# DS1

## I. Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par $Id$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par $I$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

***1. a)*** Calculer $(A - 3I)^2$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $A - 3I \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

  Ainsi :
$$(A - 3I)^2 \ = \ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A - 3I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

***b)*** En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente : $(A - 3I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A - 3I)^2 \ = \ A^2 - 6A + 9I$$ *(car les matrices $A$ et $I$ commutent)*

- $$\begin{array}{rl} \text{On en déduit} & A^2 - 6A + 9I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & A^2 - 6A = -9I \\ \text{et} & A\ (A - 6I) = -9I \\ \text{ainsi} & A\ \left(-\dfrac{1}{9}\ (A - 6I)\right) = I \end{array}$$

  On en déduit que la matrice $A$ est inversible d'inverse $-\dfrac{1}{9}\ (A - 6I)$.

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{9}\ (A - 6I)}$$

**Commentaire**

- L'écriture $\dfrac{A}{9}$ n'a pas de sens puisqu'il n'existe pas d'opérateur de division entre les matrices et les réels. Par contre, l'écriture $\dfrac{1}{9} \cdot A$ est bien autorisée : on multiplie une matrice par un scalaire à l'aide de l'opérateur de multiplication externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- On ne peut pas non plus diviser par une matrice. Rappelons que l'inverse d'une matrice $A$, si elle existe, est notée $A^{-1}$ et pas $\dfrac{1}{A}$. L'écriture $\dfrac{A}{B}$ est elle aussi impropre car il n'y a pas d'opérateur de division entre deux matrices.

□

**2.** On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

***a)*** Résoudre l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

*Démonstration.*

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
AX = 3X & \Longleftrightarrow & (A - 3I)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ -4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} z & = & x & + & \dfrac{1}{2}\ y \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = x + \dfrac{1}{2}\ y \right\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + \frac{1}{2}\ y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[10pt]
& = & \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

**Commentaire**

- Lors de la résolution, on a choisi d'exprimer $z$ à l'aide des variables auxiliaires $x$ et $y$, obtenant ainsi l'équation : $2z = 2x + y$.
- On aurait pu choisir d'exprimer :

  ***1)*** $x$ en fonction de $y$ et $z$. On obtient alors l'équation : $2x = -y + 2z$.

  ***2)*** $y$ en fonction de $x$ et $z$. On obtient alors l'équation : $y = -2x + 2z$.
- Ce choix n'est pas si anodin car il modifie les deux vecteurs de la famille engendrant $F$ :

  ***1)*** $F = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

  ***2)*** $F = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- On trouve des bases différentes pour $F$ mais évidemment, cela ne modifie en rien l'espace vectoriel $F$ en lui-même.

***b)*** En déduire que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $F$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente : $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ :

  × engendre $F$,

  × est libre car elle est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de $F$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } F.}$$

□

***3.*** On note $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

***a)*** Démontrer que $P$ est inversible et déterminer son inverse.

*Démonstration.*

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow 2\, L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-2 & -1 & 2\end{pmatrix}\right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale $P$.

- On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\2 & 2 & -2\\-2 & -1 & 2\end{pmatrix}\right.$$

On effectue enfin l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \right.$ . On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

**Commentaire**

On remarque que les deux premières colonnes de la matrice $P$ ne sont autres que les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. C'est ce choix qui permet d'exprimer par la suite la matrice $A$ sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Réduction ». □

***b)*** Montrer que $P^{-1}AP = T$ où $T$ est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

*Démonstration.*

- Notons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = T.}$$

□

***c)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

*Démonstration.*

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : P^{-1}A^nP = T^n$.

▸ **Initialisation**

- D'une part : $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.
- D'autre part : $T^0 = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n \\ &= P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP && \textit{(d'après la quesiton précédente et par hypothèse de récurrence)} \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP \\ &= P^{-1}AIA^nP = P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n.}$$

□

*4.* ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T$ s'écrit $T = 3I + N$.

*Démonstration.*

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, } N = T - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

***b)*** Calculer $N^2$ et en déduire $N^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$ : $N^k = 0$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0.}$$

**Commentaire**

- Au lieu de faire une récurrence, on peut aussi écrire, pour tout $k \geqslant 2$ :

$$N^k = N^{k-2} \times N^2 = N^{k-2} \times 0 = 0$$

- On insiste sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geqslant 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

***c)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $T^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître $T^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et de $N$.

*Démonstration.*

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Les matrices $3I$ et $N$ commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
T^n & = & (3\,I + N)^n & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3\,I)^{n-k}\ N^k & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 3^{n-k}\, I^{n-k}\ N^k & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 3^{n-k}\ I\ N^k & \textit{(car : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}\ 3^{n-k}\ N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\ 3^{n-k}\ N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}\ 3^{n-k}\ N^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\binom{n}{0}\ 3^n\ N^0 + \binom{n}{1}\ 3^{n-1}\ N^1 & \\
& = & 3^n I + n\ 3^{n-1}\ N &
\end{array}$$

- Enfin : $3^0\ I + 0\ 3^{-1}\ N = I$ et $T^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ N.}$$

**Commentaire**

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$ :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k \ = \ \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  *(la seconde somme est nulle si $p = n$)*
  où $(u_n)$ est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice $N$ vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

□

***d)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin $T^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et de $T$.

