DS6

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note : $B = \begin{pmatrix} A & 2\,A \\ A & 2\,A \end{pmatrix}$.

Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, on note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

2. Montrer que 0 est valeur propre de B et donner la dimension de l'espace propre associé.

3. Soit λ une valeur propre de A et soit $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à λ.
Exhiber un vecteur propre de B.

4. Démontrer que la matrice B est diagonalisable.

Cas où A est diagonalisable

On suppose dans cette partie que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonalisable qui possède n valeurs propres distinctes.

5. En s'inspirant de l'étude précédente, démontrer que la matrice B est diagonalisable.

PROBLÈME 1

Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions.

Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)}\ dt$$

6. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t(1-itx)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, en tant que composition de l'application polynomiale $t \mapsto -t(1-itx)$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, et de l'application exponentielle, continue sur $\mathbb{C}$**
- **1 pt : $|\mathrm{e}^{-t(1-itx)}| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$**
- **1 pt : mise en place correcte du théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives**

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

7. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

- **1 pt :** $|t^p\ \mathrm{e}^{-t}| = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$ **ou** $|t^p\ \mathrm{e}^{-t}| = \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ t})$
- **0 pt : mise en place correcte du théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives (1 pt s'il n'a pas été mis dans la question précédente)**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^a t^{p+1}\mathrm{e}^{-t}\ dt = \left[-t^{p+1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a - \int_0^a (-\mathrm{e}^{-t})(p+1)t^p\ dt = -a^{p+1}\mathrm{e}^{-a} + (p+1)\int_0^a \mathrm{e}^{-t}t^p\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} a^{p+1}\mathrm{e}^{-a} = 0$ **et** $\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p$.

On met 2 points si l'IPP réalisée directement sur l'intervalle $[0, +\infty[$ **est justifiée**

8. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.

- **1 pt :** $\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p = \ldots = (p+1) \times \ldots \times 1\ \Gamma_0$
- **1 pt :** $\Gamma_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\ du = \left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{+\infty} = 1$

9. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $(x, p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

- **1 pt :** $v_x : t \mapsto \mathrm{e}^{-t(1-itx)}$ **et** $t \mapsto |v_x(t)| = |\mathrm{e}^{-t+it^2x)}| = \mathrm{e}^{-t}$ **est intégrable**
- **3 pt :**
  - × **1 pt :** $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, **l'application** $u_t : x \mapsto \mathrm{e}^{-t(1-itx)}$ **est de classe** $\mathscr{C}^p$ **sur** $\mathbb{R}$
  - × **1 pt :** $u_t^{(p)}(x) = \left(it^2\right)^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{it^2x}$
  - × **1 pt : hypothèse de domination :** $|u_t^{(p)}(x)| = t^{2p}\mathrm{e}^{-t}$ **et** $t \mapsto t^{2p}\mathrm{e}^{-t}$ **est intégrable**
- **0 pt :** $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(p)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_t^{(p)}(x)\ dt = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p}\mathrm{e}^{-t(1-itx)}\ dt$

10. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}\, x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

- **1 pt :** $\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p}{p!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p}\mathrm{e}^{-t}\ dt = \frac{i^p}{p!}\Gamma_{2p} = i^p\frac{(2p)!}{p!}$
- **1 pt :** $\dfrac{\left|\dfrac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}\right|}{\left|\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}\right|} = \frac{(2(p+1))!}{(p+1)!} \times \frac{p!}{(2p)!} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} 4p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- **1 pt : on en déduit** $R = 0$ **et** f **n'est donc pas développable en série entière en** 0 **(sinon, au voisinage de** 0**,** f **serait égale à la somme de cette série entière qui diverge)**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(1-ikx)}$.

11. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $(x, p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.

- **0 pt : pour tout** $k \in \mathbb{N}$, **on note** $g_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-k(1-ikx)}$
- **1 pt : la fonction** g_k **est de classe** $\mathscr{C}^p$ **et** $\forall x \in \mathbb{R},\ g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p\mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^{ik^2x}$
- **1 pt : pour tout** $p \in \mathbb{N}$, $\|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p}\mathrm{e}^{-k}$ **et la série** $\sum \|g_k^{(p)}\|_\infty$ **converge par comparaison à la série de Riemann d'exposant** 2

- **1 pt :** $g^{(p)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = i^p \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathbf{e}^{-k}\mathbf{e}^{ik^2x}$

12. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N},\ \left| g^{(p)}(0) \right| \geqslant p^{2p}\ \mathrm{e}^{-p}$.

