DS7

EXERCICE 1

Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $\langle P \,|\, Q \rangle$ est convergente.

Démonstration.
Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

× L'application $t \mapsto P(t)\, Q(t)\, e^{-t}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

× ► $\forall t \in [0, +\infty[, \ \left| P(t)\, Q(t)\, e^{-t} \right| = \left| P(t) \right| \left| Q(t) \right| e^{-t} \geqslant 0 \quad$ et $\quad e^{-\frac{1}{2}t} \geqslant 0$

► $\left| P(t)\, Q(t)\, e^{-t} \right| \underset{t \to +\infty}{=} o\left(e^{-\frac{1}{2}t} \right)$
En effet :

$$\frac{\left| P(t)\, Q(t)\, e^{-t} \right|}{e^{-\frac{1}{2}t}} = \frac{\left| P(t) \right| \left| Q(t) \right| e^{-t}}{e^{-\frac{1}{2}t}} = \frac{\left| P(t) \right| \left| Q(t) \right|}{e^{\frac{1}{2}t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées.

► L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $\dfrac{1}{2} > 0$.

Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$ est (absolument) convergente.

Commentaire

Il est aussi possible de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction :

$$x \mapsto x^n\, e^{-x}$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$. On peut se servir de ce point pour démontrer que la fonction $x \mapsto P(x)\, Q(x)\, e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Plus précisément, en notant $m_1 = \deg(P)$ et $m_2 = \deg(Q)$ alors $\deg(PQ) = m_1 + m_2$. Ainsi, le polynôme produit PQ s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la base canonique $(P_i)_{i \in [\![0, m_1 + m2]\!]}$. La fonction $x \mapsto P(x)\, Q(x)\, e^{-x}$, quant à elle, s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\left(x \mapsto x^i\, e^{-x}\right)_{i \in [\![0, m_1 + m2]\!]}$. Chacune de ces fonctions étant intégrable sur $[0, +\infty[$, il en est de même de la fonction $x \mapsto P(x)\, Q(x)\, e^{-x}$.

□

2. Montrer que l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

Démonstration.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

  Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} \langle Q, P \rangle &= \int_0^{+\infty} Q(t)\, P(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \qquad \textit{(car la loi } \times \textit{ est commutative)} \\ &= \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite

  Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.
  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} & \langle P, \mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 \rangle \\ = \ & \int_0^{+\infty} P(t) \, \Big(\mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2\Big)(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\ = \ & \int_0^{+\infty} P(t) \, \Big(\mu_1 \cdot Q_1(t) + \mu_2 \cdot Q_2(t)\Big)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt && \textit{(par linéarité de l'évaluation en un point)} \\ = \ & \int_0^{+\infty} \big(\mu_1 \ P(t)\, Q_1(t) + \mu_1 \ P(t)\, Q_1(t)\big)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt && \textit{(par distributivité de la loi } \times \textit{ sur la loi } + \textit{)} \\ = \ & \mu_1 \int_0^{+\infty} P(t)\, Q_1(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt + \mu_2 \int_0^{+\infty} P(t)\, Q_2(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ = \ & \mu_1 \langle P, Q_1 \rangle + \mu_2 \langle P, Q_2 \rangle \end{aligned}$$

  L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant :

  × symétrique,

  × linéaire à droite,

  elle est linéaire à gauche. On en déduit qu'elle est bilinéaire.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive

  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

  × Tout d'abord : $\langle P, P \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

    Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\big(P(t)\big)^2\, \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$.
    On en déduit alors, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \ \geqslant \ 0$$

× Supposons maintenant : $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-t}\, dt = 0$. Démontrons : $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

La fonction $t \mapsto \big(\, P(t)\,\big)^2 \,\mathrm{e}^{-t}$ est :

× continue sur $[0, +\infty[$,

× positive sur $[0, +\infty[$,

× d'intégrale nulle sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que cette fonction est nulle sur $[0, +\infty[$. Autrement dit :

$$\begin{array}{ll} & \forall t \in [0, +\infty[,\ \big(\, P(t)\,\big)^2 \,\mathrm{e}^{-t} \ = \ 0 \\ \text{donc} & \forall t \in [0, +\infty[,\ \big(\, P(t)\,\big)^2 \ = \ 0 \quad \texttt{OU} \quad \mathrm{e}^{-t} \ = \ 0 \\ \text{donc} & \forall t \in [0, +\infty[,\ P(t) \ = \ 0 \qquad\qquad \textit{(car } e^{-t} > 0\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines. On en déduit : $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$$\boxed{\text{L'application } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est bien définie et est de plus bilinéaire, symétrique et définie-positive. C'est donc bien un produit scalaire.}}$$

□

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k \,\mathrm{e}^{-t}\, dt \ = \ k \int_0^{+\infty} t^{k-1} \,\mathrm{e}^{-t}\, dt$$

Démonstration.

- Sous réserve de convergence, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^k \,\mathrm{e}^{-t}\, dt \ &= \ \Big[\ t^k \left(-\,\mathrm{e}^{-t}\right)\Big]_0^{+\infty} \ - \ \int_0^{+\infty} k\, t^{k-1} \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\, dt \\ &= \ -\Big[\ t^k \,\mathrm{e}^{-t}\ \Big]_0^{+\infty} \ + \ k \int_0^{+\infty} t^{k-1} \,\mathrm{e}^{-t}\, dt \end{aligned}$$

On a démontré en question *1* que pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, la quantité $\langle P \,|\, Q\rangle$ est bien définie. En particulier :

× lorsque $P = X^k$ et $Q = 1$, cela démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \,\mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

× lorsque $P = X^{k-1}$ et $Q = 1$, cela démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k-1} \,\mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

On en conclut que le crochet généralisé est aussi convergent ce qui permet de lever la réserve initiale.

- Par ailleurs :

$$\Big[\ t^k \,\mathrm{e}^{-t}\ \Big]_0^{+\infty} \ = \ \left(\lim_{t\to+\infty} t^k \,\mathrm{e}^{-t}\right) - 0 \times \mathrm{e}^{-0} \ = \ 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \int_0^{+\infty} t^k \,\mathrm{e}^{-t}\, dt \ = \ k \int_0^{+\infty} t^{k-1} \,\mathrm{e}^{-t}\, dt.}$$

□

4. Conclure que $\left\langle X^k \,|\, 1 \right\rangle = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathscr{P}(k)$ où $\mathscr{P}(k)$: $\left\langle X^k \,|\, 1 \right\rangle = k!$.

- ▸ **Initialisation**
  - D'une part :

$$\left\langle X^0 \,|\, 1 \right\rangle = \int_0^{+\infty} (1 \times 1)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = \left[-\mathrm{e}^{-t} \right]_0^{+\infty} = -\left(\cancel{\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t}} - \mathrm{e}^{-0} \right) = -(-1) = 1$$

  - D'autre part : $0! = 1$.

  D'où $\mathscr{P}(0)$.

- ▸ **Hérédité** : soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
  Supposons $\mathscr{P}(k)$ et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$ (c'est-à-dire : $\left\langle X^{k+1} \,|\, 1 \right\rangle = (k+1)!$.

$$\begin{aligned}
\left\langle X^{k+1} \,|\, 1 \right\rangle &= \int_0^{+\infty} t^{k+1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
&= (k+1) \int_0^{+\infty} t^k\ \mathrm{e}^{-t}\ dt && \textit{(d'après la question précédente car } k+1 \in [\![0, n]\!]\textit{)} \\
&= (k+1)\ \left\langle X^k \,|\, 1 \right\rangle \\
&= (k+1)\ k! && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (k+1)!
\end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathscr{P}(k).}$$

Commentaire

- Afin d'éviter les questions bloquantes, les énoncés actuels comportent la majorité des résultats intermédiaires. C'est le cas ici : on demande démontrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\left\langle X^k \,|\, 1 \right\rangle = k!$. Le concepteur aurait pu opter pour une autre formulation à savoir : « Déduire de la question précédente la valeur de $\left\langle X^k \,|\, 1 \right\rangle$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ ».
- Le choix de formulation influe sur la manière de répondre. Lorsque le résultat n'est pas fourni, il est possible de conclure « par récurrence immédiate » (sans la développer) car donner le résultat sera considéré comme une démonstration de la compréhension. En revanche, lorsque le résultat n'est pas fourni (comme c'est le cas ici), il semble difficile de se passer de la rédaction de la récurrence.

□

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \ \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que α est linéaire
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{array}{ll} & \Big(\alpha(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\Big)(X) \\ = & X\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)''(X)\ +\ (1-X)\,(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) \\ = & X\ \big(\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q'\big)'(X)\ +\ (1-X)\,(\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) \qquad \textit{(par linéarité de l'application dérivée)} \\ = & X\ \big(\lambda \cdot P'' + \mu \cdot Q''\big)(X)\ +\ (1-X)\,\big(\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q'\big)(X) \qquad \textit{(par linéarité de l'application dérivée)} \\ = & X\ \big(\lambda \cdot P''(X) + \mu \cdot Q''(X)\big)\ +\ (1-X)\,\big(\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)\big) \qquad \textit{(par linéarité de l'évaluation)} \\ = & \lambda \cdot X\ P''(X) + \mu \cdot X\ Q''(X)) + (1-X)\,P'(X) + (1-X)\,Q'(X) \\ = & \lambda \cdot \Big(X\ P''(X) + (1-X)\,P'(X)\Big) + \mu \cdot \Big(X\ Q''(X) + (1-X)\,Q'(X)\Big) \\ = & \lambda \cdot \Big(\alpha(P)\Big)(X) + \mu \cdot \Big(\alpha(Q)\Big)(X) \\ = & \Big(\lambda \cdot \alpha(P) + \mu \cdot \alpha(Q)\Big)(X) \end{array}$$

L'application α est donc linéaire.