*Démonstration.*
Comme $N = T - 3I$, on obtient :

$$T^n \ = \ 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ (T - 3I) \ = \ 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ T - n\ 3^n\ I \ = \ n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I.}$$

□

**5.** ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente : $T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$.
Or : $A^n = P\ T^n\ P^{-1}$. En combinant ces deux informations, on obtient :

$$\begin{aligned} A^n &= P\ T^n\ P^{-1} \ = \ P\ (n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I)\ P^{-1} \\ &= n\ 3^{n-1}\ P\ T\ P^{-1} - (n-1)\ 3^n\ P\ P^{-1} \\ &= n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : A^n = n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I.}$$

□

***b)*** Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

*Démonstration.*
Si $n = -1$, on a :

$$\begin{aligned} n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I &= (-1)\ 3^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 3^{-1}\ I \\ &= (-1)\ \frac{1}{3^2}\ A - (-2)\ \frac{1}{3}\ I \\ &= -\frac{1}{9}\ A + \frac{2}{3}\ I \\ &= -\frac{1}{9}\ (A - 6I) \end{aligned}$$

Or, d'après la question ***1.b)***, on a : $A^{-1} = -\dfrac{1}{9}\ (A - 6I)$.

Ainsi, la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

**Commentaire**

Le but de cette question est de démontrer :

$$A^{-1} = (-1)\ 3^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 3^{-1}\ I$$

Pour démontrer une égalité, on ne peut la supposer. Cela paraît évident mais c'est une erreur logique assez fréquente. Plus précisément, la rédaction suivante :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (-1)\ 3^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 3^{-1}\ I \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{9}\ (A - 6I) \end{aligned}$$

ne permet pas d'obtenir les points alloués à la question car elle commence par supposer l'égalité que l'on doit démontrer.

□

# II. Exercice 2 (`ESCP 1991-G`)

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

***1.*** *Variation de $f$*

***a)*** Calculer la dérivée $f'$ de $f$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car c'est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
  - × $f_1 : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
  - × $f_2 : x \mapsto e^x + 1$ :
    - – est dérivable sur $\mathbb{R}_+$,
    - – `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}_+$.
      *(on a même : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x + 1 > 0$)*
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1) - x\ e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x - x\ e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{(1 - x)\ e^x + 1}{(e^x + 1)^2}}$$

□

***b)*** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution $\alpha$ et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\ e^x + 1$$

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(1 - x)\ e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1 - x)\ e^x + 1 = 0 \qquad \textit{(car } (e^x + 1)^2 > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad g(x) = 0 \end{aligned}$$

- La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(x) = -e^x + (1 - x)\ e^x = -x\ e^x \leqslant 0 \quad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}$$

- On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | $0$ $\qquad$ $-$ |
| Variations de $g$ | $2 \searrow -\infty$ |

Détaillons les éléments de ce tableau :

× $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-x)\ \mathrm{e}^x + 1 = 0 = g(0) = \mathrm{e}^0 + 1 = 2$

× comme $1 - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ alors $(1-x)\ \mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ \mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Et ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

- La fonction $g$ est :

× continue sur $[0,+\infty[$,

× strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, $g$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)$. Or :

$$g([0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right] = ]-\infty, 2]$$

Comme $0 \in ]-\infty, 2]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f'(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in \mathbb{R}_+.}$$

□

***c)*** Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

*Démonstration.*
On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
& f(\alpha) = \alpha - 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1} = \alpha - 1 \\
\Leftrightarrow\ & \alpha = (\alpha - 1)\ (\mathrm{e}^\alpha + 1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha = (\alpha - 1)\ \mathrm{e}^\alpha + (\alpha - 1) \\
\Leftrightarrow\ & 0 = (\alpha - 1)\ \mathrm{e}^\alpha - 1 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = -g(\alpha) \\
\Leftrightarrow\ & g(\alpha) = 0
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha - 1}$$

