

DS8

Exercice 1

On considère dans cet exercice la fonction définie pour tout réel $x \geq 0$ par :

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu} du$$

Étude d'une fonction auxiliaire f

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(u) = \frac{1 - \cos(u)}{u^2}$$

1. Établir que f est continue sur $]0, +\infty[$, et vérifier : $\forall u > 0, 0 \leq f(u) \leq \frac{2}{u^2}$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :
 - × $f_1 : u \mapsto 1 - \cos(u)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 - × $f_2 : u \mapsto u^2$:
 - est continue sur $]0, +\infty[$.
 - NE S'ANNULE PAS sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $u \in]0, +\infty[$, $-1 \leq \cos(u) \leq 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 1 &\geq -\cos(u) \geq -1 \\ \text{donc} \quad 2 &\geq 1 - \cos(u) \geq 0 \\ \text{donc} \quad \frac{2}{u^2} &\geq \frac{1 - \cos(u)}{u^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall u \in]0, +\infty[, 0 \leq f(u) \leq \frac{2}{u^2}$.

□

2. Établir que f admet une limite ℓ (dont on précisera la valeur) en 0.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \cos(u) &= 1 - \frac{u^2}{2!} + O_{u \rightarrow 0}(u^4) \\ \text{donc} \quad -\cos(u) &= -1 + \frac{u^2}{2} + O_{u \rightarrow 0}(u^4) \\ \text{donc} \quad 1 - \cos(u) &= \frac{u^2}{2} + O_{u \rightarrow 0}(u^4) \\ \text{donc} \quad \frac{1 - \cos(u)}{u^2} &= \frac{1}{2} + O_{u \rightarrow 0}(u^2) \end{aligned}$$

- Finalement :

$$\frac{1 - \cos(u)}{u^2} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \frac{1}{2}$.

□

Dans la suite, on posera $f(0) = \ell$, et on notera encore f ce prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}_+$.

3. En déduire que l'intégrale $L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$ est convergente.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u) du$ est impropre seulement en $+\infty$.

- $\times \forall u \in]0, +\infty[, 0 \leq f(u) \leq \frac{2}{u^2}$

$\times$ L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2}{u^2} du$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u) du$ est (absolument) convergente.

□

4. En déduire que l'intégrale $L(x)$ est convergente pour tout réel positif x .

Démonstration.

Soit $x \geq 0$.

- La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu} du$ est impropre seulement en $+\infty$.

(la fonction $h : u \mapsto \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu}$ est prolongée par continuité en 0 en posant $h(0) = \frac{1}{2}$)

- Par ailleurs, pour tout $u > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu} \right| &= \left| \frac{1 - \cos(u)}{u^2} \right| |e^{-xu}| \\ &= \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu} \\ &\leq \frac{1 - \cos(u)}{u^2} \quad (\text{car } e^{-xu} \leq 1 \text{ puisque } -xu \leq 0) \\ &\leq \frac{2}{u^2} \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que dans la question précédente (théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives), l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu} du$ est (absolument) convergente.

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $L(x)$ est convergente.

□

Propriétés de la fonction L

5. Démontrer que la fonction L est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

(i) Caractère $\mathcal{C}^0$ - étude « en x »

Pour tout $u_0 \in [0, +\infty[$, la fonction $\underline{h}_{u_0} : x \mapsto \frac{1 - \cos(u_0)}{u_0^2} e^{-u_0 x}$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en u »

► Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $u \mapsto \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-ux}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

► Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $u \in [0, +\infty[$.

$$\left| \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-ux} \right| = \left| \frac{1 - \cos(u)}{u^2} \right| |e^{-ux}| \leq |f(u)| = f(u) \quad (*)$$

Et la fonction $\psi : u \mapsto f(u)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ par l'étude précédente.

(l'inégalité $(*)$ démontre au passage que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $u \mapsto \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-ux}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$)

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction L est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$. □

6. Vérifier l'inégalité : $\forall u \in \mathbb{R}, 1 - \cos(u) \leq \frac{u^2}{2}$, et en déduire : $\forall u \geq 0, 0 \leq f(u) \leq \frac{1}{2}$.

En déduire : $\forall x > 0, 0 \leq L(x) \leq \frac{1}{2x}$, et préciser la limite de L en $+\infty$.

Démonstration.