Commentaire

- Dans l'énoncé, on écrit : $\alpha(P) = XP'' + (1-X)P'$.
Cette écriture est un léger abus de notation. De manière rigoureuse, on devrait faire la distinction entre les écritures R et $R(X)$ lorsqu'on désigne un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Plus précisément, on devrait définir α comme l'application qui à un polynôme P associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par :
$$\big(\varphi(P)\big)(X) = XP''(X) + (1-X)P'(X)$$
On comprend aisément l'intérêt de l'abus de notation précédent qui permet d'éviter cette lourdeur d'écriture.
- C'est pour cela qu'on écrit : $\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)$ en lieu et place de $\big(\ \varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\ \big)(X)$. Pour plus de lisibilité, on s'autorise un tel abus dans la suite de l'exercice.

- Démontrons que α est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est-à-dire $\alpha\big(\mathbb{R}_n[X]\big) \subset \mathbb{R}_n[X]$)
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{array}{rcl} \deg\Big(\alpha(P)\Big) & = & \deg\big(X\,P'' + (1-X)\,P'\big) \\ & \leqslant & \max\Big(\deg\big(X\,P''\big), \deg\big((1-X)\,P'\big)\Big) \\ & = & \max\Big(\deg(X) + \deg\big(P''\big), \deg\big((1-X)\big) + \deg\big(P''\big)\Big) \\ & = & \max\Big(1 + \deg\big(P''\big), 1 + \deg\big(P''\big)\Big) \end{array}$$

Or, comme $\deg(P) \leqslant n$, alors :
$\times$ $\deg(P'') \leqslant n-2$ donc $1+\deg(P'') \leqslant n-1 \leqslant n$.
$\times$ $\deg(P') \leqslant n-1$ donc $1+\deg(P'') \leqslant n$.
Finalement : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg\big(\alpha(P) \leqslant n$. Autrement dit : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } \alpha \text{ est donc bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

☐

6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

Démonstration.
Dans cette question, notons $\mathscr{B} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Commentaire

Habituellement, la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est notée $(P_0, P_1, \dots, P_n)$. Cependant, cette notation est utilisée dans la question qui suit pour désigner une base particulière de $\mathbb{R}_n[X]$. Introduire cette nouvelle notation permettra de bien différencier les bases et de mieux comprendre l'énoncé.

- $$\begin{array}{rcl} \Big(\alpha(Q_0)\Big)(X) & = & X\,Q_0''(X) + (1-X)\,Q_0'(X) \\ & = & 0 \qquad \textit{(car } Q_0(X)=1,\ \ Q_0'(X)=0 \ \ \textit{et} \ \ Q_0''(X)=0 \textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $\alpha(Q_0) = 0\cdot Q_0 + \ldots + 0\cdot Q_n$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(Q_0,\dots,Q_n)}\big(\alpha(Q_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcl} \Big(\alpha(Q_1)\Big)(X) & = & X\,Q_1''(X) + (1-X)\,Q_1'(X) \\ & = & 1-X \qquad \textit{(car } Q_1(X)=X,\ \ Q_1'(X)=1 \ \ \textit{et} \ \ Q_1''(X)=0 \textit{)} \\ & = & Q_0(X) - Q_1(X) \\ & = & \Big(Q_0 - Q_1\Big)(X) \end{array}$$

  Ainsi : $\alpha(Q_1) = 1\cdot Q_0 - 1\cdot Q_1 + 0\cdot Q_2 + \ldots + 0\cdot Q_n$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(Q_0,\dots,Q_n)}\big(\alpha(Q_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- De manière générale, pour tout $k \geqslant 2$:

  $$\begin{array}{rcl} \Big(\alpha(Q_k)\Big)(X) & = & X\,Q_k''(X) + (1-X)\,Q_k'(X) \\ & = & X\,\Big(k\,(k-1)\;X^{k-2}\Big) + (1-X)\;\Big(k\,X^{k-1}\Big) \qquad \textit{(car } Q_k(X)=X^k,\ \ Q_k'(X)=k\,X^{k-1} \ \textit{et } Q_k''(X)=k(k-1)\,X^{k-1}\ \ X^{k-2}\textit{)} \\ & = & k\,(k-1)\;X^{k-1} + k\,X^{k-1} - k\,X^k \\ & = & \Big(k\,(k-1)+k\Big)\;X^{k-1} - k\,X^k \\ & = & k^2\;Q_{k-1}(X) - k\;Q_k(X) \\ & = & \Big(k^2\;Q_{k-1} - k\;Q_k\Big)(X) \end{array}$$

  Ainsi : $\alpha(Q_k) = 0\cdot Q_0 + 0\cdot Q_1 + \ldots + 0\cdot Q_{k-2} + k^2\cdot Q_{k-1} - k\cdot Q_k + 0\cdot Q_{k+1} + \ldots + 0\cdot Q_n$.

$$\text{On en conclut : } \mathrm{Mat}_{(Q_0,\dots,Q_n)}\Big(\alpha(Q_k)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k^2 \\ -k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\alpha\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).}$$

□

7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \chi_\alpha(X) & = & \chi_A(X) \\ & = & \det\big(A - X\, I_{n+1}\big) \\ & = & \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X+1 & -4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & X+2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X+n \end{vmatrix} \\ & = & X\,(X+1)\,\dots\,(X+n) \end{array}$$

  Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme α est scindé à racines simples.

  $\boxed{\text{Cela suffit à conclure que l'endomorphisme } \alpha \text{ est diagonalisable.}}$

- De plus, les valeurs propres sont les racines du polynômes caractéristique.

  $\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(\alpha) = \mathrm{Sp}(A) = \big\{ -k \mid k \in [\![0, n]\!] \big\}.}$

Commentaire

- Pour répondre à cette question, on a choisi de déterminer χ_α. Cela permet de respecter l'ordre des questions : on démontre d'abord que l'endomorphisme est diagonalisable avant d'en conclure les valeurs propres.
- Il était aussi possible de déterminer tout d'abord les valeurs propres de l'endomorphisme α. Comme la matrice A est triangulaire (supéieure), ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. On en conclut : $\mathrm{Sp}(\alpha) = \mathrm{Sp}(M) = \big\{ -k \mid k \in [\![0, n]\!] \big\}$.
  L'application α :
  × est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$,
  × possède $n+1$ valeurs propres distinctes.
  On en déduit alors que α est diagonalisable.

□

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $\text{Ker}\left(\alpha + k\,\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$?

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\text{Ker}\left(\alpha + k\,\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right) = E_{-k}(\alpha)$, sous-espace propre associé à la valeur propre $-k$.
- Notons alors $m_{-k}(\alpha)$ la multiplicité de $-k$ en tant que racine de χ_α. Alors :

$$1 \leqslant \dim\left(E_{-k}(\alpha)\right) \leqslant m_{-k}(\alpha) = 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\left(\text{Ker}\left(\alpha + k\,\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)\right) = 1.}$$

Commentaire

La manière dont les questions sont formulées donnent un indice sur la réponse attendue. Ici, il n'est pas explicitement demandé de déterminer $E_{-k}(\alpha)$. Il est évidemment possible de le faire pour traiter cette question mais ce n'est clairement pas l'esprit du sujet. Déterminer $E_{-k}(\alpha)$ ne sera pas sanctionné en tant que tel. Toutefois, cette question ne sera certainement pas barémée à hauteur du temps qu'exige la recherche d'un sous-espace propre. Ce temps perdu se traduira alors par une perte de points.

□

9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim\left(\text{Ker}\left(\alpha + k\,\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)\right) = 1$.
  Autrement dit, $\text{Ker}\left(\alpha + k\,\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$ est une droite vectorielle.
  Ainsi, il existe un polynôme $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que :

$$\text{Ker}\left(\alpha + k\,\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right) = \text{Vect}\left(R_k\right)$$

- Notons $m = \deg\left(R_k\right)$ ($\neq -\infty$) et $c_{m,k}$ (> 0) le coefficient dominant de R_k. On note enfin :

$$P_k = \frac{1}{c_{m,k}} \cdot R_k$$

  Le polynôme P_k est unitaire et engendre $E_{-k}(\alpha)$. Comme $\dim\left(E_{-k}(\alpha)\right) = 1$, tout autre polynôme de $E_{-k}(\alpha)$ est colinéaire à P_k et même égal à P_k si unitaire.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe bien un unique polynôme unitaire } P_k \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \alpha\left(P_k\right) = -k \cdot P_k.}$$ □

10. Justifier que P_k est de degré k.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que $P_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ car P_k est un vecteur propre de l'endomorphisme α.
- Notons $m = \deg(P_k) \geqslant 0$. Il existe alors $(a_{k,0}, \ldots, a_{k,m}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que :

$$P_k = \sum_{j=0}^{m} a_{k,j} \cdot X^j$$

  En particulier, comme P_k est unitaire, $a_{k,m} = 1$.

On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\alpha\big(P_k\big) & = & \alpha\left(\sum\limits_{j=0}^{m} a_{k,j}\cdot X^j\right) & \\
& = & \sum\limits_{j=0}^{m} a_{k,j}\cdot \alpha\big(X^j\big) & \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{m} a_{k,j}\cdot \alpha\big(X^j\big) & \textit{(car } \alpha(1)=0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{m} a_{k,j}\cdot \Big(j^2\, X^{j-1} - j\ X^j\Big) & \\
& = & -\sum\limits_{j=1}^{m} j\, a_{k,j}\ X^j \ + \ \sum\limits_{j=1}^{m} j^2\, a_{k,j}\ X^{j-1} & \\
& = & -\sum\limits_{j=1}^{m} j\, a_{k,j}\ X^j \ + \ \sum\limits_{j=0}^{m-1} (j+1)^2\, a_{k,j+1}\ X^j & \\
& = & -m\, a_{k,m}\ X^m \ + \ \sum\limits_{j=1}^{m-1} \big(-j\, a_{k,j} + (j+1)^2\, a_{k,j+1}\big)\ X^j \ + \ a_{k,1} & \\
& = & -m\ X^m \ + \ \sum\limits_{j=1}^{m-1} \big(-j\, a_{k,j} + (j+1)^2\, a_{k,j+1}\big)\ X^j \ + \ a_{k,1} & \textit{(car } a_{k,m}=1\textit{)}
\end{array}$$

Par ailleurs, par définition :

$$\begin{array}{rcl}
\alpha(P_k) & = & -k\cdot P_k \\
& = & -k\ \sum\limits_{j=0}^{m} a_{k,j}\ X^j \\
& = & \sum\limits_{j=0}^{m} \big(-k\, a_{k,j}\big)\ X^j \\
& = & -k\, a_{k,m}\ X^m \ + \ \sum\limits_{j=0}^{m-1} \big(-k\, a_{k,j}\big)\ X^j \\
& = & -k\ X^m \ + \ \sum\limits_{j=0}^{m-1} \big(-k\, a_{k,j}\big)\ X^j
\end{array}$$

Par unicité de la décomposition dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$, les deux décompositions de $\alpha(P_k)$ permettent de conclure, en particulier : $-m = -k$ et donc $m = k$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ P_k \text{ est de degré } k.}$$

$\square$

11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

Démonstration.