□

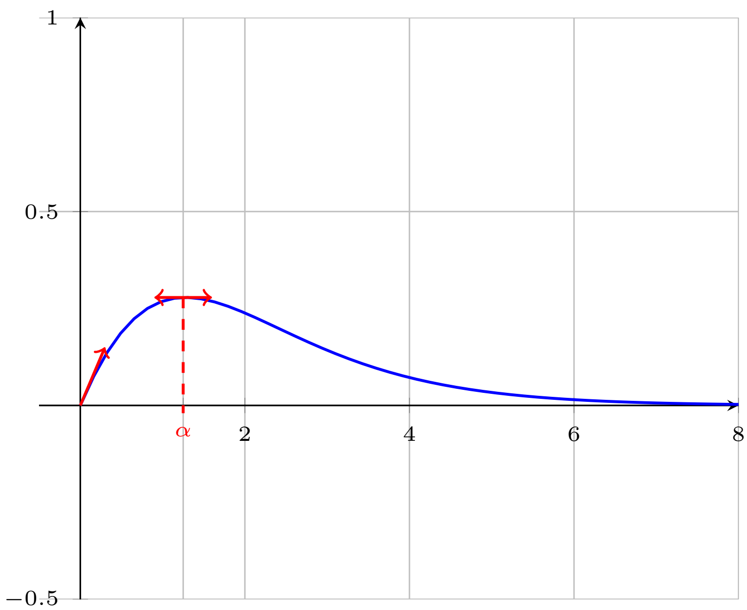
***d)*** Dresser le tableau de variation de $f$ et donner l'allure du graphe de cette fonction.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Comme $(e^x + 1)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - x)\ e^x + 1 = g(x)$.
  On peut alors déduire du tableau de variations de $g$ celui de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| Variations de $g$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| Signe de $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\alpha - 1$ | $\searrow$ | $0$ |

  En effet :
  × $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
- D'autre part, la courbe de $f$ :
  × admet une tangente horizontale en $\alpha$.
  × admet pour tangente la droite d'équation $y = f(0) + f'(0)\ (x - 0) = \dfrac{1}{2}\ x$.
- On en déduit l'allure suivante pour le graphe de $f$.




□

*2. Approximation de $\alpha$*

Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

***a)*** Prouver que $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x \ \Leftrightarrow\ x = 1 + \mathrm{e}^{-x} \ &\Leftrightarrow\ (1-x) + \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow\ ((1-x)\ \mathrm{e}^{x} + 1)\ \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow\ (1-x)\ \mathrm{e}^{x} + 1 = 0 \qquad \textit{(car } e^{-x} > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\ g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, par définition, $\alpha$ est l'unique solution, dans $\mathbb{R}_+$, de l'équation $g(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \alpha \text{ est l'unique solution de l'équation } \varphi(x) = x.}$$

□

***b)*** Démontrer : $\alpha > 1$. En déduire :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

*Démonstration.*

- Tout d'abord :
  - × $g(\alpha) = 0$.
  - × $g(1) = (1-1)\ \mathrm{e}^{1} + 1 = 1$.

  Ainsi : $g(\alpha) < g(1)$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $g^{-1} : [0, +\infty[ \ \to\ ] - \infty, 2]$ est strictement décroissante. En appliquant $g^{-1}$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient : $\alpha > 1$.

  $$\boxed{\text{On a bien : } \alpha > 1.}$$
- La fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors : $\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$.
  Ainsi, la fonction $\varphi$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
  En appliquant $\varphi$ de part et d'autre de l'inégalité précédente, on obtient :

  $$\begin{array}{ccc} \varphi(\alpha) & < & \varphi(1) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \alpha & & 1 + \mathrm{e}^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}.}$$

□

**Commentaire**

On pouvait rédiger autrement. Détaillons cette solution.

D'après la question précédente : $\varphi(\alpha) = \alpha$. Ainsi : $\alpha = 1 + \mathrm{e}^{-\alpha}$. Et donc :

$$\alpha - 1 = \mathrm{e}^{-\alpha} < \mathrm{e}^{-1}$$

En effet, comme $\alpha > 1$, alors $-\alpha < -1$ et $\mathrm{e}^{-\alpha} < \mathrm{e}^{-1}$ par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$. D'où le résultat.

***c)*** Établir, pour tout nombre réel $x$ supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1}\,|x - \alpha|$$

*Démonstration.*

- Tout d'abord, pour tout $x \geqslant 1$ :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 1 \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{-x} > 0$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ \varphi(x) \geqslant 1}$$

- D'autre part, pour tout $x \geqslant 1$ :

$$|\varphi'(x)| \ = \ |-\mathrm{e}^{-x}| \ = \ \mathrm{e}^{-x} \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1}$$

  En effet, comme $x \geqslant 1$, on a $-x \leqslant -1$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ par application de la fonction exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- D'après ce qui précède :
  - × $\varphi$ est dérivable sur $[1, +\infty[$,
  - × $\forall x \in [1, +\infty[,\ |\varphi'(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (u, v) \in [1, +\infty[^2,\ |\varphi(v) - \varphi(u)| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1}\ |v - u|$$

  En appliquant cette inégalité à $v = x \in [1, +\infty[$ et $u = \alpha \in [1, +\infty[$ (d'après la question ***2.b)***), on obtient :

$$|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1}\ |x - \alpha|$$

  Enfin, d'après la question ***2.a)***, $\varphi(\alpha) = \alpha$.