• Rappelons tout d'abord que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(2t) &= (\cos(t))^2 - (\sin(t))^2 \\ &= \left(1 - (\sin(t))^2\right) - (\sin(t))^2 \\ &= 1 - 2(\sin(t))^2 \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - \cos(2t) = 2(\sin(t))^2$$

• Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1 - \cos(u) &= 1 - \cos\left(2 \frac{u}{2}\right) \\ &= 2 \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2 \\ &\leq 2 \left|\frac{u}{2}\right|^2 && (\text{car : } \forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t| \text{ et par croissance de la fonction élévation au carré}) \\ &= 2 \frac{u^2}{4} \end{aligned}$$

On a bien : $\forall u \in \mathbb{R}, 1 - \cos(u) \leq \frac{u^2}{2}$ et pour tout $u > 0, f(u) \leq \frac{1}{2}$ en multipliant par $\frac{1}{u^2} > 0$.
(l'inégalité reste valable en 0 puisque $f(0) = 0$)

- On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$0 \leq f(u) e^{-ux} \leq \frac{1}{2} e^{-ux} \quad (\text{en multipliant par } e^{-ux} \geq 0)$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_0^{+\infty} f(u) e^{-xu} du \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xu} du \quad (\text{par croissance de l'intégrale})$$

La dernière ligne est licite car l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xu} du$ est convergente comme intégrale de référence de paramètre $x > 0$. De plus :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xu} du = \left[\frac{e^{-xu}}{-x} \right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{x} [e^{-xu}]_0^{+\infty} = \frac{-1}{x} \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-xu} - e^{-x \times 0} \right) = \frac{1}{x}$$

Pour tout $x > 0$, $0 \leq L(x) \leq \frac{1}{2x}$.

- Enfin, comme :

$$\times 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\times \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

alors, par théorème d'encadrement, L admet une limite finie en $+\infty$ égale à 0.

$$L(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

□

7. Établir que la fonction L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser $L''(x)$ sous forme d'une intégrale.

Démonstration.

(i) Caractère $\mathcal{C}^2$ - étude « en x »

- Pour tout $u_0 \in [0, +\infty[$, la fonction $\underline{h}_{u_0} : x \mapsto \frac{1 - \cos(u_0)}{u_0^2} e^{-u_0 x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
- De plus, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \underline{h}_{u_0}'(x) &= \frac{1 - \cos(u_0)}{u_0^2} (-u_0) e^{-u_0 x} = -f(u) \times u e^{-u_0 x} \\ \underline{h}_{u_0}''(x) &= \frac{1 - \cos(u_0)}{u_0^2} (-u_0)^2 e^{-u_0 x} = f(u) \times u^2 e^{-u_0 x} \end{aligned}$$

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

(0) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $u \mapsto \underline{h}_u(x) = f(u) e^{-xu}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (démontré en question 5.).

(1) Démontrons que pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $u \mapsto \underline{h}_u'(x) = -f(u) \times u e^{-xu}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Tout d'abord, la fonction $u \mapsto -f(u) \times u e^{-xu}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Par ailleurs, pour tout $x > 0$:

$$|-f(u) \times u e^{-xu}| = |-1| |f(u)| |u| |e^{-xu}|$$

$$= f(u) \times u e^{-xu}$$

$$= O_{u \rightarrow +\infty}(u e^{-xu})$$

(car $f(u) = O_{u \rightarrow +\infty}(1)$ puisque la fonction f est bornée comme démontré en question 6)

Finalement :

$$\blacktriangleright \forall x > 0, \left| -f(u) \times u e^{-xu} \right| = O_{u \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}xu} \right).$$

$\blacktriangleright$ L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}u} du$ est convergente comme intégrale de référence de paramètre $\frac{x}{2} > 0$.

Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (-f(u) \times u e^{-xu}) du$ est (absolument) convergente.

