DS6 (Centrale II 2023)

Quelques applications de la formule de Stirling

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\, dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

- **1 pt : $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc intégrale impropre seulement en $+\infty$**
- **1 pt : $h(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$**
- **1 pt : théorème de négligeabilité écrit convenablement**

2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

- **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \underline{f}_t(x)$ est continue sur le segment $[0, 1]$**
- **1 pt : $f(-x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)(-x)^2}}{t^2+1}\, dt = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\, dt = f(x)$**
- **1 pt : $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt = [\ \arctan(t)\ ]_0^1 = \frac{\pi}{4}$**

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^1 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $\underline{f}_t : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
  - × **1 pt : $\underline{f}_t{}'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2\,(1+t^2)}$**
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{f}_t^{(0)}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ intégrable sur $[0, 1]$**
  - × **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{f}'_t(x)$ est continue (p. m.) sur $[0, 1]$**
  - × **1 pt : pour tout $x \in [a, b]$, $\left|\ \underline{f}'_t(x)\ \right| = \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\right| = \ldots \leqslant 2b$**
    et $\varphi : t \mapsto 2b$ est intégrable sur $[0, 1]$
  - × **0 pt : $f'(x) = -2 \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2\,(1+t^2)}\, dt$**

4. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : la fonction $u : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive U de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $g(x) = U(x) - U(0)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
- **0 pt : $g'(x) = U'(x) = u(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$**

5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2\, g'(x)\, g(x)$$

- **1 pt : on pose** $\boxed{u = x\,t}$
  $t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0$**,** $t = 1 \ \Rightarrow\ u = x$**,** $dt = \frac{1}{x}\ du$
- **1 pt :** $f'(x) = -2 \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2\,(1+t^2)}\ dt$
  $= -2 \displaystyle\int_0^x \cancel{x}\mathrm{e}^{-x^2\,(1+(\frac{u}{x})^2)} \frac{du}{\cancel{x}} = -2 \int_0^x \mathrm{e}^{-(x^2+u^2)}\ du = -2\ \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\ du = -2\, g'(x)\, g(x)$

6. Vérifier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$$

- **1 pt : $f' = \left(g^2\right)'$ donc $\left(f + g^2\right)' = 0$ donc $f + g^2$ est constante**
- **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g^2(x) = f(0) + g^2(0) = \dfrac{\pi}{4} + 0$**

7. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } x \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : Pour tout $t \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1} \ =\ 0$**
  - × **1 pt : la fonction $\ell : t \mapsto 0$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.**
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **0 pt : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{f}_t(x)$ est continue (p. m.) sur $[0,1]$.**
  - × **1 pt : $\left|\underline{f}_t(x)\right| \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-x^2}$ et $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ intégrable sur $[0,1]$**

  OU 3 pts : $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ + croissance de l'intégrale + théorème d'encadrement
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$, ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$**

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right)$$

II.A - Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

8. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

- **1 pt :** $h : t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t^2}$ **est continue sur** $[0,+\infty[$ **donc intégrale impropre seulement en** $+\infty$
- **1 pt :** $h(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- **0 pt : théorème de négligeabilité écrit convenablement**

9. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $I_n = n\,!$ pour tout entier naturel n.

- **1 pt : IPP sous réserve de convergence**
- **0 pt :** $\displaystyle\int_0^x \ t^n\mathbf{e}^{-t}\ dt = \Big[\ -t^n\mathbf{e}^{-t}\ \Big]_0^{+\infty} + n\ \int_0^{+\infty}\ t^{n-1}\mathbf{e}^{-t}\ dt$
- **1 pt :** $\Big[\ -t^n\mathbf{e}^{-t}\ \Big]_0^{+\infty} = 0$ **ce qui lève la réserve**
- **1 pt :** $I_n = n\ I_{n-1}$
- **1 pt : par récurrence :** $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = n!$

II.B - Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \qquad \text{(II.1)}$$

10. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente :

$$n! = \sqrt{n}\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\ \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\ \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n\ \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\ dy$$

