DS1 /141

I. Exercice 1 /32

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A - 3I)^2$.

- **1 pt**

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- **1 pt : calcul**
- **1 pt : multiplication externe**

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- **1 pt : écriture du système**
- **1 pt : résolution** $\{z = x + \dfrac{1}{2}\, y$

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

- **1 pt :** $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt : famille génératrice**
- **1 pt : famille libre**
- **1 pt : conclusion**

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- **3 pts :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **(dont 1 pt pour justification inversibilité)**

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $P^{-1}AP = T$

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = 3I + N$.

- **1 pt :** $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- **1 pt :** $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt : par récurrence immédiate :** $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- **1 pt :** $3I$ **et** N **commutent**
- **1 pt : formule du binôme correcte**
- **1 pt : découpage valable car** $n \geqslant 1$
- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2,\ \ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $\forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I$
- **1 pt :** $T^n = 3^n\ I + n\,3^{n-1}\ N$
- **1 pt : cas** $n = 0$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et T.

- **1 pt :** $T^n = n\,3^{n-1}\ T - (n-1)\,3^n\ I$

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^nI$.

- **1 pt : écrire l'expression de la question précédente avec** I **et** T
- **2 pts : utilisation de** $A^n = PT^nP^{-1}$

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

- **1 pt**
  0 pt pour toute erreur de logique

II. Exercice 2 /40

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. *Variation de f*

a) Calculer la dérivée f' de f.

- **1 pt : f dérivable sur $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)\,\mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1-x)\ \mathrm{e}^x + 1$$

- **1 pt :** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$
- **1 pt : g dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :** $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = -x\,\mathrm{e}^x$
- **1 pt : variations de g et** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ **et** $g(0) = 2$
- **3 pts : théorème de la bijection**
  - × **1 pt : hypothèses**
  - × **1 pt :** $g([0,+\infty[) =]-\infty, 2]$
  - × **1 pt :** $0 \in]-\infty, 2]$

c) Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

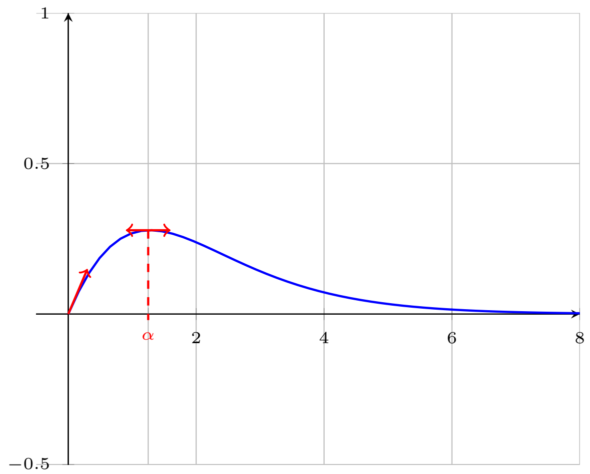
- **2 pts**

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

- **2 pts : tableau de variations (variations + limites)**

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\alpha - 1$	$\searrow$	0

- **4 pts : courbe (2 tangentes, placer α, allure générale)**



2. Approximation de α

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

- **2 pts : $\varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ (dont 1 pt : $\mathbf{e}^{-x} > 0$)**
- **1 pt : solution unique**

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

- **1 pt : $g(\alpha) = 0$ et $g(1) = 1$ donc $g(\alpha) < g(1)$**
- **1 pt : application de $g^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 2]$ strictement décroissante**
- **1 pt : φ strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt : par composition par φ : $\varphi(\alpha) < \varphi(1)$, *i.e.* $\alpha < 1 + \mathbf{e}^{-1}$**

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1} |x - \alpha|$$

- **1 pt : $\forall x \geqslant 1$, $\varphi(x) \geqslant 1$**
- **1 pt : $\forall x \geqslant 1$, $|\varphi'(x)| \leqslant \mathbf{e}^{-1}$**
- **3 pts : IAF**
  - × **1 pt : IAF « brutale » (hypothèses donc $\forall (u, v) \in [1, +\infty[^2$, $|\varphi(v) - \varphi(u)| \leqslant \mathbf{e}^{-1} |v - u|$)**
  - × **1 pt : en appliquant cette inégalité à $v = x \in [1, +\infty[$ et $u = \alpha \in [1, +\infty[$ (d'après *2.b)*)**
  - × **1 pt : $\varphi(\alpha) = \alpha$ d'après *2.a)***

d) Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1; +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

- **1 pt : $\alpha_n \geqslant 1$**
- **1 pt : en appliquant inégalité de la question précédente à $x = u_n \in [1, +\infty[$: $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \mathbf{e}^{-1} |u_n - \alpha|$**
- **3 pts : récurrence**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

- **1 pt : transitivité**
- **2 pts : $N = \lceil 6 \ln(10) - 1 \rceil$**
- **4 pts : programme (1 pt pour initialisation, 2 pts pour boucle for, 1 pt pour disp)**

III. Exercice 3 /35

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

1. Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

2. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

- **1 pt : (x_n) est (strictement) croissante**

3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

- **4 pts : raisonnement par l'absurde pour (x_n) non majorée**
  - × **1 pt : structure du raisonnement par l'absurde**
  - × **1 pt : par passage à la limite : $\ell \geqslant 0$**
  - × **1 pt : absurdité si $\ell > 0$ (en passant à la limite dans la relation de récurrence)**
  - × **1 pt : absurdité si $\ell = 0$ (même démarche)**
- **1 pt : (x_n) croissante non majorée donc elle diverge vers $+\infty$**

4. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

- **1 pt : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{x_n} = x_{n+1} - x_n$**
- **1 pt : télescopage : $\sum\limits_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ donc $\sum \dfrac{1}{x_n}$ divergente**

5. Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

a) On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note ℓ sa somme $\left(\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}\right)$.