• Intégrabilité par domination

(2) $\blacktriangleright$ Pour tout $x > 0$, la fonction $u \mapsto \underline{h}_u''(x) = f(u) \times u^2 e^{-xu}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

$\blacktriangleright$ Soit $(a, b) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. On suppose $a \leq b$. Soit $x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ \text{donc} \quad -a &\geq -x \geq -b \\ \text{donc} \quad -au &\geq -xu \geq -bu \quad (\text{car } u \geq 0) \\ \text{donc} \quad e^{-au} &\geq e^{-xu} \geq e^{-bu} \quad (\text{par croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

On en déduit alors, pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $u \in [0, +\infty[$:

$$\forall x \in [a, b], \left| f(u) \times u^2 e^{-xu} \right| = f(u) \times u^2 e^{-xu} \leq f(u) \times u^2 e^{-au}$$

Et la fonction $\psi : u \mapsto f(u) \times u^2 e^{-au}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car continue (par morceaux) sur cet intervalle et vérifiant :

$$f(u) \times u^2 e^{-au} = O_{u \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{a}{2}u} \right)$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}u} du$ est convergente comme intégrale de référence de paramètre $\frac{a}{2} > 0$ ce qui permet de conclure par théorème de domination des intégrales généralisées de fonctions continues positives.

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$ et donc sur $]0, +\infty[$.

De plus :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, L''(x) &= \int_0^{+\infty} \underline{h}_u''(x) du \\ &= \int_0^{+\infty} f(u) \times u^2 e^{-xu} du \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, L''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(u)) e^{-xu} du$$

□

Expression de $L(x)$ sans symbole intégral

8. a) Calculer pour $x > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)u} du$, et en déduire $\int_0^{+\infty} \cos(u) e^{-xu} du$.

En déduire l'expression sans symbole intégral de $L''(x)$ pour $x > 0$.

Démonstration.

Soit $x > 0$.

- Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)u} du &= \left[\frac{e^{(-x+i)u}}{-x+i} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{-x+i} \left[e^{(-x+i)u} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{-x+i} \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} e^{(-x+i)u} - e^{(-x+i) \times 0} \right) \end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$|e^{(-x+i)u}| = |e^{-xu}| \times |e^{iu}| = e^{-xu} \times 1 \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \begin{array}{l} \text{(car } -xu \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} -\infty \\ \text{puisque } x > 0) \end{array}$$

Cela permet de lever la réserve de convergence.

De plus : $\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)u} du = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{(x-i)(x+i)} = \frac{x}{x^2+1} + i \frac{1}{x^2+1}$.

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)u} du &= \int_0^{+\infty} (e^{(-x+i)u}) du \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-xu} \times e^{iu}) du \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-xu} \times (\cos(u) + i \sin(u))) du \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-xu} \cos(u)) du + i \int_0^{+\infty} (e^{-xu} \sin(u)) du \end{aligned}$$

On en conclut, par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\int_0^{+\infty} (e^{-xu} \cos(u)) du = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} (e^{-xu} \sin(u)) du = \frac{1}{x^2+1}$$

- Enfin, d'après la question précédente, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} L''(x) &= \int_0^{+\infty} (1 - \cos(u)) e^{-xu} du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xu} du - \int_0^{+\infty} \cos(u) e^{-xu} du \quad \text{(par linéarité de l'intégrale, les intégrales en présence étant convergentes)} \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$, $L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$.

□

b) En déduire qu'il existe des réels C et D tels que pour tout $x > 0$:

$$L(x) = -\frac{x}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \arctan(x) + Cx + D$$

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} L'(x) - L'(1) &= \int_1^x L''(t) dt \\ &= \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{t}{t^2 + 1} dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{2t}{t^2 + 1} dt \\ &= \left[\ln(|t|) \right]_1^x - \frac{1}{2} \left[\ln(|t^2 + 1|) \right]_1^x \\ &= (\ln(x) - \cancel{\ln(1)}) - \frac{1}{2} (\ln(x^2 + 1) - \ln(1^2 + 1)) \end{aligned}$$

On en conclut :

$$L'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + L'(1) + \frac{1}{2} \ln(2)$$

En notant $C = L'(1) + \frac{1}{2} \ln(2)$, on obtient, pour tout $x > 0$: $L'(x) = \ln(x) - \ln(x^2 + 1) + C$.

- Notons $g : x \mapsto -\frac{x}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \arctan(x) + Cx$.