$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ \ |\varphi(x) - \alpha| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1}\ |x - \alpha|}$$

□

***d)*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1, +\infty[$ définie par la condition initiale $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

*Démonstration.*

- Par une récurrence immédiate, on peut démontrer la propriété affirmée par l'énoncé :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = u_n \in [1, +\infty[$, on obtient :

$$|\ \underbrace{\varphi(u_n)}_{= u_{n+1}}\ - \alpha\ | \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1}\ |u_n - \alpha|$$

- Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ : $|u_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$.
  - **Initialisation** :
    Remarquons : $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = \alpha - 1$ car $\alpha \geqslant 1$ d'après la question ***2.b)***.
    De plus, toujours d'après la question ***2.b)*** : $\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$. On en déduit :
    $$|u_0 - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1}$$
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+2)}$).
    On remarque alors :
    $$\begin{aligned} |\varphi(u_n) - \alpha| &\leqslant \mathrm{e}^{-1}\, |u_n - \alpha| && \textit{(d'après le point évoqué ci-dessus)} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-1}\, \mathrm{e}^{-(n+1)} && \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(n)\textit{)} \\ &= \mathrm{e}^{-1-(n+1)} = \mathrm{e}^{-(n+2)} \end{aligned}$$
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}.}$$

□

***e)*** En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-6}$ près.

*Démonstration.*

- On cherche ici à trouver un entier $N$ tel que $u_N$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-6}$ près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$|u_N - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$
- Or, d'après la question ***2.d)***, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
  $$|u_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$
- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\mathrm{e}^{-(N+1)} \leqslant 10^{-6}$.
  Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :
  $$|u_N - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(N+1)} \leqslant 10^{-6}$$
- Déterminons alors un entier $N$ vérifiant : $\mathrm{e}^{-(N+1)} \leqslant 10^{-6}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-(n+1)} \leqslant 10^{-6} &\Leftrightarrow -(n+1) \leqslant \ln(10^{-6}) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } ]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow -(n+1) \leqslant -6\ \ln(10) \\ &\Leftrightarrow n+1 \geqslant 6\ \ln(10) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 6\ \ln(10) - 1 \end{aligned}$$
  En choisissant $N = \lceil 6\ \ln(10) - 1 \rceil$ (ou tout entier supérieur), on obtient bien que $u_N$ est une approximation de $\alpha$ à $10^{-6}$ près.

- Le programme **Scilab** suivant stocke les valeurs successives de $u_n$ dans une variable `u`. Après $N$ itérations, on obtient la valeur attendue $u_N$ qui est alors affichée.

```
1 N = ceil(6 * log(10) - 1)
2 u = 1
3 for i = 1:N
4     u = 1 + exp(-u)
5 end
6 disp(u)
```

Détaillons les éléments de ce script.

× **Début du programme**
On commence par stocker dans une variable `N` la valeur déterminée plus haut.

```
1 N = ceil(6 * log(10) - 1)
```

La variable `u` est ensuite initialisée à 1 : la valeur de $u_0$.

```
2 u = 1
```

× **Structure itérative**
Les lignes 3 à 5 consistent à calculer $u_N$. Pour cela, on met en place une structure `for` :

```
3 for i = 1:N
```

On calcule alors les valeurs successives de la suite $(u_n)$ jusqu'au rang $N$ à l'aide de la relation de récurrence définissant la suite $(u_n)$ :

```
4     u = 1 + exp(-u)
```

× **Fin du programme**
À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient la valeur $u_N$, qui est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-6}$ près. On finit donc ce programme en affichant la valeur de cette variable.

```
6 disp(u)
```

□

## III. Exercice 3 (`inspiré de oraux ESCP 2018`)

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite $(x_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

***1.*** Démontrer que la suite $(x_n)$ est bien définie et à termes strictement positifs.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} x_n \text{ est défini} \\ x_n > 0 \end{array} \right.$.

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $x_0 > 0$
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left( i.e. \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} \text{ est défini} \\ x_{n+1} > 0 \end{array} \right. \right)$.
  - Par hypothèse de récurrence, $x_n > 0$. Ainsi : $x_n \neq 0$ et la quantité $\dfrac{1}{x_n}$ est bien définie.
    Il en est de même de $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.
  - On en déduit enfin :
  $$x_{n+1} \ = \ x_n + \frac{1}{x_n} \ > \ 0$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence, } (x_n) \text{ est bien définie et à termes strictement positifs.}}$$

**Commentaire**

- Cette question est un classique des suites récurrentes.
  Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** $(u_n)$ est bien définie », on démontre en réalité :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \qquad \text{où} \qquad \mathcal{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

□

***2.*** Montrer que la suite $(x_n)$ est monotone et préciser sa monotonie.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de $(x_n)$ :
$$x_{n+1} - x_n \ = \ \frac{1}{x_n} \ > \ 0 \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (x_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$$

□

***3.*** En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(x_n)$ diverge vers $+\infty$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente, la suite $(x_n)$ est croissante. Deux cas se présentent alors :
  × si $(x_n)$ est majorée, alors elle converge.
  × si $(x_n)$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
- Démontrons par l'absurde que $(x_n)$ n'est pas majorée.
  Supposons que la suite $(x_n)$ est majorée.
  Alors elle converge vers un réel $\ell$.
  - Tout d'abord, d'après ***1.*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.
    Par passage à la limite : $\ell \geqslant 0$.

**Commentaire**

- On rappelle que, par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent **larges**.
  Plus précisément :
$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > a \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \ell \geqslant a$$
- On pourra retenir l'exemple classique de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ :
  × d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} > 0$
  × d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \not> 0$

  - Deux cas se présentent alors :
    × si $\ell > 0$. Par définition de $(x_n)$ : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.
    Or, par continuité de la fonction inverse en $\ell \in \,]0, +\infty[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

$$\begin{array}{lll} \text{On en déduit} & \ell = \ell + \dfrac{1}{\ell} & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{\ell} = 0 & \\ \text{ainsi} & 1 = 0 & \textit{(en multipliant par } \ell \neq 0\textit{)} \end{array}$$

    Absurde !
    × si $\ell = 0$. Par définition de $(x_n)$ :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$
    Ainsi, par passage à la limite :
$$0 = 0 + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$$
    Absurde !

On en déduit que $(x_n)$ n'est pas majorée.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.}$$

□

***4.*** Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

*Démonstration.*

- Par définition de la suite $(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\dfrac{1}{x_n} \;=\; x_{n+1} - x_n$.

  La nature de la série $\sum \dfrac{1}{x_n}$ est donc la même que celle de la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$.

- Déterminons la nature de la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) &= \sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left( \cancel{\sum_{k=1}^{n} x_k} + x_{n+1} \right) - \left( x_0 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} x_k} \right) \\
&= x_{n+1} - x_0
\end{aligned}$$

  Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} - x_0 = +\infty$.

  Ainsi la suite $\left( \sum\limits_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) \right)$ diverge vers $+\infty$. La série $\sum (x_{n+1} - x_n)$ est donc divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit la série } \sum \frac{1}{x_n} \text{ est divergente.}}$$

**Commentaire**

Le lecteur plus à l'aise avec le télescopage pourra se permettre de ne pas détailler le décalage d'indice. On obtient la rédaction suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) \;=\; x_{n+1} - x_0 \qquad \textit{(par télescopage)}$$

□

***5.*** Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

***a)*** On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note $\ell$ sa somme ($\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}$).

***(i)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ${x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

*Démonstration.*

- Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
&\text{On a} && x_{k+1} = x_k + \frac{1}{x_k} && \textit{(par définition de la suite } (x_n)\textit{)} \\
&\text{donc} && x_{k+1}^2 = \left( x_k + \frac{1}{x_k} \right)^2 \\
&\text{ainsi} && x_{k+1}^2 = x_k^2 + 2\,\cancel{x_k}\, \frac{1}{\cancel{x_k}} + \frac{1}{x_k^2}
\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  En sommant les égalités précédentes pour $k$ variant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{x_k^2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \\ &= 2\,\big((n-1) - 0 + 1\big) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \\ &= 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}\end{aligned}$$

  De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 && \textit{(par linéarité de la somme)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2} + x_n^2\right) - \left(x_0^2 + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2}\right) \\ &= x_n^2 - x_0^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 - x_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}.}$$

□

***(ii)*** En déduire que la suite $\left(\dfrac{{x_n}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

*Démonstration.*

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} & x_n^2 = x_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \\ \text{donc} \quad & \frac{x_n^2}{n} = \frac{1}{n}\left(x_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}\right) \\ \text{d'où} \quad & \frac{x_n^2}{n} = \frac{x_0^2}{n} + 2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}\end{aligned}$$

- On a supposé dans cette question ***5.a)*** que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{x_n^2}$ converge et : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x_k^2} = \ell$.

  On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2}\right) = 0 \times \ell = 0$.

- De plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_0^2}{n} = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n^2}{n} = 0 + 2 + 0 = 2.}$$

□

***(iii)*** En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

*Démonstration.*

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{n} = 2 \neq 0$. On en déduit : $\dfrac{x_n^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
  Ainsi : $\dfrac{n}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \frac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

- On a :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{2n} \geqslant 0$
  × $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$
  × la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente.
  Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2n}$.
  *(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\frac{1}{2} \neq 0$)*

  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x_n^2}$ est divergente.

$$\boxed{\text{Cette conclusion est absurde puisqu'on a supposé que la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x_n^2} \text{ est convergente.}}$$ □

***b)*** Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

*Démonstration.*
Démontrons par l'absurde que $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ est divergente.
Supposons que la série $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ est convergente.
Alors, d'après la question ***5.a)***, la série $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ est divergente.
Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum \frac{1}{x_n^2} \text{ est divergente.}}$$ □

***6.*** On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

***a)*** Montrer, pour tout entier naturel $k$ non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \ \leqslant \ \ln(k+1) - \ln(k) \ \leqslant \ \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

*Démonstration.*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{lcccccl} & k & \leqslant & x & \leqslant & k+1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k} & \geqslant & \dfrac{1}{x} & \geqslant & \dfrac{1}{k+1} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } ]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{k} & & \big[\ \ln(|x|)\ \big]_k^{k+1} & & \dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.}$$

□

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

*Démonstration.*

- D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les encadrements précédents pour $k$ variant de 1 à $n$ ($n \geqslant 1$).

$$\begin{array}{lcccccl} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \\ \text{donc} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \textit{(par sommation télescopique)} \\ \text{d'où} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ \text{enfin} & H_{n+1} - 1 & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & H_n & \textit{(par définition de } H_n\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a donc démontré : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n.}$$

En particulier, l'inégalité de gauche de l'énoncé est démontrée.
Il reste à déterminer l'inégalité de droite.

- D'après ce qui précède : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $H_{m+1} \leqslant 1 + \ln(m+1)$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, en considérant ces inégalités en $m = n - 1 \geqslant 1$, on obtient :

$$H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ H_n \leqslant 1 + \ln(n)}$$

- Remarquons enfin :
  × $H_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$,
  × $1 + \ln(1) = 1$.
  On a donc bien : $H_1 \leqslant 1 + \ln(1)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).}$$

□

**Commentaire**

- Les questions ***6.a)*** et ***6.b)*** sont une illustration d'une méthodologie classique connue sous le nom de comparaison série-intégrale.
- L'énoncé demande de démontrer l'inégalité à partir du rang 1, ce qui n'est pas très commode (le cas $n = 1$ doit être traité à part). Ce cas n'est pas d'un grand intérêt pour la suite de l'énoncé et notamment pour la question suivante qui vise à établir un équivalent de la suite $(H_n)$ (on peut alors choisir $n$ dans n'importe quel voisinage de $+\infty$).

***c)*** Déterminer un équivalent simple de la suite $(H_n)$.

*Démonstration.*
Soit $n \geqslant 2$.

- En multipliant membre à membre par $\frac{1}{\ln(n)} > 0$ l'inégalité obtenue en question précédente, on obtient :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{H_n}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

- Or :
  × $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
  × $\frac{1}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

**Commentaire**

- On prend garde de choisir initialement un entier $n \geqslant 2$ afin que la quantité $\frac{1}{\ln(n)}$ soit bien définie (c'est-à-dire tel que $\ln(n) \neq 0$).
- La propriété : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ est classique. Ce premier résultat est parfois complété par une étude permettant d'obtenir le début du développement asymptotique de la série harmonique. Plus précisément, on obtient :

$$H_n \ = \ \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

où $\gamma$ ($\simeq 0,577$), appelée constante d'Euler est la limite de la suite $\big(H_n - \ln(n)\big)$.
La démonstration la plus usuelle fait intervenir des suites adjacentes et est donc tout à fait adaptée au programme ECE.

**7.** On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, H_n$$

***a)*** En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

*Démonstration.*
Démontrer $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ revient à prouver : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{2n} = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***5.a)(i)*** :

$$x_n^2 = 2n + x_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{x_n^2}{2n} = 1 + \frac{x_0^2}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$$

- Or :
  × d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0^2}{2n} = 0$.
  × d'autre part, d'après le résultat admis en question ***7.*** :

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2} \ln(n) = \frac{\ln(n)}{4n}$$

  Par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$.

  Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{2n} = 1 + 0 + 0 = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n.}$$

□

***b)*** En déduire un équivalent de la suite $(x_n)$.

*Démonstration.*
D'après la question précédente : $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$. Comme la suite $(x_n)$ est à termes strictement positifs : $\sqrt{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}.}$$

**Commentaire**

- On rappelle qu'en toute généralité, on ne compose pas les équivalents !
- On dispose tout de même de la propriété de compatibilité de l'équivalent avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ (u_n) \text{ strictement positive à} \\ \text{partir d'un certain rang} \end{array}\right\} \Rightarrow \ (u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^\alpha$$

On utilise ici cette propriété pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n^2$ et $v_n = 2n$.

□

## IV. Exercice 4 (EML 2008)

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$.

### Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[ \ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

*1.* Montrer que $f$ est continue sur $[0,+\infty[$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en tant que produit et différence de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
- Par croissances comparées : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ \ln(t) = 0$. Donc :

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) \ = \ 0 \ = \ f(0)$$

Donc $f$ est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

□

*2.* Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in ]0,+\infty[$.