- **1 pt :** $\displaystyle\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\ \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n\mathbf{e}^{-y\sqrt{n}}\ dy = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\ \left(n\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\mathbf{e}^{-n-y\sqrt{n}}\sqrt{n}\ dy$
- **1 pt : on pose** $\boxed{\ t = n\ (1+\frac{y}{\sqrt{n}})\ }$

  $y = -\sqrt{n}\ \Rightarrow\ t = 0$**,** $y = +\infty\ \Rightarrow\ t = +\infty$**,** $dy = \frac{1}{\sqrt{n}}\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\ \left(n\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\mathbf{e}^{-n-y\sqrt{n}}\sqrt{n}\ dy = \int_0^{+\infty}\ t^n\mathbf{e}^{-t^2}\ dt = I_n$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n},+\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n},+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$. On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1+\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n\ \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

11. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y\in\mathbb{R}$, préciser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(y)$.

Pour $x\in\,]-1,+\infty\,[\ \setminus\ \{0\}$ on pose $q(x) = \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

- **1 pt : pour** n **suffisamment grand (**$n\geqslant N = \lfloor y^2\rfloor+1$**),** $f_n(y) = \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n\mathbf{e}^{-y\sqrt{n}}$
- **1 pt :** $n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} = n\ \left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - y\sqrt{n} = -\frac{y^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$
- **1 pt : donc** $f_n(y)\to\mathbf{e}^{-\frac{y^2}{2}}$

12. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,+\infty[$ que l'on convient de noter également q.

- **1 pt :** $\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x-(x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2))}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \underset{x\to0}{o}(1) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$

13. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+u\,x}\,du$.

- **1 pt : pour $x > -1$, et $x \neq 0$,** $\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,du = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{xu}{1+ux}\,du = \frac{1}{x}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+ux}\right)\,du$
- **1 pt :** $\ldots = \displaystyle\frac{1}{x}\left[\, u - \frac{\ln(1+ux)}{x}\,\right]_0^1 = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right) = q(x)$
- **1 pt : si $x = 0$ alors** $\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,du = \frac{1}{2} = q(0)$

14. En déduire que q est une fonction décroissante sur $]-1,+\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+,\ f_n(y) \ \leqslant\ (1+y)\,\mathrm{e}^{-y} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}_-^*,\ f_n(y) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-y^2/2}$$

- **1 pt : si $x \leqslant y$, pour tout $u \in [0,1]$, $1+ux \leqslant 1+uy$ et $\frac{1}{1+uy} \leqslant \frac{1}{1+ux}$**
  donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+uy}\,du \ \leqslant\ \int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,du$
- **1 pt : si $y \geqslant -\sqrt{n}$: $f_n(y) = \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathbf{e}^{-y\sqrt{n}} = \mathbf{e}^{-n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)} = \mathbf{e}^{-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\mathbf{e}^{-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)}$**
- **1 pt : si $y < 0$ alors $\frac{1}{2} = q(0) \leqslant q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)$ et $f_n(y) \leqslant \mathbf{e}^{-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} \leqslant \mathbf{e}^{-y^2/2}$**
- **1 pt : si $y \geqslant 0$ alors $\frac{y}{\sqrt{n}} \leqslant y$ et $q(y) \leqslant q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)$ donc : $f_n(y) \leqslant \mathbf{e}^{-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} \leqslant \mathbf{e}^{-y^2 q(y)}$**

15. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

- **1 pt : d'après Q10 :** $\displaystyle\frac{I_n}{\sqrt{n}\,\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n} = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathbf{e}^{-y\sqrt{n}}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$
- **0 pt : on cherche la limite en $+\infty$ de** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } n \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout y, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{e}^{-\frac{t^2}{2}}$**
  - × **0 pt : la fonction $t \mapsto \mathbf{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue (par morceaux) sur $]-\infty,+\infty[$**
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **0 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $]-\infty,+\infty[$.**
  - × **1 pt : $\left|\, f_n(t)\,\right| \ \leqslant\ \varphi(t)$ avec $\varphi : t \mapsto \begin{cases} (1+y)\mathbf{e}^{-y} & \textbf{si } y \geqslant 0 \\ \mathbf{e}^{-y^2/2} & \textbf{si } y < 0 \end{cases}$**
  - × **1 pt : la fonction φ est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ car $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\varphi(t) \underset{t\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$**