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ {x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

- **1 pt : $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1}^2 - x_k^2 = 2 + \dfrac{1}{x_k^2}$**
- **1 pt : sommation pour k variant de 0 à $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)**
- **1 pt : télescopage : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) = x_n^2 - x_0^2$**

(ii) En déduire que la suite $\left(\dfrac{{x_n}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

- **1 pt : $\dfrac{x_n^2}{n} = \dfrac{x_0^2}{n} + 2 + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2}$**
- **1 pt : comme $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$**

(iii) En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

- **1 pt :** $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$
- **3 pts : critère d'équivalence des SATP (1 pt par hypothèse, notamment la positivité)**
- **1 pt : il est absurde de trouver que** $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ **diverge alors qu'on a supposé que cette série converge**

b) Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**

6. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \ln(k+1) - \ln(k) \ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

- **1 pt : décroissance de la fonction inverse sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- **1 pt : sommation télescopique**
- **1 pt :** $H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n$
- **1 pt :** $H_n \leqslant 1 + \ln(n)$

c) Déterminer un équivalent simple de la suite (H_n).

- **1 pt : division par** $\ln(n) > 0$
  0 pt si $n \geqslant 2$ **non précisé**
- **1 pt :** $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ **par théorème d'encadrement**

7. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, H_n$$

a) En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

- **1 pt : d'après résultat de l'énoncé :** $\dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{4n}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$ **par croissances comparées**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{2n} = 1$

b) En déduire un équivalent de la suite (x_n).

- **1 pt :** $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$
  0 pt si oubli de l'argument de stricte positivité

IV. Exercice 4 /34

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

- **1 pt : continuité sur $\mathbb{R}_+^*$**
- **1 pt : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ \ln(t) = 0$ et conclusion**

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

- **1 pt : caractère $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : $\forall t \in]0,+\infty[$, $f'(t) = \ln(t)$**

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

- **2 pts : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$**

4. Dresser le tableau des variations de f.

- **2 pts : tableau correct avec limites**

t	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5. Montrer que f est convexe sur $]0,+\infty[$.

- **2 pts (dont 1 pour $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ si calcul de f'')**

6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.

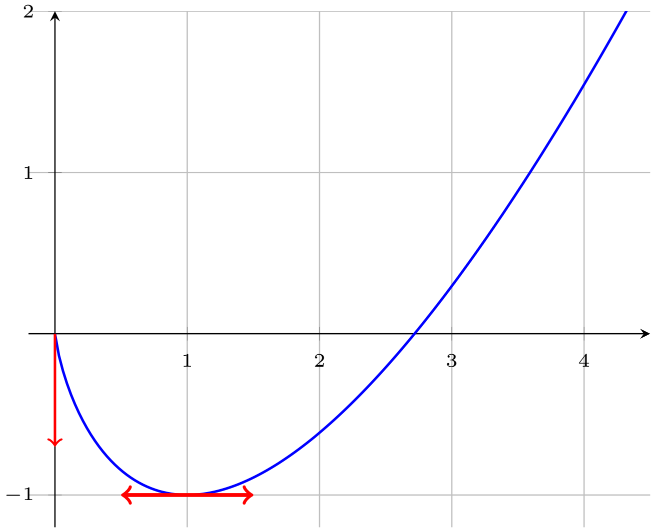
- **2 pts : Γ admet une demi-tangente verticale en 0**

b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

- **1 pt : écriture du système** $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$
- **1 pt : résolution : $(0,0)$ et $(0,\mathrm{e})$ sont les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses**

c) Tracer Γ.

- **4 pts : 1 pour tangente verticale tracée, 1 pt pour tangente horizontale tracée, 1 point pour notion de tangente respectée, 1 pt pour allure globale (notamment aspect convexe)**



Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1, +\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et} \quad G''(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{aligned}$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

- **1 pt : la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. Elle admet donc une primitive F sur $[0, +\infty[$ et : $\forall x \in]1, +\infty[$, $G(x) = \frac{1}{2}\big(F(x+1) - F(x-1)\big)$**
- **1 pt : F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt : G de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ (pour la composée $x \mapsto F(x+1)$ par exemple)**
- **1 pt : $\forall x \in]1, +\infty[$, $G'(x) = \frac{1}{2}\ \big(f(x+1) - f(x-1)\big)$**
- **1 pt : $\forall x \in]1, +\infty[$, $G''(x) = \frac{1}{2}\ \big(\ln(x+1) - \ln(x-1)\big)$**

2. *a)* Montrer que G' est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

- **2 pts**

b) Vérifier : $G'(2) > 0$.

- **1 pt**

c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in \,]1, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$.

- **2 pts : théorème bijection**
  - × **1 pt : hypothèses**
  - × **1 pt :** $G'(]1,+\infty[) = \left] \lim\limits_{x \to 1^+} G'(x), \lim\limits_{x \to +\infty} G'(x) \right[$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 1^+} G'(x) = G'(1) = \ln(2) - 1 > 0$
- **1 pt :** $\forall x \in \,]1, +\infty($**,** $G'(x) = (x-1) \ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right) + 2\ln(x+1) - 2$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} G'(x) = +\infty$
- **1 pt :** $0 \in \,]G'(1), +\infty[$
- **1 pt :** $G'(2) > 0 = G'(\alpha)$
- **1 pt :** $(G')^{-1} : G'(]1,+\infty[) \to \,]1,+\infty[$ **est strictement croissante**