DS1 (version B)

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 6A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

4. ***a)*** On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 3.

c) En écrivant $T = 3I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, pus de I et T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$.

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

1. Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

2. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

4. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

5. Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

a) On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note ℓ sa somme ($\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}$).

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ${x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

(ii) En déduire que la suite $\left(\dfrac{{x_n}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

(iii) En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

b) Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

6. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \;\leqslant\; \ln(k+1) - \ln(k) \;\leqslant\; \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

c) Déterminer un équivalent simple de la suite (H_n).

7. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \; S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} H_n$$

a) En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

b) En déduire un équivalent de la suite (x_n).

Problème

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.

2. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n ne sont pas racines de P_n'.

3. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$.

<u>Indication</u> : on pensera à découper l'expression de P_n en deux sommes : l'une ne comportant que les termes d'indice pair, l'autre ne comportant que les termes d'indice impair.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1, 2n+1]$.

4. a) Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P_{n+1}'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P_{n+1}''(x) = P_n(x) \end{cases}$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

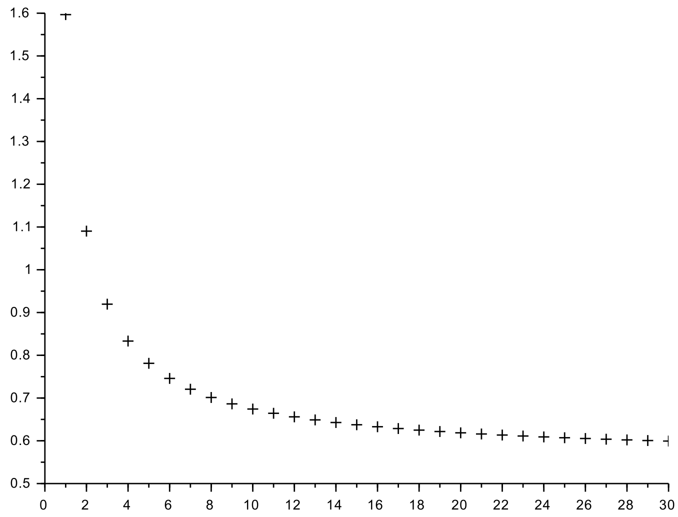
5. a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function y = P(n,x)` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x, et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.

On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `factorial(k)` *renvoie une valeur de* `k!`.

b) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = suite(n)
    a = .........
    b = .........
    c = (a+b)/2
    while .........
        if ......... then
            a = c
        else
            b = c
        end
        c = .........
    end
    .........
endfunction
```

c) On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



6. *a)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right)$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.
On admet dans la suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in [u_n, \ell]$, $|P_n'(x)| \leqslant e^{\ell}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^{\ell}\ |u_n - \ell|$.

b) En revenant à la définition de P_n, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell)$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$.

c) Aboutir à une contradiction.

8. En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PARTIE B : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9. On note f la fonction définie sur $]0,1]$ par : $\forall t \in\ ]0,1],\ f(t) = -\ln(t)$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ converge et préciser sa valeur.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Justifier, pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$: $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ dt \leqslant \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

En déduire : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\ dt \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\ dt + \dfrac{\ln(n)}{n}$.

c) En déduire la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Montrer finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = e^{-1}$.

10. On note g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(t) = t + \ln(t) + 1$.

Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$\mathrm{e}^{-2} < \alpha < \mathrm{e}^{-1}$$

11. On admet dans la suite le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n)! \leqslant (u_n)^{2n}\ \mathrm{e}^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n \mathrm{e}^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

b) En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question ***10***.

12. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.