- Par définition P_0 est l'unique polynôme unitaire de degré 0 vérifiant $\alpha(P_0) = -0 \cdot P_0$.

$$\boxed{\text{En particulier, } P_0 \text{ est un polynôme unitaire de degré 0 (c'est-à-dire constant), donc } P_0 = 1.}$$

- Par définition P_1 est l'unique polynôme unitaire de degré 1 vérifiant $\alpha(P_1) = -1 \cdot P_1 \quad (*)$.
  - × Comme P_1 est un polynôme unitaire de degré 1, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $P_1(X) = 1 \cdot X + a \cdot 1$.
    De plus :

$$\begin{array}{rcll} \alpha(P_1) & = & \alpha\big(1 \cdot X + a \cdot 1\big) & \\ & = & 1 \cdot \alpha\big(X\big) \ + \ a \cdot \alpha(1) & \textit{(par linéarité de } \alpha\textit{)} \\ & = & 1 \cdot \alpha\big(X\big) \ + \ a \cdot 0_{\mathbb{R}_n[X]} & \\ & = & 1 \cdot (1 - X) & \textit{(vu en question 6)} \\ & = & (-1) \cdot (X - 1) & \end{array}$$

  - × Par ailleurs, d'après $(*)$: $\alpha(P_1) = (-1) \cdot (X + a)$.
    Ainsi : $(-1) \cdot (X - 1) \ = \ (-1) \cdot (X + a)$.

$$\boxed{\text{Finalement, par unicité de la décomposition dans la base } (1, X),\ a = -1 \text{ et } P_1 = X - 1.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \alpha\big(X^2 - 4X + 2\big) & = & \alpha\big(X^2\big) \ - \ 4 \cdot \alpha(X) \ + \ \cancel{2 \cdot \alpha(1)} & \textit{(par linéarité de } \alpha\textit{)} \\ & = & 4X - 2X^2 \ - \ 4 \cdot \big(1 - X\big) & \\ & = & -2X^2 + 8X - 4 & \\ & = & -2\ \big(X^2 - 4X + 2\big) & \end{array}$$

Le polynôme $Q = X^2 - 4X + 2$ est unitaire, de degré 2 et vérifie : $\alpha(Q) = -2 \cdot Q$.

$$\boxed{\text{Comme } P_2 \text{ est l'unique polynôme vérifiant ces propriétés, } P_2 = Q = X^2 - 4X + 2.}$$

Commentaire

- L'énoncé présente deux formulations différentes. Tout d'abord, il s'agit de « déterminer » P_0 et P_1. Pour ces deux polynômes, c'est bien une étape de recherche qui est demandée.
- En revanche, la valeur de P_2 est donnée et il s'agit de la « vérifier ». Cela amène à une méthode de résolution différente. Il suffit dès lors de vérifier que le polynôme fournit par l'énoncé (qu'on ne peut encore nommer P_2) satisfait les critères définissant P_2 de manière unique.

□

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle = - \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle &= \int_0^{+\infty} \big(\alpha(P)\big)(t)\; Q(t)\; \mathrm{e}^{-t}\; dt \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(X\, P'' \;+\; (1-X)\, P'\Big)(t)\; Q(t)\; \mathrm{e}^{-t}\; dt \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(t\, P''(t) \;+\; (1-t)\, P'(t)\Big)\; Q(t)\; \mathrm{e}^{-t}\; dt && \textit{(par linéarité de l'évaluation)} \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(t\, P''(t)\, Q(t)\; \mathrm{e}^{-t} \;+\; P'(t)\, Q(t)\; \mathrm{e}^{-t} \;-\; t\, P'(t)\, Q(t)\; \mathrm{e}^{-t}\Big)\; dt \\
&= \int_0^{+\infty} t\, P''(t)\, Q(t)\; \mathrm{e}^{-t}\; dt \;+\; \int_0^{+\infty} P'(t)\, Q(t)\; \mathrm{e}^{-t}\; dt \\
&\qquad - \int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q(t)\; \mathrm{e}^{-t}\; dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

- On s'intéresse en particulier à cette dernière intégrale.
  Par intégration par parties, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \big(\, t\, P'(t)\, Q(t)\,\big) \times \big(\,\mathrm{e}^{-t}\,\big)\; dt \\
= \quad & \Big[\; t\, P'(t)\, Q(t)\; \big(-\,\mathrm{e}^{-t}\big)\;\Big]_0^{+\infty} \\
& - \int_0^{+\infty} \Big(P'(t)\, Q(t) \;+\; t\, P''(t)\, Q(t) \;+\; t\, P'(t)\, Q'(t)\Big) \times \big(-\,\mathrm{e}^{-t}\big)\; dt
\end{aligned}$$

  Les deux intégrales en présence sont convergentes car sont de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\; \mathrm{e}^{-t}\; dt$, où $R \in \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire de la forme $\langle R \,|\, 1 \rangle$, quantité bien définie d'après la question ***1***.
  Cela lève la réserve initiale. De plus :

$$\begin{aligned}
\Big[\; t\, P'(t)\, Q(t)\; \big(-\,\mathrm{e}^{-t}\big)\;\Big]_0^{+\infty} &= -\Big[\; t\, P'(t)\, Q(t)\; \mathrm{e}^{-t}\;\Big]_0^{+\infty} \\
&= -\Big(\;\big(\, \cancel{\lim_{t \to +\infty}\; t\, P'(t)\, Q(t)\; \mathrm{e}^{-t}}\,\big) \;-\; 0 \times P'(0)\, Q(0)\; \mathrm{e}^{-0}\;\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Finalement, en injectant la valeur de cette dernière intégrale dans le premier calcul, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle \\
&= \int_0^{+\infty} t\, P''(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \; + \int_0^{+\infty} P'(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\
&\quad - \left(\cancel{-} \int_0^{+\infty} \Big(P'(t)\, Q(t) \; + \; t\, P''(t)\, Q(t) \; + \; t\, P'(t)\, Q'(t) \Big) \times \left(\cancel{-}\mathrm{e}^{-t} \right)\, dt \right) \\
&= \cancel{\int_0^{+\infty} t\, P''(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt} \; + \cancel{\int_0^{+\infty} P'(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt} \\
&\quad - \cancel{\int_0^{+\infty} P'(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt} - \cancel{\int_0^{+\infty} t\, P''(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt} - \int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle = - \int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt.}$$

□

13. En déduire que $\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, \alpha(Q) \rangle$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle &= - \int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\
&= - \int_0^{+\infty} t\, Q'(t)\, P'(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt && \textit{(par commutativité de la loi } \times\textit{)} \\
&= \langle \alpha(Q) \,|\, P \rangle && \textit{(à l'aide de la question précédente)} \\
&= \langle P \,|\, \alpha(Q) \rangle && \textit{(par symétrie du produit scalaire)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle \;=\; \langle P \,|\, \alpha(Q) \rangle}$$

□

14. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
On pourra utiliser les questions 9 et 13.

Démonstration.

- Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, n]\!]$. Supposons $i \neq j$.
D'après la question 13 : $\langle \alpha(P_i) \,|\, P_j \rangle = \langle P_i \,|\, \alpha(P_j) \rangle$. Calculons tout d'abord le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(P_i) \,|\, P_j \rangle &= \langle (-i) \cdot P_i \,|\, P_j \rangle && \textit{(d'après la question 9)} \\
&= -i \;\langle P_i \,|\, P_j \rangle && \textit{(par linéarité à gauche du produit scalaire)}
\end{aligned}$$

Calculons maintenant le membre de droite :

$$\begin{aligned}
\langle P_i \,|\, \alpha(P_j) \rangle &= \langle P_i \,|\, (-j) \cdot P_j \rangle && \textit{(d'après la question 9)} \\
&= -j \;\langle P_i \,|\, P_j \rangle && \textit{(par linéarité à droite du produit scalaire)}
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{lrcl} & -j \ \langle P_i \,|\, P_j \rangle & = & -i \ \langle P_i \,|\, P_j \rangle \\ \text{donc} & \big(\, i - j \,\big) \ \langle P_i \,|\, P_j \rangle & = & 0 \\ \text{donc} & \big(\, i - j \,\big) \ = \ 0 \quad \texttt{OU} & & \langle P_i \,|\, P_j \rangle \ = \ 0 \\ \text{donc} & \langle P_i \,|\, P_j \rangle & = & 0 \qquad \textit{(puisque } i \neq j \textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (P_0, \ldots, P_n) \text{ est une famille orthogonale.}}$$

- La famille $\mathcal{F} = (P_0, \ldots, P_n)$ est :
  - × libre car elle est orthogonale et constituée uniquement de vecteurs non nuls (puisque chaque polynôme de cette famille est un vecteur propre de α),
  - × de cardinal $\text{Card}\big(\mathcal{F}\big) = n + 1 = \dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$.

  On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\text{La famille } (P_0, \ldots, P_n) \text{ est bien une famille orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].}$$

□

EXERCICE 2

Présentation générale

On se propose ici d'étudier certaines propriétés des matrices antisymétriques réelles. Après avoir étudié un exemple en dimension 2, on utilise les matrices antisymétriques pour paramétrer un sous-ensemble des matrices orthogonales.