- **1 pt :** $\left|g^{(p)}(0)\right| = \left|i^p \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathbf{e}^{-k}\right| = |i|^p \left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathbf{e}^{-k}\right|$
- **1 pt :** $\left|g^{(p)}(0)\right| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathbf{e}^{-k} = p^{2p}\mathbf{e}^{-p} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{+\infty} \underbrace{k^{2p}\mathbf{e}^{-k}}_{\geqslant 0} \geqslant p^{2p}\,\mathbf{e}^{-p}$

13. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{p\geqslant 0} \dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}\, x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?

- **1 pt :** $a_p = \left|g^{(p)}(0)\right| \geqslant p^{2p}\ \mathbf{e}^{-p} = b_b$ **ainsi** $R_a \leqslant R_b$
- **1 pt :** $\dfrac{\left|\dfrac{(p+1)^{2(p+1)}\mathbf{e}^{-(p+1)}}{(p+1)!}\right|}{\left|\dfrac{p^{2p}\mathbf{e}^{-p}}{p!}\right|} = \left(1+\frac{1}{p}\right)^{2p}(p+1)\mathbf{e}^{-1} \geqslant p\mathbf{e}^{-1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **donc** $R_a \leqslant R_b = 0$
- **1 pt :** g **n'est donc pas développable en série entière en** 0 **(sinon, au voisinage de** 0, g **serait égale à la somme de cette série entière qui diverge)**

Partie II – Le théorème de Borel

14. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}$$

- **1 pt :** $a = \frac{1}{2i}$ **et** $b = -\frac{1}{2i}$

15. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \dfrac{1}{x-i}$.

Montrer par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \psi^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p\, p!}{(x-i)^{p+1}}$.

- **1 pt :** ψ **est de classe** $\mathscr{C}^\infty$ **sur** $\mathbb{R}$**, en tant qu'inverse d'une application polynomiale qui ne s'annule pas sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt : intialisation**
- **1 pt : hérédité** $\psi^{(p+1)}(x) = \left(\psi^{(p)}\right)'(x) = (-1)^p p! \times \left(-\frac{p+1}{(x-i)^{p+2}}\right) = (-1)^{p+1}(p+1)! \times \frac{1}{(x-i)^{p+1+1}}$

16. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée $p^{\text{ème}}$ de la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- **1 pt : de même,** $\forall p \in \mathbb{N}$**, la dérivée** p**-ième de** $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$ **est** $x \mapsto \dfrac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}$
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \times \frac{(x+i)^{p+1}-(x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}$

17. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \left| (x+i)^{p+1} - (x-i)^{p-1} \right| \leqslant 2\left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}$.

En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| \leqslant \dfrac{p!}{|x|^{p+1}}$.

- **1 pt :** $|(x+i)^{p+1}-(x-i)^{p-1}| = \left|2i\mathrm{Im}\left((x+i)^{p+1}\right)\right| \leqslant 2\left|(x+i)^{p+1}\right| = 2|x+i|^{p+1} = 2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{p+1}$
- **1 pt :** $\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| = \frac{p!}{2} \times \frac{\left|(x+i)^{p+1}-(x-i)^{p+1}\right|}{(x^2+1)^{p+1}} = p! \times \frac{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(x^2+1)^{p+1}} = \frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}$
- **1 pt :** $\frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}} \leqslant \frac{p!}{(x^2)^{\frac{p+1}{2}}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}$

18. Pour tout réel α, notons φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}$$

Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*,\ |\alpha| \times \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}$.

- **1 pt : cas $\alpha = 0$**
- **1 pt :** $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$ **donc** $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| = \left|\alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)\right|$
- **1 pt :** $\forall p \in \mathbb{N},\ |\alpha|\left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant |\alpha|^{p+1} \times \frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}$,

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{a_n\, x^n}{1+n!\, a_n^2\, x^2}$$

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}\, a_n$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout entier $n \geqslant p$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}\ \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$$

- **1 pt :** $u_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f_n^{(k)}(x)\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$
- **0 pt :** $a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$

20. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0, n-1]\!]$: ${u_n}^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

- **1 pt : cas $p \in [\![0, n-1]\!]$ alors $u_n^{(p)}(0) = 0$**
- **1 pt : si $p = n$, le terme de la somme correspondant à $k = p = n$ est $n!\varphi_{\alpha_n}(x) = n!$ quand $x = 0$. De plus, les autres termes s'annulent en 0**

21. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel x :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p!\ 2^n$$