*Démonstration.*

- La fonction $t \mapsto t\ \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } ]0,+\infty[ \text{ en tant que} \\ \text{différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } ]0,+\infty[.\end{array}}$$

- Soit $t \in ]0,+\infty[$.

$$f'(t) \ = \ \ln(t) + \cancel{t}\,\frac{1}{\cancel{t}} - 1 \ = \ \ln(t)$$

$$\boxed{\forall t \in ]0,+\infty[,\ f'(t) = \ln(t)}$$

□

*3.* Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

*Démonstration.*

Soit $t \in ]0,+\infty[$. Alors : $f(t) = t\ \ln(t)\ \left(1 - \dfrac{1}{\ln(t)}\right)$.

Or : $\lim\limits_{t\to+\infty} t\ \ln(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\ln(t)} = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty.}$$

□

*4.* Dresser le tableau des variations de $f$.

*Démonstration.*

- Soit $t \in ]0,+\infty[$. Alors : $f'(t) = \ln(t)$. Ainsi :

$$f'(t) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(t) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ t \geqslant 1 \qquad \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

En effet : $f(1) = 1 \times \cancel{\ln(1)} - 1 = -1$. $\square$

**5.** Montrer que $f$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

*Démonstration.*
On sait que : $\forall t \in ]0, +\infty[$, $f'(t) = \ln(t)$. Or, la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
D'où $f'$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que $f$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

**Commentaire**

On aurait aussi pu résoudre cette question de la manière suivante.
*1.* Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
*2.* Démontrer : $\forall t \in ]0, +\infty[$, $f''(t) \geqslant 0$.

$\square$

**6.** On note $\Gamma$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

***a)*** Montrer que $\Gamma$ admet une demi-tangente en $O$.

*Démonstration.*
Soit $t \in ]0, +\infty[$.

$$\tau_0(f)(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \ln(t) - 1 \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

La courbe $\Gamma$ admet une demi-tangente verticale en 0. $\square$

***b)*** Déterminer les points d'intersection de $\Gamma$ avec l'axe des abscisses.

*Démonstration.*
Soit $(x, y) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$.
Le point $(x, y)$ est un point d'intersection de $\Gamma$ avec l'axe des abscisses si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

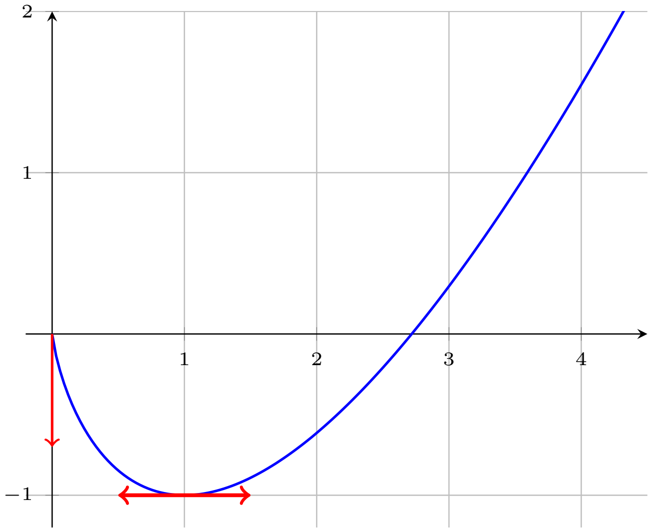
Or :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(\ln(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ \texttt{OU} \\ \ln(x) - 1 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ \texttt{OU} \\ \ln(x) = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ \texttt{OU} \\ x = \mathrm{e} \end{array}$$

Les points d'intersection de $\Gamma$ avec l'axe des abscisses sont donc $(0, 0)$ et $(0, \mathrm{e})$. $\square$

*c)* Tracer $\Gamma$.

*Démonstration.*




□

## Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G : ]1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in ]1, +\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt$$

*7.* Montrer que $G$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$ et que, pour tout $x \in ]1, +\infty[$ :

$$\begin{array}{rrcl} & G'(x) & = & \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et} & G''(x) & = & \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{array}$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive $F$ de $f$ sans chercher à calculer $F$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est continue sur $[0, +\infty[$. Elle admet donc une primitive $F$ (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[0, +\infty[$.

  On a même mieux : comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (d'après la question *2.*), alors $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
- On obtient alors :
$$\forall x \in ]1, +\infty[,\ G(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1))$$
  Or la fonction $H : x \mapsto F(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$ car elle est la composée $H = F \circ g$ où :
  × $g : x \mapsto x - 1$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty|$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $g(]1, +\infty[) \subset ]0, +\infty[$.