Notations

– $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et, pour tout entier $n > 0, \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
– Pour tout entier $n > 0$, on désigne par $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ antisymétriques à coefficients réels et par $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices $n \times n$ orthogonales à coefficients réels. Le groupe spécial orthogonal est constitué des matrices orthogonales de déterminant 1 .

Partie I - Un exemple en dimension 2

15. Soit t un réel et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de A.

Démonstration.
On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) \;=\; \det(X\, I_2 - A) \;=\; \begin{vmatrix} X & -t \\ t & X \end{vmatrix} \;=\; X^2 + t^2 \;=\; (X - it)\,(X + it)$$

Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A.

$$\boxed{\text{On en déduit que les valeurs propres complexes de } A \text{ sont } it \text{ et } -it.}$$

□

16. Calculer $R = \big(I_2 + A\big)\ \big(I_2 - A\big)^{-1}$ et montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal.

Démonstration.

- Tout d'abord : $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\det(I_2 - A) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix} \;=\; 1 + t^2 \;\neq\; 0$$

Ainsi, la matrice $I_2 - A$ est inversible et :

$$(I_2 - A)^{-1} \;=\; \frac{1}{\det(I_2 - A)} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{1 + t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

Commentaire

Rappelons que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2 de déterminant non nul (c'est-à-dire telle que : $ad - bc \neq 0$), alors A est inversible d'inverse :

$$M^{-1} \;=\; \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- On en déduit :

$$R \; = \; (I_2 + A)\,(I_2 - A)^{-1} \; = \; \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \right) \; = \; \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} {}^tR \times R \; &= \; \left(\frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{pmatrix} \right) \times \left(\frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \; \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} (1-t^2)^2 + 4t^2 & 0 \\ 0 & (1-t^2)^2 + 4t^2 \end{pmatrix} \\ &= \; \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} (1+t^2)^2 & 0 \\ 0 & (1+t^2)^2 \end{pmatrix} \; = \; I_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } R \text{ est donc orthogonale.}}$$

Commentaire

- Une matrice est orthogonale si ses colonnes forment une famille **orthonormale** (pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Il était aussi possible d'utiliser cette propriété pour démontrer $R \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. En particulier :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ -2t \end{pmatrix}, \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \right\rangle \; &= \; \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2} \left\langle \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ -2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \; \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2} \Big((1-t^2)\ (2t) \; + \; (-2t)\ (1-t^2) \Big) \\ &= \; 0 \end{aligned}$$

- On peut aussi remarquer : ${}^tA = -A$ et ainsi : ${}^t(I_2 + A) = {}^tI_2 + {}^tA = I_2 - A$. Ainsi :

$$\begin{aligned} {}^tR \times R \; &= \; {}^t\Big((I_2 + A) \times (I_2 - A)^{-1} \Big) \times (I_2 + A) \times (I_2 - A)^{-1} \\ &= \; {}^t\Big((I_2 - A)^{-1} \Big) \times {}^t(I_2 + A) \times (I_2 + A) \times (I_2 - A)^{-1} \\ &= \; {}^t\Big((I_2 - A)^{-1} \Big) \times (I_2 - A) \times (I_2 + A) \times (I_2 - A)^{-1} \\ &= \; {}^t\Big((I_2 - A)^{-1} \Big) \times (I_2 + A) \times (I_2 - A) \times (I_2 - A)^{-1} && \textit{(car les matrices } I_2 + A \textit{ et } I_2 - A \textit{ commutent)} \\ &= \; {}^t\Big((I_2 - A)^{-1} \Big) \times (I_2 + A) \times I_2 \\ &= \; \Big({}^t(I_2 - A) \Big)^{-1} \times (I_2 + A) && \textit{(car } {}^t\left(B^{-1}\right) = \left({}^tB\right)^{-1}\textit{)} \\ &= \; (I_2 + A)^{-1} \times (I_2 + A) \\ &= \; I_2 \end{aligned}$$

Cette méthode est certainement plus satisfaisante mais, en temps limité, il peut être plus pertinent d'effectuer un calcul peu subtil pourvu qu'il donne le résultat rapidement.

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\det(R) &= \det\left(\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1-t^2 & 2t\\ -2t & 1-t^2\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\begin{vmatrix}1-t^2 & 2t\\ -2t & 1-t^2\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\big((1-t^2)^2+4t^2\big)\\
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\,(1+t^2)^2\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } R \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

Là encore, il était possible d'agir de manière plus subtile et, pour le coup, plus rapide :

$$\begin{aligned}
\det(R) &= \det\Big(\ (I_2+A)\ (I_2-A)^{-1}\ \Big)\\
&= \det(\ I_2+A\ )\times\det\Big(\ (I_2-A)^{-1}\ \Big)\\
&= \det(\ I_2+A\ )\times\Big(\det(\ I_2-A\ )\Big)^{-1}\\
&= \frac{\det(\ I_2+A\ )}{\det(\ I_2-A\ )}\\
&= \frac{1+t^2}{1+t^2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

□

17. Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\,\mathbb{Z}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$. Calculer $M = \big(I_2+R_\theta\big)^{-1}\ \big(I_2-R_\theta\big)$.

Démonstration.
Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\,\mathbb{Z}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\det(I_2+R_\theta) &= \begin{vmatrix}1+\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & 1+\cos(\theta)\end{vmatrix}\\
&= \big(1+\cos(\theta)\big)^2+\big(\sin(\theta)\big)^2\\
&= 1+2\ \cos(\theta)+\big(\cos(\theta)\big)^2+\big(\sin(\theta)\big)^2\\
&= 2+2\ \cos(\theta)
\end{aligned}$$

Comme $\theta \notin \pi\,\mathbb{Z}$, alors : $\cos(\theta) \neq -1$. D'où : $\det(I_2+R_\theta) \neq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, la matrice } I_2+R_\theta \text{ est inversible et :}\\ (I_2+R_\theta)^{-1} = \dfrac{1}{2\,\big(1+\cos(\theta)\big)}\begin{pmatrix}1+\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & 1+\cos(\theta)\end{pmatrix}.\end{array}}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
M &= (I_2+R_\theta)^{-1}(I_2-R_\theta) \\
&= \frac{1}{2\big(1+\cos(\theta)\big)}\begin{pmatrix}1+\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & 1+\cos(\theta)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1-\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & 1-\cos(\theta)\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\big(1+\cos(\theta)\big)}\begin{pmatrix}1-\big(\cos(\theta)\big)^2-\big(\sin(\theta)\big)^2 & 2\sin(\theta)\\ -2\sin(\theta) & \big(\sin(\theta)\big)^2+1-\big(\cos(\theta)\big)^2\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\big(1+\cos(\theta)\big)}\begin{pmatrix}1-1 & 2\sin(\theta)\\ -2\sin(\theta) & 1-1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\big(1+\cos(\theta)\big)}\begin{pmatrix}0 & 2\sin(\theta)\\ -2\sin(\theta) & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } M = \frac{1}{1+\cos(\theta)}\begin{pmatrix}0 & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & 0\end{pmatrix}.}$$

□

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, n désigne un entier strictement positif.

18. Soient B et C deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si C est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.

Démonstration.
Supposons que C est inversible et : $BC = CB$.

$$\begin{array}{lrcl}
 & BC &=& CB \\
\text{donc} & BC\times C^{-1} &=& CB\times C^{-1} \\
\text{donc} & B &=& CBC^{-1} \\
\text{donc} & C^{-1}\times B &=& C^{-1}\times CBC^{-1} \\
\text{donc} & C^{-1}B &=& B\,C^{-1}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut bien que, si } C \text{ est inversible et } BC = CB, \text{ alors : } BC^{-1} = C^{-1}B.}$$

□

19. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons :

$$^t(AX)\overline{X},$$

montrer que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).

Commentaire

- L'énoncé fait ici une confusion entre les ensembles $\mathbb{C}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En effet, le produit AX n'est défini que si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (et non $\mathbb{C}^n$).
- On peut légitimement s'interroger sur l'intérêt d'une telle confusion pour cet énoncé car elle va naturellement amener à calculer le produit de deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ (puisque $^t(AX) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\overline{X}\ in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$). Cependant, cela reste une confusion classique dans les énoncés de concours et il convient donc s'habituer à la voir apparaître. On pourra par ailleurs éviter de réaliser cette confusion dans les réponses sauf si elle permet d'éviter une lourdeur d'écriture.

Démonstration.

- D'une part, comme X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors :

$$^t(AX)\,\overline{X} \;=\; ^t(\lambda \cdot X)\,\overline{X}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} ^t(AX)\,\overline{X} &= \lambda \cdot {}^tX\,\overline{X} && \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{x_i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a tout d'abord : } {}^t(AX)\overline{X} = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} ^t(AX)\,\overline{X} &= {}^tX\,{}^tA\,\overline{X} \\ &= {}^tX\,(-A)\,\overline{X} && \textit{(car } A \textit{ est antisymétrique)} \\ &= -{}^tX \times \overline{A}\,\overline{X} && \textit{(car } \overline{A} = A \textit{ puisque } A \textit{ est une matrice à coefficients réels)} \\ &= -{}^tX \times \overline{AX} && \textit{(par linéarité de la conjugaison)} \\ &= -{}^tX \times \overline{\lambda \cdot X} && \textit{(car } X \textit{ est un vecteur propre de } A \textit{ associé à la valeur propre } \lambda\textit{)} \\ &= -\overline{\lambda} \cdot {}^tX\,\overline{X} && \textit{(car } \overline{\lambda \cdot X} = \overline{\lambda} \cdot \overline{X}\textit{)} \\ &= -\overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 && \textit{(d'après les calculs du point précédent)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a également : } {}^t(AX)\,\overline{X} = -\overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 &= -\overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \\ \text{donc} \qquad \left(\lambda + \overline{\lambda}\right) \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or : $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Donc : $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$. D'où : $\lambda + \overline{\lambda} = 0$. Autrement dit :

$$\lambda \;=\; -\overline{\lambda}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \lambda \text{ est bien un imaginaire pur.}}$$

□

20. Déduire de la question précédente que si A est antisymétrique réelle, alors $I_n + A$ est inversible et :

$$(I_n - A)\ (I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}\ (I_n - A)$$

Montrer que $R = (I_n + A)^{-1}\ (I_n - A)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration.
Supposons que la matrice A est antisymétrique réelle.

- Alors, d'après la question précédente : $\mathrm{Sp}(A) \subset i\,\mathbb{R}$ (toute valeur propre est imaginaire pure). En particulier, le réel -1 n'est pas une valeur propre de A.

$$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } A + I_n \text{ est inversible.}}$$

- On sait alors que :
  × la matrice $I_n + A$ est inversible,
  × les matrices $I_n + A$ et $I_n - A$ commutent, c'est-à-dire : $(I_n + A)\,(I_n - A) = (I_n - A)\,(I_n + A)$.

  On peut donc appliquer la question ***18*** à $C = I_n + A$ et $B = I_n - A$.

$$\boxed{\text{On obtient : } (I_n - A)\,(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}\,(I_n - A).}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
{}^tR \times R & = & {}^t\Big((I_n + A)^{-1}\,(I_n - A)\Big) \times (I_n + A)^{-1}\,(I_n - A) & \\
& = & {}^t(I_n - A) \times {}^t\Big((I_n + A)^{-1}\Big) \times (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A) & \\
& = & {}^t(I_n - A) \times \Big({}^t(I_n + A)\Big)^{-1} \times (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A) & \\
& = & ({}^tI_n - {}^tA) \times \Big(({}^tI_n + {}^tA)\Big)^{-1} \times (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A) & \textit{(par linéarité de la transposée)} \\
& = & (I_n + A) \times (I_n - A)^{-1} \times (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A) & \textit{(car } A \textit{ est antisymétrique)} \\
& = & (I_n + A) \times (I_n - A)^{-1} \times (I_n - A) \times (I_n + A)^{-1} & \textit{(d'après le point précédent)} \\
& = & (I_n + A) \times I_n \times (I_n + A)^{-1} & \\
& = & I_n &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{La matrice } R \text{ est donc orthogonale.}}$$

Commentaire

Afin d'obtenir le résultat, on commence par établir : $(I_n - A)\,(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}\,(I_n - A)$. Cette propriété a demandé un peu de travail (notamment de traiter la question ***18***). Elle n'est pourtant pas nécessaire pour établir le fait que la matrice R est orthogonale. En effet, si on reprend le calcul effectué dans cette question :

$$\begin{array}{rcll}
{}^tR \times R & = & (I_n + A) \times (I_n - A)^{-1} \times (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A) & \\
& = & (I_n + A) \times \Big((I_n + A) \times (I_n - A)\Big)^{-1} \times (I_n - A) & \\
& = & (I_n + A) \times \Big((I_n - A) \times (I_n + A)\Big)^{-1} \times (I_n - A) & \textit{(car les matrices } I_n - A \textit{ et } I_n + A \textit{ commutent)} \\
& = & (I_n + A) \times (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A)^{-1} \times (I_n - A) & \\
& = & I_n \times I_n &
\end{array}$$

□

21. Calculer le déterminant de R.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\det(R) &= \det\Big(\ (I_n + A)^{-1}\ (I_n - A)\ \Big) \\
&= \det\Big(\ (I_n + A)^{-1}\ \Big) \times \det\big(I_n - A\big) \\
&= \Big(\det\big(\ I_n + A\ \big)\Big)^{-1} \times \det\big(I_n - A\big) \\
&= \frac{\det\big(I_n - A\big)}{\det\big(I_n + A\big)} \\
&= \frac{\det\Big({}^t(I_n + A)\Big)}{\det\big(I_n + A\big)} && \textit{(car } {}^t\big(I_n + A\big) = {}^tI_n + {}^tA = I_n - A\textit{)} \\
&= \frac{\det\big(I_n + A\big)}{\det\big(I_n + A\big)} && \textit{(puisque } \det\big({}^tB\big) = \det(B)\textit{)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\det(R) = 1}$$

□

22. Soit R une matrice orthogonale telle que $I_n + R$ soit inversible.
Démontrer que la matrice $A = \big(I_n + R\big)^{-1}\ \big(I_n - R\big)$ est antisymétrique.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t\Big((I_n + R)^{-1}\,(I_n - R)\Big) \\
&= {}^t(I_n - R) \times {}^t\Big((I_n + R)^{-1}\Big) \\
&= {}^t(I_n - R) \times \Big({}^t(I_n + R)\Big)^{-1} \\
&= ({}^tI_n - {}^tR) \times \Big(({}^tI_n + {}^tR)\Big)^{-1} && \textit{(par linéarité de la transposée)} \\
&= \big(I_n - R^{-1}\big) \times \Big(I_n + R^{-1}\Big)^{-1} && \textit{(car } R \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})\textit{)} \\
&= \big(I_n - R^{-1}\big) \times \Big(\big(R + I_n\big) \times R^{-1}\Big)^{-1} \\
&= \big(I_n - R^{-1}\big) \times \Big(R^{-1}\Big)^{-1} \times \big(R + I_n\big)^{-1} \\
&= \big(I_n - R^{-1}\big) \times R \times \big(R + I_n\big)^{-1} \\
&= \big(R - I_n\big) \times \big(R + I_n\big)^{-1} \\
&= -\big(I_n + R\big)^{-1} \times \big(I_n - R\big) && \textit{(en appliquant } \textbf{\textit{18}} \textit{ à } C = I_n + R \textit{ inversible} \\
& && \textit{et } B = I_n - R \textit{ qui commute avec } C\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{{}^tA = -A}$$

□

EXERCICE 3

II existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

On propose ici d'en présenter une.

23. **Question préliminaire**

Si on admet que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \underset{\boxed{n \text{ pair}}}{\sum_{n=1}^{+\infty}} \frac{1}{n^2} + \underset{\boxed{n \text{ impair}}}{\sum_{n=1}^{+\infty}} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4\,n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

□

24. Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx$.
On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord que la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.
  De plus :

$$\forall u \in\,]-1,1[, \quad \frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$$

  On en déduit :

$$\forall x \in\,]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}$$

(en utilisant l'égalité précédente en $u = x^2 \in [0,1[\, \subset\,]-1,1[$)

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in\,]-1,1[, \quad \frac{1}{x^2-1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}.}$$

- On en déduit :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx \;=\; -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}\ \ln(x)\right) dx$$
On aimerait alors utiliser le théorème d'intégration terme à terme afin d'intervertir les symboles $\sum_{k=0}^{+\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : t \mapsto \ln(t)\, t^{2n}$.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- ▸ Comme vu en début de question, pour tout $x_0 \in \,]0,1[$, la série numérique $\sum \left({x_0}^2\right)^n$ est (absolument) convergente. Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$.
- ▸ De plus, la fonction $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}\ \ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$.

(ii) Intégrabilité - étude « en t »

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent :
  - × si $n = 0$, la fonction $f_0 : t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1[$ d'après le cours.
  - × si $n > 0$, la fonction $f_n : t \mapsto t^{2n}\ \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.

    L'intégrale $\int_0^1 f_n(t)$ est donc impropre seulement en 0.

    Or : $\lim_{t\to 0} t^{2n}\ \ln(t) = 0$. Ainsi, l'intégrale précédente est faussement impropre en 0. La fonction f_n prolongée en 0 est alors continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$ et donc intégrable sur ce segment.

(iii) Hypothèse spécifique

- Démontrons que la série numérique $\sum \int_0^1 |\, f_n(t)\,|\ dt$ converge.
  - × Tout d'abord :
$$\begin{aligned}\int_0^1 |\, f_n(t)\,|\ dt &= \int_0^1 |\, t^{2n}\ \ln(t)\,|\ dt \\ &= -\int_0^1 t^{2n}\ \ln(t)\ dt \qquad \textit{(car } \ln(t) < 0 \textit{ si } t \in \,]0,1[\textit{)}\end{aligned}$$
    Notons I_n cette dernière intégrale.
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 t^{2n}\ \ln(t)\ dt \\ &= \cancel{\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ \ln(t)\right]_0^1} - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ \frac{1}{t}\ dt \qquad \textit{(par intégration par parties)} \\ &= -\frac{1}{2n+1}\int_0^1 t^{2n}\ dt \\ &= -\frac{1}{2n+1}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2n+1} - 0\right)\end{aligned}$$

Finalement : $\displaystyle\int_0^1 |\, f_n(t)\,|\ dt = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\ \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, la série numérique $\sum \displaystyle\int_0^1 |\, f_n(t)\,|\ dt$ est bien convergente.

On en conclut, par théorème d'intégration terme à terme que la fonction S est intégrable sur $]0,1[$. De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^1 S(x)\ dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\ \ln(x)\right)\ dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n}\ \ln(x)\ dx\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\ dx = -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}\ \ln(x)\right)\ dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

□

25. On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\ dt$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Démonstration.

Dans toute la suite :

× on note $h : (x,t) \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$.

× pour tout $x_0 \in [0,+\infty[$, on note : $\underline{h}_{x_0} : t \mapsto f(x_0,t)$.

× pour tout $t_0 \in]0,+\infty[$, on note : $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto f(x,t_0)$.

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^0 \text{ - étude « en } x \text{ »}}$

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{\arctan(t\,x)}{1+t^2}$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $[0,+\infty[$.

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- Pour tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in [0,+\infty[$. Soit $t \in]0,+\infty[$.

$$\left|\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right| = \frac{|\arctan(xt)|}{|1+t^2|} = \frac{|\arctan(xt)|}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2}\ \frac{1}{1+t^2} \qquad (*)$$

Et la fonction $\alpha : t \mapsto \dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car elle est :

× intégrable en 0 car continue sur $[0,+\infty[$,

× intégrable en $+\infty$ puisque : $\alpha(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

(l'inégalité $(*)$ démontre au passage que pour tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$)

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction } f \text{ est bien définie et de classe } \mathscr{C}^0 \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

□

26. Établir que cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Démonstration.