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{-1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right) + \left(-\frac{x}{\cancel{2}} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \times \frac{-\cancel{2}}{x^3} \right) - \frac{1}{x^2 + 1} + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{x}{x^3 + x} - \frac{1}{x^2 + 1} + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right) + \cancel{\frac{1}{x^2 + 1}} - \cancel{\frac{1}{x^2 + 1}} + C \\ &= -\frac{1}{2} (\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2)) + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \cancel{\frac{1}{2}} (\cancel{2} \ln(x)) + C \\ &= L'(x) \end{aligned}$$

Les fonctions L' et g' coïncident sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

On en déduit que L et g sont égales à une constante près.

Autrement dit, il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x > 0, L(x) = g(x) + D$. □

- c) Déterminer les constantes C et D .
En déduire enfin la valeur de l'intégrale $L(0)$.

Démonstration.

- Remarquons :

$$\begin{aligned} \times -\frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{2} \times \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \times -\arctan(x) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- Deux cas se présentent alors.

$\times$ Si $C \neq 0$ alors :

$$L(x) = -\frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + Cx + D \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} Cx$$

Or, d'après la question 6 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$. On en conclut que le cas $C \neq 0$ est impossible.

$\times$ Si $C = 0$ alors :

$$L(x) = -\frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + D \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} + D$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$ alors $D = \frac{\pi}{2}$.

Finalement : $\forall x > 0, L(x) = -\frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$.

- D'après la question 5., la fonction L est continue sur $[0, +\infty[$. En particulier :

$$L(0) = \lim_{x \rightarrow 0} L(x)$$

Or :

$$\begin{aligned} -\frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) &= -\frac{x}{2} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) \\ &= \frac{-1}{2} (x \ln(x^2 + 1) - x \ln(x^2)) \\ &= \frac{-1}{2} x \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} x \times 2 \ln(x) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2} \times 0 \times \ln(1) + 0 \quad (\text{car } x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0) \end{aligned}$$

Finalement :

$$L(0) = \lim_{x \rightarrow 0} L(x) = 0 - 0 + \frac{\pi}{2}$$

On en conclut : $L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du = \frac{\pi}{2}$.

□

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

9. Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge.

Démonstration.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$ alors :

$$u_n(0) = e^{-0 \times \sqrt{n}} = e^0 = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$$

Ainsi, la série $\sum u_n(0)$ est grossièrement divergente.

- Si $x_0 \in]-\infty, 0[$ alors :

$$u_n(x_0) = e^{-x_0 \times \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \left(\begin{array}{l} \text{par composition de limites et car} \\ -x_0 \times \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ puisque } -x_0 > 0 \end{array} \right)$$

- Si $x_0 \in]0, +\infty[$ alors :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$\times e^{-x_0 \times \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\times$ La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum u_n(x_0)$ est (absolument) convergente.

Enfinement, la série $\sum u_n(x)$ est convergente pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Ainsi la fonction f est définie sur $D =]0, +\infty[$.

Commentaire

- Il est important de bien comprendre les objets et en particulier de différencier les séries $\sum f_n$ et $\sum f_n(x_0)$ qui représentent des objets différents.

$$\sum f_n$$

C'est une **série de fonctions**. Autrement dit, c'est la **suite de fonctions** (S_n) de terme général $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n f_k(x)$.

$$\sum f_n(x_0)$$

C'est une **série numérique**. Autrement dit, c'est la **suite numérique** $(S_n(x_0))$ de terme général $S_n(x_0) = \sum_{k=1}^n f_k(x_0)$.

La notation x_0 a un intérêt pédagogique (utilisée dans le corrigé mais pas dans l'énoncé qui préfère la notation x). Elle a pour but d'insister sur le fait que cet élément est fixé ce qui permet de mettre en avant que $\sum f_n(x_0)$ est une série numérique et pas une série de fonctions.

- Étudier la convergence simple d'une série de fonctions sur un intervalle I , c'est étudier la nature de la série numérique $\sum f_n(x_0)$ pour tout x_0 élément de I . Il est donc logique qu'une telle étude donne lieu à l'utilisation des méthodes listées dans le chapitre sur les séries numériques (notamment les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs).

□

On note alors, pour tout $x \in D$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

10. Montrer, sans calculer sa dérivée, que la fonction f est décroissante sur D .

Démonstration.