- **1 pt :** $\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k}|a_n| \cdot \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right|$
- **1 pt :** $|a_n| \cdot \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{n!}}|\alpha_n| \cdot \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}}$
- **1 pt :** $\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(p-k)! = \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}$

22. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $\forall n \geqslant p+1,\ 0 \leqslant \|u_n^{(p)}\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$

- **1 pt :** $\dfrac{\dfrac{p!2^{n+1}|a|^{n-p}}{((n+1)!)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{p!2^{n}|a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2|a|}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$ **donc par d'Alembert,** $\sum \|u_n^{(p)}\|_{\infty,[a,b]}$ **converge**
- **1 pt : la somme** $\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ **est de classe** $\mathscr{C}^p$ **sur** $\mathbb{R}$ **pour tout** $p \in \mathbb{N}$**, donc de classe** $\mathscr{C}^\infty$ **sur** $\mathbb{R}$**. Il en est donc de même de** $U = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ **(on ajoute une somme finie de fonctions de classe** $\mathscr{C}^\infty$**)**

23. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geqslant 1$: $U^{(p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!\ a_p$.

- **1 pt :** $U(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = u_0(0) = a_n$
- **1 pt :** $U^{(p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{p} u_n^{(p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p$

24. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

- **1 pt : on cherche** (a_n) **telle que** $\left\{\begin{array}{rcl} b_0 & = & a_0, \\ b_1 & = & u_0'(0) + 1!a_1, \\ b_2 & = & u_0''(0) + u_1''(0) + 2!a_2, \\ & \vdots & \\ \forall p \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ b_p & = & \sum\limits_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p \end{array}\right.$
- **1 pt :** $\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & b_0, \\ \alpha_0 & = & a_0, \\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_0(x) & = & a_0\varphi_{\alpha_0}(x), \end{array}\right.$ **puis :** $\forall p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\left\{\begin{array}{rcl} a_p & = & \dfrac{1}{p!}\left(b_p - \sum\limits_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0)\right), \\ \alpha_p & = & \sqrt{p!}a_p, \\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_p(x) & = & a_p x^p \varphi_{\alpha_p}(x). \end{array}\right.$

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIXe siècle.

PROBLÈME 2

File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé à pour indice $n = 1$, etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction G_X définie par :

$$G_X(t) \ = \ \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = j\}\big)\ t^j$$

Partie I - Temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client

25. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps arrive le client d'indice 1.

Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\{T_1 = k\}\big) \; = \; (1-p)^{k-1}\, p$.

26. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».

Exprimer A en fonction des événements $\{T_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Interpréter.

27. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1 puis calculer sa somme.

28. En déduire l'espérance et la variance de T_1.

29. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.

On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.

Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.

30. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k, n) \in \big(\mathbb{N}^*\big)^2$:

$$\mathbb{P}\big(\, \{D_n = k\}\,\big) \;=\; \begin{cases} \qquad 0 & \textit{si } k < n \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n\, (1-p)^{k-n} & \textit{sinon} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\big(\,a\,(x-1)\,\big) \end{cases}$

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1 \in \,]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\; z_{n+1} = f(z_n)$$

31. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in \,]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

32. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

33. Soit la fonction $\psi :: \begin{cases}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) - a\,(x-1) \end{cases}$.

Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) = x$.

34. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire : $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

35. On suppose dans cette question que $a > 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in \,]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.

En distinguant les cas $z_1 \in \,]0,\alpha]$ et $z_1 \in [\alpha, 1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

II.2 - Groupe de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $\mathrm{e}^{-\lambda}\, \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client. Comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi. Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du $k^{\text{ème}}$ groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)^{\text{ème}}$ groupe étaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du $k^{\text{ème}}$ groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le $n^{\text{ème}}$ groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

36. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \{V_n = 0\}$.

37. Quelle est la loi du nombre N_n du clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1,n]\!]$?

38. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}\big(\{V_1 = k\} \mid \{S = n\}\big)$.
En déduire que V_1 suite une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

39. On note $z_n = \mathbb{P}\big(\{V_n = 0\}\big)$. Montrer que (z_n) converge et que $\mathbb{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

40. Justifier que pour tout $(j,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}\big(\{V_{n+1} = 0\} \mid \{V_1 = j\}\big) = \Big(\mathbb{P}\big(\{V_n = 0\}\big)\Big)^j$.
On distinguera le cas $j = 0$.

41. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = \exp\big(\lambda\, p\,(z_n - 1)\big)$.

42. Déterminer, suivant les valeurs de $\lambda\, p$, la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter.