# DS1

## I. Exercice 1

On désigne par $Id$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par $I$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

***1.*** ***a)*** Calculer $(A-3I)^2$.

***b)*** En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

***2.*** On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

***a)*** Résoudre l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

***b)*** En déduire que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $F$.

***3.*** On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

***a)*** Démontrer que $P$ est inversible et déterminer son inverse.

***b)*** Montrer que $P^{-1}AP = T$ où $T$ est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

***c)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

***4.*** ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T$ s'écrit $T = 3I + N$.

***b)*** Calculer $N^2$ et en déduire $N^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

***c)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $T^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître $T^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et de $N$.

***d)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin $T^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et de $T$.

***5.*** ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)\,3^nI$.

***b)*** Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

# II. Exercice 2

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

***1.*** *Variation de $f$*

***a)*** Calculer la dérivée $f'$ de $f$.

***b)*** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution $\alpha$ et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\ \mathrm{e}^x + 1$$

***c)*** Démontrer : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

***d)*** Dresser le tableau de variation de $f$ et donner l'allure du graphe de cette fonction.

***2.*** *Approximation de $\alpha$*
Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

***a)*** Prouver que $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

***b)*** Montrer que $\alpha > 1$. En déduire :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

***c)*** Établir, pour tout nombre réel $x$ supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et :

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1}\, |x - \alpha|$$

***d)*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1, +\infty[$ définie par la condition initiale $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

***e)*** En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-6}$ près.

## III. Exercice 3

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite $(x_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

***1.*** Démontrer que la suite $(x_n)$ est bien définie et à termes strictement positifs.

***2.*** Montrer que la suite $(x_n)$ est monotone et préciser sa monotonie.

***3.*** En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(x_n)$ diverge vers $+\infty$.

***4.*** Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

***5.*** Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

***a)*** On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note $\ell$ sa somme ($\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}$).

***(i)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ {x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

***(ii)*** En déduire que la suite $\left(\dfrac{{x_n}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

***(iii)*** En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

***b)*** Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

***6.*** On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

***a)*** Montrer, pour tout entier naturel $k$ non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

***c)*** Déterminer un équivalent simple de la suite $(H_n)$.

***7.*** On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} H_n$$

***a)*** En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

***b)*** En déduire un équivalent de la suite $(x_n)$.

# IV. Exercice 4

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$.

## Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[ \; \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

***1.*** Montrer que $f$ est continue sur $[0,+\infty[$.

***2.*** Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in ]0,+\infty[$.

***3.*** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

***4.*** Dresser le tableau des variations de $f$.

***5.*** Montrer que $f$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

***6.*** On note $\Gamma$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(O \; ; \; \vec{i} \; ; \; \vec{j}\right)$.

***a)*** Montrer que $\Gamma$ admet une demi-tangente en $O$.

***b)*** Déterminer les points d'intersection de $\Gamma$ avec l'axe des abscisses.

***c)*** Tracer $\Gamma$.

## Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G : ]1,+\infty[ \; \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in ]1,+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t) \; dt$$

***7.*** Montrer que $G$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x \in ]1,+\infty[$ :

$$\begin{array}{rcl} G'(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et} \quad G''(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{array}$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive $F$ de $f$ sans chercher à calculer $F$.

***8.*** ***a)*** Montrer que $G'$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

***b)*** Vérifier : $G'(2) > 0$.

***c)*** Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in ]1,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée $\alpha$, et que $\alpha < 2$.