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^1 \text{ - étude « en } x \text{ »}}$

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $\underline{h_t} : x \mapsto \dfrac{1}{1+t^2} \arctan(t\,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\underline{h}'_t(x) = \frac{1}{1+t^2}\ \frac{1}{1+\left(t\,x\right)^2}\ t = \frac{1}{1+t^2}\ \frac{1}{1+\left(t\,x\right)^2}\ t = \frac{t}{1+t^2}\ \frac{1}{1+t^2\,x^2}$$

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

  (0) Pour tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question précédente.

- Intégrabilité par domination

(1) ▶ Pour tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+t^2\,x^2}$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.

▶ Soit $a \in [0,+\infty[$. Soit $x \in [a,+\infty[$. Soit $t \in]0,+\infty[$.

$$\left| \frac{t}{1+t^2}\ \frac{1}{1+x^2\,t^2} \right| = \frac{|t|}{|\,1+t^2\,|}\ \frac{1}{|\,1+x^2\,t^2\,|} = \frac{t}{1+t^2}\ \frac{1}{1+x^2\,t^2} \leqslant \frac{t}{1+t^2}\ \frac{1}{1+a^2\,t^2} \qquad (*)$$

Et la fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+a^2\,t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car elle est :

× intégrable en 0 car continue sur $[0,+\infty[$,

× intégrable en $+\infty$ puisque : $\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$.

(l'inégalité $(*)$ démontre au passage que pour tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+x^2\,t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$)

L'inégalité $(*)$ s'obtient en remarquant que pour tout $x \geqslant a$:

	x^2	$\geqslant$	a^2	*(par croissance de la fonction élévation au carré sur $[0,+\infty[$)*
donc	$x^2\,t^2$	$\geqslant$	$a^2\,t^2$	*(car $t^2 \geqslant 0$)*
donc	$1+x^2\,t^2$	$\geqslant$	$1+a^2\,t^2$	
donc	$\dfrac{1}{1+x^2\,t^2}$	$\leqslant$	$\dfrac{1}{1+a^2\,t^2}$	*(par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$)*
donc	$\dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+x^2\,t^2}$	$\leqslant$	$\dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+a^2\,t^2}$	*(car $\dfrac{t}{1+t^2} \geqslant 0$)*

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

De plus :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \ f'(x) \ = \ \int_0^{+\infty} \underline{h}'_t(x)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\ \frac{1}{1+x^2\,t^2}\ dt$$

Commentaire

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall\,(a,b) \in A^2 \text{ (avec } a < b\text{), il existe une fonction } \alpha \text{ intégrable sur } I \text{ telle que :}\\[2mm] \forall\, x \in [a,b], \forall\, t \in I,\ \left| \underline{h}_t^{(1)}(x) \right| \leqslant \alpha(t)\end{array}}$$

- Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]$ produit une fonction α dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de α ne dépend que de a, alors on peut préférer faire l'hypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a,\beta|$ où β est la borne haute de A. C'est ce qui est réalisé dans la question où l'hypothèse de domination est réalisée sur tout intervalle de type $[a,+\infty[$.

27. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in \,]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,1[$.

- Tout d'abord :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2\,t}{1+t^2x^2} = \frac{t\,\left(1+t^2x^2\right) - x^2\,t\,\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\,\left(1+t^2x^2\right)} = \frac{t + \cancel{t^3x^2} - x^2\,t - \cancel{x^2\,t^3}}{\left(1+t^2\right)\,\left(1+t^2x^2\right)} = \frac{t\,\left(1-x^2\right)}{\left(1+t^2\right)\,\left(1+t^2x^2\right)}$$

- Par ailleurs, pour tout $B > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^B \frac{t}{1+t^2}\ \frac{1}{1+x^2\,t^2}\ dt \ &= \ \frac{1}{1-x^2}\ \int_0^B \frac{t\,\left(1-x^2\right)}{\left(1+t^2\right)\,\left(1+x^2\,t^2\right)}\ dt \qquad \textit{(d'après la question précédente)}\\
&= \ \frac{1}{1-x^2}\ \int_0^B \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2\,t}{1+x^2\,t^2}\right)\ dt\\
&= \ \frac{1}{1-x^2}\ \left(\int_0^B \frac{t}{1+t^2}\ dt \ - \ \int_0^B \frac{x^2\,t}{1+x^2\,t^2}\ dt\right)\\
&= \ \frac{1}{1-x^2}\ \left(\frac{1}{2}\ \left[\ \ln(1+t^2)\ \right]_0^B \ - \ \frac{1}{2}\ \left[\ \ln\left(1+x^2\,t^2\right)\ \right]_0^B\right)\\
&= \ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-x^2}\ \left(\left(\ln(1+B^2) - \cancel{\ln(1)}\right) \ - \ \left(\ln\left(1+x^2\,B^2\right) - \cancel{\ln(1)}\right)\right)\\
&= \ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-x^2}\ \ln\left(\frac{1+B^2}{1+x^2\,B^2}\right)
\end{aligned}$$

- De plus :

$$\frac{1+B^2}{1+x^2\,B^2} \underset{B\to+\infty}{\sim} \frac{B^2}{x^2\,B^2} = \frac{1}{x^2}$$

Ainsi, par composition de limites :

$$\ln\left(\frac{1+B^2}{1+x^2\,B^2}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2\ln(x) \quad \textit{(car } x>0\textit{)}$$

- Finalement :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{1+x^2\,t^2}\,dt = \lim_{B\to+\infty}\left(\int_0^B \frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{1+x^2\,t^2}\,dt\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{1}{1-x^2}\,\big(-\cancel{2}\ln(x)\big)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x\in\,]0,1[,\ f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}.}$$

□

28. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme f est définie sur $[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f(1) &= \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\big(\arctan(t)\big)^1\,dt \\
&= \left[\frac{\big(\arctan(t)\big)^2}{2}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to+\infty}\big(\arctan(t)\big)^2 - \big(\arctan(0)\big)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\big(\lim_{t\to+\infty}\arctan(t)\big)^2 - \big(\arctan(0)\big)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(1) = \frac{\pi^2}{8}}$$

- D'après la question précédente, pour tout $t\in\,]0,1[$, $f'(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$.
On en déduit, pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$\underbrace{\int_0^x f'(t)\,dt}_{=\,f(x)-f(0)} = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$$

$$\boxed{\forall x\in\,]0,1[,\ f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt}$$

- Par ailleurs, par définition de f :

$$f(0) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(0)}{1+t^2}\, dt \;=\; \int_0^{+\infty} 0\, dt \;=\; 0$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x\to 1} f(x) && \textit{(car f est continue en 1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \left(\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt \right) \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt && \textit{(car l'intégrale } \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt \textit{ est convergente)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} && \textit{(d'après la question 24)} \end{aligned}$$

- Finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \;=\; f(1) \;=\; \frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\text{On en conclut, d'après la question } \textit{23} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

□

EXERCICE 4

Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.
À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n, plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;

2. pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n ». On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(A_n),\ q_n = \mathbb{P}(B_n),\ r_n = \mathbb{P}(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E \mid F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Partie I - Calcul des probabilités

29. Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$p_0 \ = \ \mathbb{P}(A_0) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1 \qquad \textit{(car, d'après l'énoncé, le pion se trouve sur le point } A \textit{ à l'instant } 0\textit{)}$$

- On en déduit, pour la même raison :

$$q_0 \ = \ \mathbb{P}(B_0) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0 \quad \text{et} \quad r_0 \ = \ \mathbb{P}(C_0) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_0 = 1,\ q_0 = 0 \text{ et } r_0 = 0.}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathbb{P}(A_1) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_0) && \textit{(car } A_0 = \Omega\textit{)} \\ &= \mathbb{P}(A_1 \mid A_0) \times \mathbb{P}(A_0) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 && \textit{(d'après l'énoncé)} \end{aligned}$$

- De même :

$$\begin{array}{rcll} q_1 & = & \mathbb{P}\big(B_1\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap A_0\big) & \textit{(car } A_0 = \Omega\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\big(B_1 \,|\, A_0\big) \times \mathbb{P}\big(A_0\big) & \\ & = & \dfrac{1}{4} \times 1 & \textit{(d'après l'énoncé)} \end{array}$$

Par le même calcul : $r_1 = \mathbb{P}\big(C_1\big) = \mathbb{P}\big(C_1 \cap A_0\big) = \mathbb{P}\big(C_1 \,|\, A_0\big) \times \mathbb{P}\big(A_0\big) = \dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } p_1 = \frac{1}{2},\ q_1 = \frac{1}{4} \text{ et } r_1 = \frac{1}{4}.}$$

Commentaire

- Pour calculer la probabilité d'un événement, on doit travailler sur l'événement considéré. La stratégie consiste généralement à décomposer l'événement sous forme d'une réunion ou d'une intersection d'événements plus basiques (introduits ou non dans l'énoncé). Dès lors, choisir d'utiliser une notation particulière (à savoir p_n, q_n et r_n) pour désigner des probabilités d'événements apparaît peu pertinent. La première chose qu'il faudra faire lors du calcul des valeurs de ces éléments c'est revenir à la définition :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \ = \ \mathbb{P}\big(A_n\big)$$

C'est alors un travail sur l'événement A_n qui devra être mené pour déterminer $\mathbb{P}\big(A_n\big)$.
- En l'occurrence, dans cette question, il faut déterminer l'événement $\mathbb{P}\big(A_0\big)$. Or :

$$\begin{array}{rl} & \text{L'événement } A_0 \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{Le pion se trouve sur le point } A \text{ l'étape } 0 \end{array}$$

D'après l'énoncé, la dernière propriété est vérifiée ce qui démontre que la première l'est et ainsi : $A_0 = \Omega$.

□

30. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Considérons l'étape n. Trois cas se présentent.

  × Le pion se trouve au point A. C'est le cas si et seulement si l'événement A_n est réalisé.

  OU × Le pion se trouve au point B. C'est le cas si et seulement si l'événement B_n est réalisé.

  OU × Le pion se trouve au point C. C'est le cas si et seulement si l'événement C_n est réalisé.

