DS1 /141

I. Exercice 1 /32

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 6A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

- **1 pt :** $A^2 - 6A = -9\,I$
- **1pt :** $Q(X) = (X-3)^2$
  0 pt si écriture du type $Q(X) = 0$ ou autre erreur du genre

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

- **1 pt :** $\text{Sp}(A) \subset \{$**racines de** $Q\} = \{3\}$
- **1 pt : 3 est valeur propre de A car $A - 3I$ est non inversible**

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

- **2 pts : A n'est pas diagonisable par l'absurde ou en remarquant** $\dim\big(E_3(A)\big) = 2 \neq 3$
- **1 pt : A inversible car 0 n'est pas valeur propre de A (ou autre méthode)**

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

- **1 pt : écriture du système**
- **1 pt : résolution** $\{z = x + \frac{1}{2}\, y$
- **1 pt :** $E_3(f) = \text{Vect}\left((1,0,1),(0,2,1)\right)$
  0 pt si confusion d'objets
- **1 pt : la famille** $\big((1,0,1),(0,2,1)\big)$ **est génératrice de** $E_3(f)$
- **1 pt : la famille** $\big((1,0,1),(0,2,1)\big)$ **est libre**

4. ***a)*** On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- **0 pt :** $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = (1,1,1)$
- **1 pt : la famille** (u_1, u_2, u_3) **est libre**
- **1 pt :** $\text{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ **donc** (u_1, u_2, u_3) **est une base de** $\mathbb{R}^3$

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

- **1 pt :** $u_1 \in E_3(f)$ **donc** $f(u_1) = 3 \cdot u_1 = 3 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- **1 pt : de même** $f(u_2) = 3 \cdot u_2 = 0 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$. **Ainsi :** $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : résolution système** $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \gamma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad (*)$
- **1 pt :** $f(u_3) = (-1)\cdot u_1 + (-1)\cdot u_2 + 3\cdot u_3$**.**
  n'attribuer qu'1 pt sur les 2 derniers si confusion d'objets

c) En écrivant $T = 3I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

- **0 pt : d'après l'énoncé,** $N = T - 3\cdot I = \begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$**.**
- **1 pt :** $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt : par une récurrence immédiate, pour tout** $k \geqslant 2$**,** $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $3I$ **et** N **commutent**
- **1 pt : formule du binôme correcte**
- **1 pt : découpage valable car** $n \geqslant 1$
- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $T^n = 3^n\ I + n\,3^{n-1}\ N$
- **1 pt : cas** $n = 0$
- **1 pt : en écrivant** $N = T - 3I$**, on obtient :** $T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$

5. *a)* Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^nI$.

- **1 pt : comme** $T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f)$**, d'après la question précédente, on obtient, par passerelle matrice-endomorphisme :** $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = n3^{n-1}\ f - (n-1)\,3^n\ Id$
- **1 pt : comme** $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$**, par passerelle endomorphisme-matrice :** $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}\ A - (n-1)\,3^n\ I$

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

- **1 pt : calcul**
- **1 pt : multiplication externe**

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

- **1 pt**
  0 pt pour toute erreur de logique

II. Exercice 3 /35

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

1. Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

2. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

- **1 pt : (x_n) est (strictement) croissante**

3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

- **4 pts : raisonnement par l'absurde pour (x_n) non majorée**
  - × **1 pt : structure du raisonnement par l'absurde**
  - × **1 pt : par passage à la limite : $\ell \geqslant 0$**
  - × **1 pt : absurdité si $\ell > 0$ (en passant à la limite dans la relation de récurrence)**
  - × **1 pt : absurdité si $\ell = 0$ (même démarche)**
- **1 pt : (x_n) croissante non majorée donc elle diverge vers $+\infty$**

4. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

- **1 pt : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{x_n} = x_{n+1} - x_n$**
- **1 pt : télescopage : $\sum\limits_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ donc $\sum \dfrac{1}{x_n}$ divergente**

5. Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

a) On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note ℓ sa somme ($\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}$).

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ {x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

- **1 pt : $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1}^2 - x_k^2 = 2 + \dfrac{1}{x_k^2}$**
- **1 pt : sommation pour k variant de 0 à $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)**
- **1 pt : télescopage : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) = x_n^2 - x_0^2$**

(ii) En déduire que la suite $\left(\dfrac{{x_n}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

- **1 pt : $\dfrac{x_n^2}{n} = \dfrac{x_0^2}{n} + 2 + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2}$**
- **1 pt : comme $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$**

(iii) En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

- **1 pt :** $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$
- **3 pts : critère d'équivalence des SATP (1 pt par hypothèse, notamment la positivité)**
- **1 pt : il est absurde de trouver que** $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ **diverge alors qu'on a supposé que cette série converge**

b) Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**

6. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \ln(k+1) - \ln(k)\ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

- **1 pt : décroissance de la fonction inverse sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)\ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- **1 pt : sommation télescopique**
- **1 pt :** $H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n$
- **1 pt :** $H_n \leqslant 1 + \ln(n)$

c) Déterminer un équivalent simple de la suite (H_n).

- **1 pt : division par** $\ln(n) > 0$
  0 pt si $n \geqslant 2$ **non précisé**
- **1 pt :** $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ **par théorème d'encadrement**

7. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, H_n$$

a) En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

- **1 pt : d'après résultat de l'énoncé :** $\dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{4n}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$ **par croissances comparées**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{2n} = 1$

b) En déduire un équivalent de la suite (x_n).

- **1 pt :** $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$
  0 pt si oubli de l'argument de stricte positivité

Problème

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. *a)* Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$ **en utilisant un équivalent ou une factorisation**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to-\infty} P_n(x) = -\infty$ **en utilisant un équivalent ou une factorisation**

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.

- **1 pt :** P_n **est continue sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt : citation du théorème des valeurs intermédiaires + référence à la question précédente**

2. *a)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- **1 pt :** P_n **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **en tant que fonction polynomiale**
- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt : écriture du terme pour compléter la somme**

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n ne sont pas racines de P_n'.

- **1 pt : si** x_0 **est une racine de** P_n **et de** P_n'**, alors** $x_0 = 0$**.**
- **1 pt :** $P_n(0) = 1$**.**

3. *a)* Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \dfrac{x}{2k+1}\right)$.

<u>Indication</u> : *on pensera à découper l'expression de P_n en deux sommes : l'une ne comportant que les termes d'indice pair, l'autre ne comportant que les termes d'indice impair.*

- **1 pt :** $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \dfrac{(-x)^k}{k!} = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \dfrac{(-x)^k}{k!} = -\sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$
- **1 pt : fin du calcul**

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1, 2n+1]$.

- **3 pt : Cas** $x \in\ ]-\infty, 1[$
- **2 pt : Cas** $x \in\ ]2n+1, +\infty[$

4. *a)* Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P_{n+1}'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P_{n+1}''(x) = P_n(x) \end{cases}$$

- **1 pt : calcul de P'_{n+1}**
- **1 pt : P_{n+1} est de classe C^2 car polynomiale**
- **1 pt : dérivation de la formule précédente et simplification**

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

- **1 pt : Initialisation**
- **7 pt : Hérédité**
  - **2 pt : Tableau de variations de P'_{n+1}**
  - **2 pt : Tableau de variations de P_{n+1}**
  - **1 pt : hypothèses du théorème de la bijection**
  - **1 pt :** $P_{n+1}(\,]-\infty,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$
  - **1 pt :** $0 \in]-\infty,+\infty[$

5. a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function y = P(n,x)` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x, et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.
On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `factorial(k)` *renvoie une valeur de* `k!`.

- **1 pt : squelette fonction Scilab correct**
- **1 pt : initialisation** `y = 0`
- **1 pt : boucle for avec les bonnes bornes**
- **1 pt : formule itérative pour** `y`

b) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = suite(n)
    a = .........
    b = .........
    c = (a+b)/2
    while .........
        if ......... then
            a = c
        else
            b = c
        end
        c = .........
    end
    .........
endfunction
```

- **1 pt :** `a = 1` **et** `b = 2 * n + 1`
- **1 pt : while (b-a) $>$ 10^(-3)**
- **1 pt : if P(n, c) $>$ 0**
- **1 pt :** `y = (a+b)/2`

c) On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : On conjecture** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} \approx 0,6 \neq 0$ **et donc** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0,6\,n$
- **1 pt : si la conjecture est vraie, on en déduit** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right)$.

- **1 pt : Utilisation de la question 3.a) avec** P_{n+1}
- **1 pt : découpage de la somme en deux et utilisation de la définition de** u_n

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt :** $P_{n+1}(u_n) \geqslant 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$
- **1 pt : application de la bijection réciproque de** P_{n+1}**, également strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$

7. On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.
On admet dans la suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in [u_n, \ell]$, $|P_n'(x)| \leqslant \mathrm{e}^{\ell}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant \mathrm{e}^{\ell}\ |u_n - \ell|$.

- **1 pt : Hypothèses IAF correctement citées**
- **1 pt : écriture générale de l'IAF**
- **1 pt : application à** $y = u_n \in [u_n, \ell]$ **et** $x = \ell \in [u_n, \ell]$

b) En revenant à la définition de P_n, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell)$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = \mathrm{e}^{-\ell}$.

- **1 pt :** $P_n(\ell)$ **est la somme partielle d'ordre** $2n+1$ **de la série exponentielle de paramètre** $-\ell$**, qui est convergente**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-\ell)^k}{k!} = \mathbf{e}^{-\ell}$
- **1 pt :** $P_n(\ell) - \mathbf{e}^{\ell}\ |u_n - \ell| \ \leqslant\ P_n(u_n) \ \leqslant\ P_n(\ell) + \mathbf{e}^{\ell}\ |u_n - \ell|$
- **1 pt : Par théorème d'encadrement :** $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = \mathbf{e}^{-\ell}$

c) Aboutir à une contradiction.

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = \mathbf{e}^{-\ell}$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = 0$
- **1 pt :** $\mathbf{e}^{-\ell} > 0$

8. En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt :** (u_n) **est croissante donc si** (u_n) **ne diverge pas vers** $+\infty$**, alors elle converge vers un réel** ℓ
- **1 pt : D'après la question 7, c'est impossible, donc** (u_n) **diverge vers** $+\infty$

PARTIE B : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9. On note f la fonction définie sur $]0,1]$ par : $\forall t \in\ ]0,1],\ f(t) = -\ln(t)$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ converge et préciser sa valeur.

- **1 pt : La fonction** f **est continue sur** $]0,1]$**. L'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ **est donc impropre en** 0

- **1 pt :** $\displaystyle\int_A^1 f(t)\ dt = 1 - A\ln(A) + A$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{A\to 0} A\ \ln(A) = 0$ **par croissances comparées**

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Justifier, pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$: $\displaystyle\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

En déduire : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\ dt + \frac{\ln(n)}{n}$.

- **1 pt : pour tout** $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$**,** $\displaystyle f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant f(t) \geqslant f\left(\frac{k+1}{n}\right)$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant** $(\frac{k}{n} \leqslant \frac{k+1}{n})$
- **1 pt : sommation de l'encadrement précédent pour** k **variant de** 1 **à** $n-1$
- **1 pt : Relation de Chasles citée + décalage d'indice :**

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

- **1 pt : Obtention de** $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
- **1 pt : Obtention de** $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\ dt + \frac{\ln(n)}{n}$

c) En déduire la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : d'après la question 9.a),** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt = 1$
- **1 pt : par croissances comparées :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$
- **1 pt : par théorème d'encadrement :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 1$ **puis :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = -1$

d) Montrer finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$
- **1 pt : Par continuité de la fonction** exp **en** -1**, on obtient** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathbf{e}^{-1}$

10. On note g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(t) = t + \ln(t) + 1$.

Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$\mathrm{e}^{-2} < \alpha < \mathrm{e}^{-1}$$

- **1 pt : hypothèses citées :** g **continue et strictement croissante**
- **1 pt :** $g(\,]0,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$
- **1 pt :** $0 \in]-\infty,+\infty[$
- **1 pt :** $g(\mathbf{e}^{-2}) \ < \ g(\alpha) \ < \ g(\mathbf{e}^{-1})$
- **1 pt : application de la fonction réciproque, également strictement croissante sur** $\mathbb{R}$

11. On admet dans la suite le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n)! \leqslant (u_n)^{2n}\ \mathrm{e}^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n \mathrm{e}^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \frac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

- **1 pt :** $w_n \mathbf{e}^{w_n} = \frac{(u_n^{2n} e^{u_n})^{\frac{1}{2n}}}{2n}$
- **1 pt : la fonction** $x \mapsto x^{\frac{1}{2n}}$ **est décroissante sur** $\mathbb{R}^+$
- **1 pt :** $(2n+3)! \leqslant (2n+3)^3 (2n)!$

b) En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question ***10***.

- **1 pt : la fonction** $\ln$ **est décroissante sur** $]0,+\infty[$ **donc**

$$\ln\left(\frac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) \leqslant w_n + \ln(w_n) \leqslant \ln\left(\frac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) + \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)$$

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\ln\left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right) = 0$ **par croissances comparées**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) = -1$ **d'après la question 9.d)**
- **1 pt : par théorème d'encadrement,** $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge vers 0**
- **1 pt : par continuité de** g^{-1} **en** 0**,** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge vers** $g^{-1}(0) = \alpha$

12. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : D'après la question précédente,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2n} = \alpha \neq 0$ **donc** $\frac{u_n}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha$
- **1 pt : on en déduit** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\alpha n$