  × $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$

  De même, $x \mapsto F(x+1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } ]1, +\infty[ \text{ en tant que différence de fonction de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } ]1, +\infty[.}$$

**Commentaire**

On peut aussi démontrer que $G$ est classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$. Il suffit pour cela de :
- remarquer que la fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$,
- reprendre la rédaction précédente en utlisant cet argument en lieu et place de celui mentionnant que $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

- Soit $x \in \,]1,+\infty[$.

$$G'(x) = \frac{1}{2}(F'(x+1) - F'(x-1)) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$$

$$\boxed{\forall x \in \,]1,+\infty[,\ G'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))}$$

- Soit $x \in \,]1,+\infty[$.

$$G''(x) = \frac{1}{2}(f'(x+1) - f'(x-1)) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1))$$

$$\boxed{\forall x \in \,]1,+\infty[,\ G''(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1))}$$

□

***8. a)*** Montrer que $G'$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \,]1,+\infty[$.

$$G''(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Or :

$$\begin{aligned} G''(x) > 0 \ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow\ \frac{x+1}{x-1} > 1 && \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\ x+1 > x-1 && \textit{(car } x > 1, \textit{ donc } x-1 > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\ 2 > 0 \end{aligned}$$

La dernière assertion étant vérifiée, la première l'est aussi.
Ainsi : $\forall x \in \,]1,+\infty[,\ G''(x) > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } G' \text{ est strictement croissante sur } ]1,+\infty[.}$$

□

***b)*** Vérifier : $G'(2) > 0$.

*Démonstration.*
Par définition de $G'$, on a :

$$G'(2) = \frac{1}{2}(f(3) - f(1))$$

Or, d'après la question *4.*, la fonction $f$ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Donc : $f(3) > f(1)$. D'où : $f(3) - f(1) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, comme } \frac{1}{2} > 0, \text{ on obtient : } G'(2) > 0.}$$

□

***c)*** Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in \left]1, +\infty\right[$, admet une solution et une seule, notée $\alpha$, et que $\alpha < 2$.

*Démonstration.*

- La fonction $G'$ est :
  - $\times$ continue sur $\left]1, +\infty\right[$ (d'après la question ***7.***),
  - $\times$ strictement croissante sur $\left]1, +\infty\right[$ (d'après la question ***8.a)***).

  Ainsi, $G'$ réalise une bijection de $\left]1, +\infty\right[$ dans $G'(\left]1, +\infty\right[)$. Or :

$$G'(\left]1, +\infty\right[) = \left] \lim_{x \to 1^+} G'(x), \lim_{x \to +\infty} G'(x) \right[$$

  Déterminons ces deux limites.
  - $\times$ Comme $f$ est continue sur $\left[0, +\infty\right[$, $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, +\infty\right[$ et on peut démontrer qu'il en est de même pour $G$. En particulier, $G'$ est donc continue en 1. On en déduit :

$$\lim_{x \to 1^+} G'(x) \;=\; G'(1) \;=\; \frac{1}{2}(f(2) - f(0)) \;=\; \frac{1}{2}\, f(2) \;=\; \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}\ln(2) - \cancel{2}) \;=\; \ln(2) - 1$$

  Or, d'après l'encadrement donné par l'énoncé : $\mathrm{e} > 2$.
  Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\left]0, +\infty\right[$, on obtient : $1 = \ln(\mathrm{e}) > \ln(2)$.
  D'où : $\ln(2) - 1 < 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } G'(1) = \ln(2) - 1 < 0.}$$

  - $\times$ Soit $x \in \left]1, +\infty\right[$.

$$\begin{aligned}
G'(x) &= f(x+1) - f(x-1) \\
&= (x+1)\ln(x+1) - (\cancel{x}+1) - ((x-1)\ln(x-1) - (\cancel{x}-1)) \\
&= (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1) - 2 \\
&= (x-1)\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) + 2\ln(x+1) - 2 \\
&= (x-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 2\ln(x+1) - 2 \\
&= (x-1)\ln\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right) + 2\ln(x+1) - 2 \\
&= (x-1)\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) + 2\ln(x+1) - 2
\end{aligned}$$

  Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$. On en déduit : $\ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{x-1}$.
  Ainsi, par multiplication de part et d'autre par $x - 1$ :

$$(x-1)\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \cancel{(x-1)} \times \frac{2}{\cancel{(x-1)}} = 2$$

  Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right) = 2$.
  De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x+1) = +\infty$.

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \lim_{x \to +\infty} G'(x) = +\infty.}$$

Finalement : $G'(]1,+\infty[) = ]G'(1),+\infty[$.

Or $0 \in ]G'(1),+\infty[$ (car $G'(1) < 0$).

$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } G'(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } ]1,+\infty[\text{, notée } \alpha.}$

- De plus, d'après la question ***8.b)*** :

$$G'(2) > 0 = G'(\alpha)$$

D'après le théorème de la bijection, la fonction $(G')^{-1} : G'(]1,+\infty[) \to ]1,+\infty[$ est strictement croissante. En appliquant $(G')^{-1}$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$2 > \alpha$$

$$\boxed{\text{Finalement : } 1 < \alpha < 2}$$

□