  Ces événements étant de plus 2 à 2 incompatibles, on en déduit que la famille (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

- Il s'agit de démontrer :

$$V_{n+1} \;=\; \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(C_n) \\ \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(C_n) \\ \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$$

  Démontrons la première ligne. La famille (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap C_n) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, A_n) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, B_n) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, C_n) \times \mathbb{P}(C_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(C_n) \qquad \textit{(d'après ce qui suit)} \end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue grâce aux valeurs des probabilités conditionnelles considérées. Déterminons-les.
  - × **Si** l'événement A_n est réalisé, **c'est que**, à l'étape n, le pion se trouve au point A.
  - × **Dans ce cas**, l'événement A_{n+1} est réalisé si et seulement si le pion ne se déplace pas et reste donc au point A à l'étape $n+1$. D'après l'énoncé, cela se produit avec probabilité $\frac{1}{2}$.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, A_n) = \frac{1}{2}.}$$

  $$\boxed{\text{Par des arguments similaires, on démontre : } \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, B_n) = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, C_n) = \frac{1}{4}.}$$

- On démontre alors, toujours grâce à la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1} \,|\, A_n) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \,|\, B_n) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \,|\, C_n) \times \mathbb{P}(C_n) \\ &= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(C_n) \end{aligned}$$

  ainsi que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}(C_{n+1} \,|\, A_n) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_{n+1} \,|\, B_n) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_{n+1} \,|\, C_n) \times \mathbb{P}(C_n) \\ &= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(C_n) \end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = M\, V_n.}$$

Commentaire

- Dans cet énoncé, on étudie l'évolution d'un déplacement au cours du temps. On a affaire ici à une représentation discrétisée du temps : on connaît l'état du pion à toute étape $n \in \mathbb{N}$ et on suit son évolution d'une étape à la suivante.
- Dans ce type d'exercice, il est classique d'avoir à déterminer des probabilités conditionnelles car il s'agit de connaître la probabilité de passage d'un état à l'étape n (le pion se trouve en un point) à un autre état à l'étape $n+1$. Il est donc primordial de connaître la rédaction associée à la détermination de ces probabilités conditionnelles.

Commentaire

- Dans les exercices, il est **vivement** déconseillé, pour déterminer une probabilité conditionnelle de partir de la définition à savoir :

$$\mathbb{P}\big(C_{n+1} \,|\, A_n\big) \;=\; \frac{\mathbb{P}\big(C_{n+1} \cap A_n\big)}{\mathbb{P}\big(A_n\big)} \qquad (*)$$

Revenir à cette définition $(*)$ ramène le calcul d'une probabilité conditionnelle au calcul de la probabilité d'une intersection. Cela n'a généralement **aucun intérêt**. En effet :

1) si les événements C_{n+1} et A_n sont indépendants, alors :

$$\mathbb{P}\big(C_{n+1} \cap A_n\big) = \mathbb{P}\big(C_{n+1}\big) \times \mathbb{P}\big(A_n\big)$$

ce qui permet de démontrer : $\mathbb{P}\big(C_{n+1} \,|\, A_n\big) = \mathbb{P}\big(C_{n+1}\big)$. Mais si la probabilité de réalisation de A_n n'influe pas sur la probabilité de réalisation de C_{n+1}, pourquoi diable demanderait-on le calcul de $\mathbb{P}\big(C_{n+1} \,|\, A_n\big)$?

2) si les événements ne sont pas indépendants, le calcul de la probabilité de l'intersection se fera à l'aide de la formule :

$$\mathbb{P}\big(C_{n+1} \cap A_n\big) \;=\; \mathbb{P}\big(C_{n+1} \,|\, A_n\big) \times \mathbb{P}\big(A_n\big)$$

ce qui, une fois réinjecté dans l'égalité de définition $(*)$, nous permet de brillamment conclure : $\mathbb{P}\big(C_{n+1} \,|\, A_n\big) \;=\; \mathbb{P}\big(C_{n+1} \,|\, A_n\big)$.

Il faut donc considérer qu'écrire systématiquement la définition $(*)$ est un **très mauvais réflexe** dont il convient de se débarrasser. Passer par $(*)$ ne doit se faire que si la valeur de $\mathbb{P}\big(C_{n+1} \cap A_n\big)$ a été déterminé auparavant.

$\square$

31. En déduire que $V_n = M^n\, V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\,:\, V_n = M^n\, V_0$.
  - **Initialisation** :
  $$M^0\, V_0 \;=\; I_3\, V_0 \;=\; V_0$$
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $V_{n+1} = M^{n+1}\, V_0$).
  $$\begin{aligned} V_{n+1} &= M\, V_n && \textit{(d'après la question 30)} \\ &= M \times \big(M^n\, V_0\big) \\ &= M^{n+1}\, V_0 \end{aligned}$$
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).}$$

- Par ailleurs, (d'après la question *29*) :

$$V_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_0) \\ \mathbb{P}(B_0) \\ \mathbb{P}(C_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V_n &= M^n V_0 \\ &= \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 \\ 4^n-1 \\ 4^n-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par définition de V_n, on en conclut :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right), \ \mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \text{ et } \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).}$$

□

32. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Démonstration.

- D'après la question précédente :
  - × $p_n = \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$,
  - × $q_n = \mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$,
  - × $r_n = \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{3}}$$

- Ce résultat signifie, qu' « à terme », le pion à une égale chance de se retrouver au point A, B ou C. Plus rigoureusement, ce résultat nous indique que le pion à presque une égale chance de se retrouver en chacun des points après un nombre d'étapes suffisamment grand. Comme la suite (4^n) diverge très rapidement vers $+\infty$ ($4^{10} > 10^9$), on peut d'ailleurs préciser qu'un nombre limité d'étapes suffit pour que le pion ait presque une égale chance de se retrouver en chacun des points.
- Il était possible d'anticiper ce résultat : hormis en l'étape 0 où le pion est placé en A, les rôles des points A, B et C sont symétriques. La position initiale du pion en A confère légitimement un avantage à ce point : au bout de n étapes, le pion à plus de chance de se retrouver en B que en C (par symétrie du problème il est d'ailleurs logique que B et C aient une probabilité égale d'être atteints par le pion). Cet avantage décroît lorsque le nombre d'étapes augmente et devient rapidement très faible.

□

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

33. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et le nombre $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)$.

Démonstration.

- La variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ prend pour valeur le nombre de passages du pion au point A au cours des n premières étapes (l'étape 0 étant exclue).
- Le nombre $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)$ est un moyenne pondérée des valeurs prises par $X_1 + \cdots + X_n$. On peut donc considérer que ce nombre représente le nombre moyen de passages du pion A entre l'étape 1 et l'étape n. Autrement dit, ce nombre n'est autre que a_n.

□

34. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord : $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$.
  On en déduit : $X_n \sim \mathcal{B}(s)$ où $s = \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big)$.
- Or, par définition de la variable aléatoire X_n :

  $$\text{L'événement } \{X_n = 1\} \text{ est réalisé } \Leftrightarrow \text{ L'événement } A_n \text{ est réalisé}$$

  Ainsi : $\mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) = \mathbb{P}(A_n) = p_n$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_n \sim \mathcal{B}(p_n) \text{ et } \mathbb{E}(X_n) = p_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right).}$$

□

35. En déduire une expression de a_n.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) &= \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^1}\right) + \cdots + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right) && \textit{(car d'après la précédente : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^k}\right)\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{4^k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} && \textit{(par formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison } \tfrac{1}{4} \neq 1\textit{)} \\
&= \frac{n}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}$$

□

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;

2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

Commentaire

- Telle qu'écrite, la définition de la variable T_B est fausse. Rappelons qu'écrire $T_B = 0$ signifie que la variable aléatoire T_B est la variable aléatoire constante nulle. Ce n'est évidemment pas le cas puisque la variable T_B peut prendre la valeur 1 (par exemple). C'est le cas si le pion se trouve au point B à l'étape 1.
- On ne peut que s'interroger sur les raisons amenant un concepteur à mal écrire des mathématiques. Il n'est pourtant pas difficile de corriger cet énoncé :

  1. si le pion ne passe jamais en B, la variable aléatoire T_B prend la valeur 0 ;

  2. sinon, T_B prend pour valeur le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

36. Calculer $\mathbb{P}\big(\{T_B = 1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{T_B = 2\}\big)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

  L'événement $\{T_B = 1\}$ est réalisé

  $\Leftrightarrow$ La variable T_B prend la valeur 1

  $\Leftrightarrow$ Le pion passe pour la première fois en B à l'étape 1

  $\Leftrightarrow$ L'événement B_1 est réalisé *(rappelons que le pion est au point A à l'étape 0)*

  Ainsi : $\{T_B = 1\} = B_1$.

  $$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\big(\{T_B = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(B_1\big) = \frac{1}{4} \text{ d'après la question } \mathbf{\textit{29}}.}$$

- Ensuite :

  L'événement $\{T_B = 2\}$ est réalisé

  $\Leftrightarrow$ La variable T_B prend la valeur 2

  $\Leftrightarrow$ Le pion passe pour la première fois en B à l'étape 2

  $\Leftrightarrow$ Le pion ne se trouve pas au point B à l'étape 1
  `ET` Le pion se trouve au point B à l'étape 2

  $\Leftrightarrow$ L'événement $\overline{B_1}$ est réalisé
  `ET` L'événement B_2 est réalisé