Soit $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. On suppose : $x \leq y$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{llll} x & \leq & y & \\ \text{donc} & -x & \geq & -y \\ \text{donc} & -x\sqrt{n} & \geq & -y\sqrt{n} \quad (\text{car } \sqrt{n} \geq 0) \\ \text{donc} & e^{-x\sqrt{n}} & \geq & e^{-y\sqrt{n}} \quad (\text{car la fonction exp est croissante sur } \mathbb{R}) \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) \geq u_n(y)}$$

- En sommant toutes ces inégalités, on obtient :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) = f(y)$$

Ainsi : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$.

La fonction f est donc décroissante sur $]0, +\infty[$.

□

11. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{llll} 1 & \leq & x & \\ \text{donc} & -1 & \geq & -x \\ \text{donc} & -1\sqrt{n} & \geq & -x\sqrt{n} \quad (\text{car } \sqrt{n} \geq 0) \\ \text{donc} & e^{-1\sqrt{n}} & \geq & e^{-x\sqrt{n}} \quad (\text{par croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R}) \end{array}$$

- Ainsi, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\left| e^{-x\sqrt{n}} \right| = e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-\sqrt{n}}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$ est bornée sur $[1, +\infty[$. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \|u_n\|_{\infty, [1, +\infty[} \leq e^{-\sqrt{n}} \quad (*)$$

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-\sqrt{n}} \geq 0 \text{ et } \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$\times e^{-\sqrt{n}} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

× La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ est (absolument) convergente.

L'inégalité (*) permet alors de conclure, par critère de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum \|u_n\|_{\infty, [1, +\infty[}$ est convergente.

On en conclut que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

□

12. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Démonstration.

(i) Existence d'une limite finie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{par composition de limite et} \\ \text{car } -x\sqrt{n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \end{array} \right)$$

On note ℓ_n cette limite.

(ii) Convergence uniforme (par convergence normale)

D'après la question précédente, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

Par théorème de la double limite, la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en $+\infty$ donnée par :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$$

□

13. Soit $J = \int_1^{+\infty} f(t) dt$. Montrer que l'intégrale J converge et prouver : $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Démonstration.

On utilise le théorème d'intégration terme à terme afin d'intervertir les symboles $\sum_{n=1}^{+\infty}$ et $\int_1^{+\infty}$.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- D'après la question 1., la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[1, +\infty[$.
- De plus, la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[1, +\infty[$ par théorème de régularité des séries de fonctions. En effet :
 - × pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $[1, +\infty[$.
 - × la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

(i) Intégrabilité - étude « en t »

Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $u_{n_0} : t \mapsto e^{-\sqrt{n_0}t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} u_{n_0}(t) dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

- × $\forall t \in [1, +\infty[, |e^{-\sqrt{n_0}t}| = e^{-\sqrt{n_0}t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$

× L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} u_{n_0}(t) dt$ est convergente.

(ii) Hypothèse spécifique

Démontrons que la série numérique $\sum \int_0^1 |f_n(t)| dt$ converge.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} |u_n(t)| dt &= \int_1^{+\infty} |e^{-\sqrt{n}t}| dt \\ &= \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{n}t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-\sqrt{n}t}}{-\sqrt{n}} \right]_1^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n}} \left[e^{-\sqrt{n}t} \right]_1^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}t} - e^{-\sqrt{n}1} \right) \\ &= \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}t} = 0$, la réserve de convergence est levée.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

$$\times \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ est (absolument) convergente.

On en conclut, par théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
De plus :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(t) dt &= \int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}t} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{n}t} dt \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale J est convergente et $J = \int_1^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

□

Exercice 3

On considère l'équation (E) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + x + 1)y(x) = 0$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

14. Soit y de classe $\mathcal{C}^2$ une solution de (E) . Calculer $y(0)$.

15. On cherche une solution f de (E) développable en série entière et telle que $f'(0) = 1$.

On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

16. a) Montrer que l'on a :
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, (n^2 - 1)a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

b) Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence : $\forall n \geq 1, |a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}$.

c) Justifier alors que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

17. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de (E) . On pose, pour tout x réel, $z(x) = xy(x)e^x$.

a) Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

b) Prouver que z' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$xu'(x) - (2x + 1)u(x) = 0 \tag{F}$$

d'inconnue la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Une équation différentielle

18. a) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$u' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)u = 0$$

b) Justifier que les solutions sont prolongeables par continuité en 0.

19. Démontrer que, pour tout réel c , la fonction $x \mapsto cxe^{2x}$ est solution de (F) sur $\mathbb{R}$.

On admet que ce sont les seules solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

20. Démontrer qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = a(2x - 1)e^{2x} + a$$

21. Déterminer alors une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 4

Notations / vocabulaire

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On utilisera les notations matricielles classiques :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles à n lignes ;
- 0_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls ;

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques ;
- $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A ;

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthodiagonalisable s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = PDP^\top$.

Les éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont assimilés à des réels.

Avec ces notations, le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $(U | V) = U^\top V$.

On note $\|U\|$ la norme euclidienne de $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I.A - Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

22. En observant la première et la dernière colonne de A_1 , déterminer un vecteur propre de A_1 et la valeur propre λ_1 associée.
23. Déterminer le sous-espace propre de A_1 associé à la valeur propre λ_1 et en déduire le spectre de A_1 .
24. Orthodiagonaliser A_1 .

I.B - Un exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

25. Montrer que l'application $\phi : (P, Q) \mapsto \phi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
26. Écrire la matrice H de ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire la matrice de terme général $h_{i,j} = \phi(X^i, X^j)$ où les indices i et j varient entre 0 et $n-1$.
27. Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer le produit $U^\top H U$ à l'aide de ϕ et des coefficients de U .
28. Montrer que H appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont strictement positives.

I.C - Rayon spectral

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de spectre non vide, le rayon spectral de A , noté $\rho(A)$, est défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

29. Montrer que, si A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$, alors le rayon spectral de A est nul.
30. On note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1\}$. Démontrer que C est une partie fermée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
31. En déduire que l'application : $U \mapsto |U^\top A U|$ admet un maximum sur C .
32. Montrer que $\rho(A) \leq \max_{U \in C} |U^\top A U|$.

I.D - Rayon spectral d'une matrice symétrique

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

33. Démontrer que $\rho(A) = \max_{U \in C} |U^\top A U|$.

On suppose de plus que les valeurs propres de A sont toutes positives.

34. Montrer alors que $\rho(A) = \max_{U \in C} (U^\top A U)$.
35. Démontrer que l'application ρ définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Temps d'attente avant une collision

Présentation générale

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées par les entiers de 1 à n . On procède à une succession de tirages avec remise dans cette urne. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour tirer pour la seconde fois une boule déjà tirée auparavant.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère la variable aléatoire T_n définie de la façon suivante :

$$T_n = \min \{j \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket \mid \exists i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket, X_i = X_j\}$$

Par exemple, si on suppose que $n = 4$ et que l'évènement :

$$\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 3\} \cap \{X_3 = 2\} \cap \{X_4 = 3\} \cap \{X_5 = 4\}$$

est réalisé, alors $T_n = 4$, car c'est au quatrième tirage que pour la première fois réapparaît un résultat déjà obtenu.

L'objectif de cet exercice est de déterminer un équivalent de l'espérance de la variable aléatoire T_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Partie I- Une expression de l'espérance de T_n

36. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire T_n .

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et la variable aléatoire $Z = (X_1, \dots, X_k)$.

37. Justifier que Z suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket^k$.

38. Dans cette question, on considère l'évènement :

$$A = \left\{ (a_1, \dots, a_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \mid \text{les éléments } a_1, \dots, a_k \text{ sont deux à deux distincts} \right\}$$

Exprimer le cardinal de A en fonction de n et de k , puis en déduire :

$$\mathbb{P}(\{T_n > k\}) = \mathbb{P}(\{Z \in A\}) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

On remarque que le résultat de la question précédente est encore valable pour $k = 0$.

39. Justifier que la variable aléatoire T_n est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell}$$

Partie II - Une expression intégrale de l'espérance

Dans cette partie, on détermine une expression de l'espérance de T_n sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

40. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale I_k est convergente.

41. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

42. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$ converge, puis :

$$\mathbb{E}(T_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$$

Partie III - Un équivalent de l'espérance

Dans cette partie, on détermine un équivalent de l'intégrale obtenue à la question 42 lorsque $n \rightarrow +\infty$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$$

Les résultats de la partie précédente impliquent la convergence de ces deux intégrales.

III. 1 - Étude de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

43. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un changement de variable, établir :

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv$$

44. Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, K_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv$$

est bornée. On pourra utiliser librement l'inégalité $1 + x \leq e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

45. En déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.