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
0 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \\
0 & {x_2}^n & {x_3}^n & \cdots & {x_n}^n
\end{vmatrix} \qquad \textit{(par hypothèse)} \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

On a donc démontré :

$$V(x_1, \ldots, x_n) \; = \; \frac{1}{x_1 \times \ldots \times x_n} \times 0 \; = \; 0$$

ce qui est absurde car, comme les termes de la famille $(x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont 2 à 2 distincts, alors $V(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, l'une au moins des sommes listées est non nulle.}}$$

□