  $\Leftrightarrow$ L'événement $\overline{B_1} \cap B_2$ est réalisé

  Ainsi : $\{T_B = 2\} = \overline{B_1} \cap B_2$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\ \{T_B = 2\}\ \big) \\
= \ & \mathbb{P}\Big(\overline{B_1} \cap B_2\Big) \\
= \ & \mathbb{P}\Big(A_1 \cap \overline{B_1} \cap B_2\Big) + \mathbb{P}\Big(B_1 \cap \overline{B_1} \cap B_2\Big) + \mathbb{P}\Big(C_1 \cap \overline{B_1} \cap B_2\Big) && \textit{(par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements } (A_1, B_1, C_1)\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}\Big(\big(A_1 \cap \overline{B_1}\big) \cap B_2\Big) + \mathbb{P}\Big(\big(B_1 \cap \overline{B_1}\big) \cap B_2\Big) + \mathbb{P}\Big(\big(C_1 \cap \overline{B_1}\big) \cap B_2\Big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(A_1 \cap B_2\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\varnothing \cap B_2\big) \ + \ \mathbb{P}\big(C_1 \cap B_2\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(A_1\big) \times \mathbb{P}_{A_1}\big(B_2\big) \ + \ 0 \ + \ \mathbb{P}\big(C_1\big) \times \mathbb{P}_{C_1}\big(B_2\big) \\
= \ & \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \ + \ \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} && \textit{(d'après la question 29)} \\
= \ & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\big(\{T_B = 2\}\big) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}.}$$

□

37. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& \text{L'événement } \overline{B_n} \text{ est réalisé} \\
\Leftrightarrow \ & \text{Le pion ne se trouve pas au point } B \text{ à l'étape } n \\
\Leftrightarrow \ & \quad \text{Le pion se trouve au point } A \text{ à l'étape } n \\
& \texttt{OU} \quad \text{Le pion se trouve au point } C \text{ à l'étape } n \\
\Leftrightarrow \ & \quad \text{L'événement } A_n \text{ est réalisé} \\
& \texttt{OU} \quad \text{L'événement } C_n \text{ est réalisé} \\
\Leftrightarrow \ & \text{L'événement } A_n \cup C_n \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{B_n} = A_n \cup C_n}$$

□

38. Établir que $\mathbb{P}\Big(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) = \frac{1}{4}\mathbb{P}\Big(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)$, puis en déduire que $\mathbb{P}\Big(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) = \frac{1}{4}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) &= \mathbb{P}\Big(B_3 \cap \big(A_2 \cup C_2\big) \cap \overline{B_1}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(B_3 \cap \Big(\ \big(A_2 \cap \overline{B_1}\big) \ \cup \ \big(C_2 \cap \overline{B_1}\big)\Big)\ \Big) && \textit{(par distributivité de la loi } \cap \textit{ sur la loi } \cup\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\Big(\big(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\big) \ \cup \ \big(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\big)\Big) && \textit{(par distributivité de la loi } \cap \textit{ sur la loi } \cup\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\Big(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\Big) \ + \ \mathbb{P}\Big(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\Big) && \textit{(par incompatibilité)}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\Big) &= \mathbb{P}\Big(B_3 \,\big|\, A_2 \cap \overline{B_1}\Big) \times \mathbb{P}\Big(A_2 \cap \overline{B_1}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(B_3 \,\big|\, A_2\Big) \times \mathbb{P}\Big(A_2 \cap \overline{B_1}\Big) \qquad \textit{(car le mouvement du pion de l'étape 2 à l'étape 3 ne dépend que de la position du pion à l'étape 2)} \\
&= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(A_2 \cap \overline{B_1}\Big)
\end{aligned}$$

De manière similaire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\Big) &= \mathbb{P}\Big(B_3 \,\big|\, C_2 \cap \overline{B_1}\Big) \times \mathbb{P}\Big(C_2 \cap \overline{B_1}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(B_3 \,\big|\, C_2\Big) \times \mathbb{P}\Big(C_2 \cap \overline{B_1}\Big) \qquad \textit{(car le mouvement du pion de l'étape 2 à l'étape 3 ne dépend que de la position du pion à l'étape 2)} \\
&= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(C_2 \cap \overline{B_1}\Big)
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) &= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(A_2 \cap \overline{B_1}\Big) + \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(C_2 \cap \overline{B_1}\Big) \\
&= \frac{1}{4} \times \Big(\mathbb{P}(A_2 \cap \overline{B_1}) + \mathbb{P}(C_2 \cap \overline{B_1})\Big) \\
&= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big((A_2 \cap \overline{B_1}) \cup (C_2 \cap \overline{B_1})\Big) \qquad \textit{(car les événements } A_2 \cap \overline{B_1} \textit{ et } C_2 \cap \overline{B_1} \textit{ sont incompatibles)} \\
&= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big((A_2 \cup C_2) \cap \overline{B_1}\Big) \\
&= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) \qquad \textit{(d'après la question 37)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\Big(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) = \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)}$$

- Enfin :

$$\mathbb{P}\Big(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)}{\mathbb{P}\Big(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)} = \frac{\frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)}{\mathbb{P}\Big(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\Big(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) = \frac{1}{4}}$$

□

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}$$

39. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(\{T_B = k\})$. Que vaut $\mathbb{P}(\{T_B = 0\})$?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événément } \{T_B = k\} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{La variable aléatoire } T_B \text{ prend la valeur } k \\ \Leftrightarrow & \text{Le pion passe pour la première fois en } B \text{ à l'étape } k \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{cl} & \text{Le pion n'était pas en } B \text{ à l'étape } 1 \\ \texttt{ET} & \text{Le pion n'était pas en } B \text{ à l'étape } 2 \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \texttt{ET} & \text{Le pion n'était pas en } B \text{ à l'étape } k-1 \\ \texttt{ET} & \text{Le pion est en } B \text{ à l'étape } k \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{cl} & \text{L'événement } \overline{B_1} \text{ est réalisé} \\ \texttt{ET} & \text{L'événement } \overline{B_2} \text{ est réalisé} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \texttt{ET} & \text{L'événement } \overline{B_{k-1}} \text{ est réalisé} \\ \texttt{ET} & \text{L'événement } B_k \text{ est réalisé} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } \overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\{T_B = k\} = \overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k}$$

- Par formule des probabilités composées :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{T_B = k\}) & = & \mathbb{P}\Big(\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k\Big) \\ & = & \mathbb{P}\Big(B_k \cap \overline{B_{k-1}} \cap \ldots \cap \overline{B_1}\Big) \\ & = & \mathbb{P}\left(B_k \mid \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{B_{k-1}} \mid \bigcap\limits_{i=1}^{k-2} \overline{B_i}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{B_2} \mid \overline{B_1}) \times \mathbb{P}(\overline{B_1}) \end{array}$$

- Or, d'après l'énoncé, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$:

$$\mathbb{P}\left(B_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{B_i}\right) = \frac{1}{4}$$

On a donc de plus :

$$\mathbb{P}\left(\overline{B_n} \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{B_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(B_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{B_i}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

- Enfin, d'après ***29*** :

$$\mathbb{P}(\overline{B_1}) = 1 - \mathbb{P}(B_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\{T_B = k\}\big) \;=\; \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{T_B = k\}\big) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$$

- La famille $\big(\{T_B = k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{T_B = 0\}\big) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_B = k\}\big) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} && \textit{(d'après ce qui précède)} \\
&= 1 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\
&= 1 - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= 1 - \cancel{\frac{1}{4}} \times \frac{1}{\cancel{1-\frac{3}{4}}} \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\big(\{T_B = 0\}\big) = 0.}$$

$\square$

40. Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\big(\{T_B = k\}\big) \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \;=\; \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

  On en déduit : $T_B \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

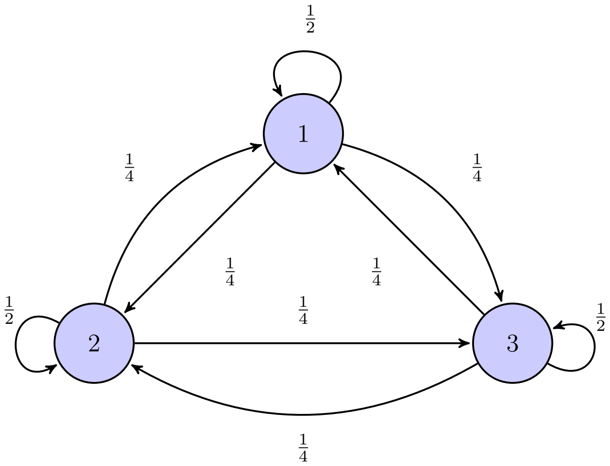
$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } T_B \text{ est d'espérance finie et : } \mathbb{E}(T_B) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.}$$

$\square$

Commentaire

- Le problème traite de l'évolution d'une grandeur aléatoire qui varie dans le temps discret. Plus précisément, il s'agit ici de l'évolution de la position d'un pion. Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (c'est-à-dire la position du pion à la fin de l'étape $k+1$) ne dépend du passé (position du pion de l'étape 0 jusqu'à la fin de l'étape k) que par le présent (c'est-à-dire la position du pion à la fin de l'étape k). Généralement, on introduit une suite de variable $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour décrire cette évolution. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pourrait définir Y_k comme la variable :
  × qui prend la valeur 1 si le pion est en position A après la $k^{\text{ème}}$ étape.
  × qui prend la valeur 2 si le pion est en position B après la $k^{\text{ème}}$ étape.
  × qui prend la valeur 3 si le pion est en position C après la $k^{\text{ème}}$ étape.

  La suite (Y_k) qui décrit la position du pion et qui vérifie les points listés ci-dessus, est appelée une **chaîne de Markov**.
- L'évolution de la suite (Y_k) de la fin de l'étape k à la fine de l'étape $k+1$ peut être représentée par le schéma suivant.



- On obtient un graphe possédant un nombre d'états fini (en l'occurrence 3).
  On dit que (Y_k) est une chaîne de Markov **à espace d'états fini**.
- L'étiquette d'un arc est la probabilité pour la suite de v.a.r. (Y_k) de passer de la valeur de départ à la valeur d'arrivée de l'instant k à l'instant $k+1$. Autrement dit, l'étiquette d'un arc menant de la position j à la position i a pour valeur : $\mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(\{Y_{k+1}=i\})$.
  Ces étiquettes ne dépendent pas de k.
  On dit que la chaîne de Markov est **homogène**.
- Le contenu de ce schéma peut être résumé par la matrice A définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ M_{i,j} = \mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(\{Y_{k+1}=i\})$$

  Cette matrice est appelée **matrice de transition**. Ici :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  On reconnaît la matrice M de l'énoncé.
- Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme même s'il peut arriver que ces termes soient présents dans un énoncé.