II.C - Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{n}}{n!} \qquad v_n = \ln(u_n) \qquad w_n = v_{n+1} - v_n$$

16. Vérifier que $w_n = \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum\ w_n$.

- **1 pt :** $v_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln(n) - n - \ln(n!)$

- **1 pt :** $w_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1$
  $= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- **1 pt :** $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ **donc, par théorème d'équivalence des SATP,** $\sum w_n$ **CV**

II.C.1) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

17. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ (1-\varepsilon)\, b_n \ \leqslant\ a_n \ \leqslant\ (1+\varepsilon)\, b_n$$

- **1 pt :** $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$**, soit** $\varepsilon > 0$ **il existe un** n_0 **tel que si** $n \geqslant n_0$ **alors** $\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$
- **1 pt : qui s'écrit** $(1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n \quad (**)$

18. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

- **1 pt :** $\sum b_n$ **converge et** $0 \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n$ **donc** $\sum a_n$ **converge**
- **1 pt : Soit** $n \geqslant n_0$ **et** $N \geqslant n$**, la sommation de la relation (**) de** n **à** N **et le passage à la limite quand** N **tend vers l'infini donne** $(1-\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} b_k$

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \ \leqslant\ \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\, dt \ \leqslant\ \frac{1}{n^2}$.

- **1 pt : pour tout** $t \in [n, n+1]$ **on a** $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$
- **1 pt : donc, par croissance de l'intégrale** $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{n^2}$

20. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \to \infty$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\, dt$ **et par sommation** $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{n}$ **+ théorème d'encadrement écrit correctement**

II.C.3)

21. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \to +\infty$.

- **1 pt : d'après la question Q16** $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$
- **1 pt : d'après la question Q18** $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
- **1 pt :** $\ldots \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n}$ **d'après la question Q20**

22. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right)$$

- **1 pt : on remarque** $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} w_k = \big(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\big) - v_n$
- **1 pt : d'après Q15** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\ln\big(\sqrt{2\,\pi}\big)$
- **1 pt :** $v_n = -\ln\big(\sqrt{2\,\pi}\big) + \sum\limits_{k=n}^{+\infty} w_k = -\ln\big(\sqrt{2\,\pi}\big) + \dfrac{1}{12\,n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **d'après Q21**
- **1 pt : . . .**

III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

- Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.
- Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\big(\{X_n = -1\}\big) = q, \quad \text{où } p \in\ ]0,1[\ \text{ et } q = 1-p,\ q = 1-p$$

- Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.
- L'abscisse S_n du point à l'issue du n-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \end{cases}$$

- On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geqslant 2$, quel que soit l'entier k compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\sum\limits_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum\limits_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.
- On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.
- On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (c'est-à-dire $S_k = 0$) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (c'est-à-dire $k = 2n$).
- On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \mathbb{P}\big(\{S_{2n} = 0\}\big) \quad \text{et} \quad b_n = \mathbb{P}\big(\{S_1 \neq 0\} \cap \cdots \cap \{S_{2n-1} \neq 0\} \cap \{S_{2n} = 0\}\big)$$

et les séries entières :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n} \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^{2n}$$

III.A -

23. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}\ (X_1 + 1)$?

En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.

- **1 pt :** $U_1(\Omega) = \dfrac{1}{2}(X_1+1)(\Omega) = \{0,1\}$ **donc** $U_1 \sim \mathcal{B}(s)$ **où** $s = \mathbb{P}\big(\{U_1 = 1\}\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{U_1 = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_1 = 1\}\big) = p$

- **1 pt :** $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k \sim \mathcal{B}(n,p)$ **par indépendance (lemme des coalitions)**
- **0 pt :** $S_n = 2\,B_n - n$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(S_n) = 2\,\mathbb{E}(B_n) - n = 2np - n = (2p-1)\,n$ **et** $\mathbb{V}(S_n) = 4\,\mathbb{V}(B_n) = 4\,npq$

24. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument le nombre n de lancers et renvoie le nombre de retours au point à l'origine.

On pourra utiliser la fonction Python `random.random()` qui renvoie un nombre flottant pseudo-aléatoire dans l'intervalle $[0,1[$.

- **3 pts :**

```python
import random
def nombre_retours_origine(n):
    count = 0
    position = 0
    for _ in range(n):
        mouvement = random.choice([-1, 1]) # -1 pour la gauche, 1 pour la droite
        position += mouvement
        if position == 0:
            count += 1
    return count
```

25. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dbinom{2n}{n}\, p^n\, q^n$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{S_{2n} = 0\}\big) = \mathbb{P}\big(\{2B_{2n} - 2n = 0\}\big) = \mathbb{P}\big(\{B_{2n} = n\}\big)$
- **1 pt :** $B_{2n} \sim \mathcal{B}(2n,p)$ **donc** $\mathbb{P}\big(\{B_{2n} = n\}\big) = \dbinom{2n}{n} p^n q^n$

26. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n\, x^{2n}$.

- **1 pt :** $\left| \dfrac{a_{n+1}\, x^{2n+2}}{a_n\, x^{2n}} \right| = \dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} pq\ x^2 = \dfrac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} pq\ x^2 = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} pq\ x^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4\,pq$
- **1 pt : si** $x^2 < 1$ **càd** $x < \frac{1}{2\sqrt{pq}}$**, la SN** $\sum\ a_n\ x^{2n}$ **ACV donc** $\mathrm{R}_{\mathrm{cv}}\left(\sum\ a_n\ x^{2n}\right) \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}$
- **1 pt : si** $x^2 < 1$ **càd** $x > \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}$**, la SN** $\sum\ a_n\ x^{2n}$ **GDV donc** $\mathrm{R}_{\mathrm{cv}}\left(\sum\ a_n\ x^{2n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}$

27. Pour quelles valeurs de p l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$?

- **1 pt :** $\frac{1}{2\sqrt{pq}} > 1 \;\Leftrightarrow\; pq < \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; p(1-p) < \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{1}{4} - p + p^2 \;\Leftrightarrow\; 0 < \left(\frac{1}{2} - p\right)^2$
- **1 pt : si** $p \neq \frac{1}{2}$ **alors** $R > 1$ **et** $A(1)$ **défini**
- **1 pt : si** $p = \frac{1}{2}$ **alors** $R = 1$ **et** $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi\, n}}$ **et** $\sum\ a_n$ **DV**

28. En utilisant le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

- **1 pt :** $\forall x \in\,]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dbinom{2n}{n} \dfrac{1}{2^{2n}}\ x^n$
- **1 pt : pour** $x \in\,]-\frac{1}{2\sqrt{pq}}, \frac{1}{2\sqrt{pq}}[$, $A(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n x^{2n} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \left(4pqx^2\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$

III.B -

29. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\, a_{n-k}$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

30. En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de x elle est valable.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

31. Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pq\,x^2}$ pour x dans un intervalle à préciser.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

32. Pour quelles valeurs de p l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

III.C -

33. En déduire que la probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p - q|$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

IV Loi de l'arcsinus

- Dans cette partie, on reprend les notations de la partie III et on se place dans le cas particulier $p = q = \frac{1}{2}$.
- Dans ce cas tous les « chemins » de la marche aléatoire sont équiprobables. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\,(x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n,\ \mathbb{P}\big(\{S_1 = x_1\} \cap \{S_2 = x_1 + x_2\} \cap \dots \cap \{S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n\}\big) = \frac{1}{2^n}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse désormais au moment de la dernière visite en 0 de la marche aléatoire au cours des $2n$ premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire T_n définie par :

$$T_n = \max\ \{0 \leqslant k \leqslant 2n \mid S_k = 0\}$$

- On admet dans la suite que T_n est une variable aléatoire discrète, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

IV.A - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur n toute ligne polygonale reliant les points $(0, S_0)$, $(1, S_1)$, …, (n, S_n). Dans cette sous-partie **IV.A**, n, x et y sont des entiers naturels tels que $n \neq 0, x \neq 0$

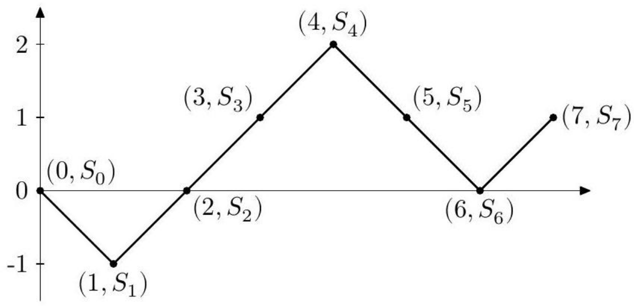

Fig. 1 Un chemin de longueur 7

et $y \neq 0$.

IV.A.1) On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0,0)$ au point (n,x).

34. Vérifier que si $x \in [\![-n, n]\!]$ et $n - x$ est un entier pair alors :

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \quad \text{où} \quad a = \frac{n+x}{2}$$

et que $N_{n,x} = 0$ dans le cas contraire.

35. En déduire $\mathbb{P}\big(\{S_n = x\}\big)$.

36. Retrouver ce résultat à l'aide d'une variable aléatoire bien choisie.

IV.A.2) Principe de réflexion

37. Montrer que le nombre de chemins reliant $(0, x)$ à (n, y), tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0 , est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à (n, y).

IV.A.3)

38. En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à (n, x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à :

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}$$

39. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big(\{S_1 > 0\} \cap \cdots \cap \{S_{2n-1} > 0\} \cap \{S_{2n} = 2k\}\big) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}\big(\{S_{2n-1} = 2k-1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{S_{2n-1} = 2k+1\}\big)\Big)$$

40. En remarquant : $\{S_{2n} > 0\} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \{S_{2n} = 2k\}$, démontrer :

$$\mathbb{P}\big(\{S_1 > 0\} \cap \cdots \cap \{S_{2n-1} > 0\} \cap \{S_{2n} > 0\}\big) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{S_{2n} = 0\}\big)$$

puis :

$$\mathbb{P}\big(\{S_1 \neq 0\} \cap \cdots \cap \{S_{2n-1} \neq 0\} \cap \{S_{2n} \neq 0\}\big) = \mathbb{P}\big(\{S_{2n} = 0\}\big)$$

IV.B - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

41. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}\big(\{T_{2n} = 2k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{S_{2k} = 0\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{S_1 \neq 0\} \cap \cdots \cap \{S_{2n-2k} \neq 0\}\big)$$

42. En déduire que pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}\big(\{T_{2n} = 2k\}\big) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}$$

IV.C - Dans cette sous-partie IV.C α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$.

43. On définit la fonction f par $f(t) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } t \in [0, \alpha[\\ \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in [\alpha, \beta] \\ f(\beta) & \text{si } t \in]\beta, 1] \end{cases}$.

En utilisant des sommes de Riemann adaptées à f, montrer :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\, dt$$

44. À l'aide de la partie II justifier qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers 1 telle que :

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{8n}\right)$$

45. En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor}\frac{1}{\sqrt{k\,(n-k)}}\right) = 0$$

46. Montrer alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right\}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\sqrt{\beta}\right) - \arcsin\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)$$

Ce résultat a des conséquences assez surprenantes au premier abord. Par exemple $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{T_{2n}}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\right\}\right) = \dfrac{1}{2}$ s'interprète ainsi : si deux personnes parient chacune un euro chaque jour de l'année à un jeu de hasard équilibré, alors avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, un des deux joueurs sera en tête du premier juillet au 31 décembre.