DS1 (version B)

Exercice (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 6A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 12 \\ -24 & -3 & 24 \\ -24 & -12 & 33 \end{pmatrix}$

- Ainsi : $A^2 - 6A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 12 \\ -24 & -3 & 24 \\ -24 & -12 & 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ -24 & 6 & 24 \\ -24 & -12 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} - 9I.$

$$\boxed{A^2 - 6A = -9I}$$

$$\boxed{\text{Donc } Q(X) = X^2 - 6X + 9 \text{ est } \textbf{un} \text{ polynôme annulateur de degré 2 de } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :
$$(\alpha\, Q)(A) \ = \ \alpha\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X - 5)Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
$$R(A) \ = \ (A - 5\, I)\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.

□

2. a) En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

Démonstration.

- On remarque que $Q(X) = X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$. Ainsi :
$$\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \{\text{racines de } Q\} \ = \ \{3\}$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{3\}.}$$

Commentaire

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.
- On dit parfois que les racines d'un polynôme annulateur sont des valeurs propres **possibles** de A (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). Il faut alors démontrer qu'elles sont réellement des valeurs propres.

- Montrons maintenant que 3 est une valeur propre de A (*i.e.* que $\{3\} \subset \mathrm{Sp}(A)$).

$$A - 3\,I \ = \ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On remarque : $L_2 = L_3$. Ainsi la matrice $A - 3\,I$ n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que 3 est valeur propre de } A.}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f) = \{3\}}$$

Commentaire

- On démontre que la matrice $A - 3 \cdot I_3$ est non inversible en exhibant une relation de dépendance linéaire non triviale entre les lignes de cette matrice. Il est aussi possible d'exhiber une relation de dépendance linéaire non triviale entre les colonnes. En l'occurrence, on a : $C_3 = -C_1$.
- Il est aussi possible d'effectuer un calcul du rang. En procédant par opérations élémentaires successives, on obtient une réduite triangulaire de même rang que la matrice initiale. En particulier, matrice initiale et réduite sont toutes les deux inversibles ou toutes les deux non inversibles. La réduite étant triangulaire, elle est non inversible si et seulement si elle possède (au moins) un coefficient diagonal nul, ce qui permet de conclure quant au caractère inversible (ou non) de la matrice initiale.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - 3 \cdot I_3) \quad &= \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1}}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

La réduite obtenue, triangulaire (supérieure), possède (au moins) un coefficient diagonal nul. Elle (et la matrice initiale $A - 3 \cdot I_3$) est donc non inversible.

□

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Démonstration.

- Démontrons par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.
  Supposons que A est diagonalisable. Il existe alors :
  × une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,
  × une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

  telles que : $A = PDP^{-1}$.
  Or 3 est la seule valeur propre de A. Ainsi : $D = 3 \cdot I_3$ et :
  $$A \;=\; P\,(3\,I_3)\,P^{-1} \;=\; 3\,PP^{-1} \;=\; 3\,I_3$$
  Absurde !
  $$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$
- Montrons que A est inversible.
  On sait que $\text{Sp}(A) = \{3\}$. Donc en particulier, 0 n'est pas valeur propre de A.
  $$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ est inversible.}}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de démontrer que A n'est pas diagonalisable en déterminant la dimension de $E_3(A)$, espace propre associé à l'unique valeur propre 3.
  On démontre alors que : $\dim(E_3(A)) = 2 \neq 3$ (*cf* question suivante).
- Concernant l'inversibilité de A on utilise le fait que :
  $$A \text{ non inversible } \Leftrightarrow \text{ 0 est valeur propre de } A$$
  On peut aussi démontrer l'inversibilité de A en déterminant son inverse par la méthode proposée en ***5.b)***.
- Toutes les méthodes donnant le bon résultat sont acceptées. Évidemment, les méthodes les plus longues produisent une perte de temps qui finit par vous pénaliser à terme.

□

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

Démonstration.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_3(f) & \Longleftrightarrow & f(u) = 3\,u \\
& \Longleftrightarrow & (f - 3\,Id)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A - 3\,I_3)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\,2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -\,4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ -\,4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \; -2x \; - \; y \; + \; 2z \; = \; 0 \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \; 2z \; = \; 2x \; + \; y \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} E_3(f) &= \left\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = x+\tfrac{1}{2}\,y\right\} \\ &= \left\{(x,y,x+\tfrac{1}{2}\,y)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x\cdot(1,0,1)+y\cdot(0,1,\tfrac{1}{2})\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,0,1),(0,1,\tfrac{1}{2})\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,0,1),(0,2,1)\right) \end{aligned}$$

Commentaire

- Lors de la résolution, on a choisi d'exprimer z à l'aide des variables auxiliaires x et y, obtenant ainsi l'équation : $2z = 2x + y$.
- On aurait choisir d'exprimer :

1) x en fonction de y et z. On obtient alors l'équation : $2x = -y + 2z$.

2) y en fonction de y et z. On obtient alors l'équation : $y = -2x + 2z$.

- Ce choix n'est pas si anodin car il modifie les deux vecteurs de la famille engendrant $E_3(f)$:

1) $E_3(f) = \mathrm{Vect}\left((-1,2,0),(1,0,1)\right)$

2) $E_3(f) = \mathrm{Vect}\left((1,-2,0),(0,2,1)\right)$

- On trouve des bases différentes pour $E_3(f)$ mais évidemment, cela ne modifie en rien l'espace vectoriel $E_3(f)$ en lui-même.

- Notons $u_1 = (1,0,1)$ et $u_2 = (0,2,1)$. La famille (u_1,u_2) :

× engendre $E_3(f)$.

× est libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $E_3(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u_1,u_2) \text{ est une base de } E_3(f).}$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_3(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si u et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont deux représentations différentes du même vecteur u, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{(x,\ y,\ z)}_{\in\,\mathbb{R}_3[X]} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{\in\,\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\left((1,0,1),(0,2,1)\right)}_{E_3(f)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)}_{E_3(A)}$$

□

4. a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = (1,1,1)$.
- Démontrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (*)$.
  Or :

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = 0 \\ & 2\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & & & = 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & & & = 0 \\ & 2\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & & & = 0 \\ & & & \lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \{ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(par remontées successives)

  La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.
- De plus, $\text{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, u_3) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}\big((u_1, u_2, u_3)\big) = 3$).
- L'ensemble $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, u_3). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, u_3) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\big(\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)\big)}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, u_3))}$ n'ont aucun sens !

$\square$

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

Démonstration.

- Par définition de u_1 : $u_1 \in E_3(f)$.
  On en déduit : $f(u_1) = 3 \cdot u_1 = 3 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.
  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- De mêm, par définition de u_2 : $u_2 \in E_3(f)$.
  On en déduit : $f(u_2) = 3 \cdot u_2 = 0 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.
  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Dans la suite, on note :
  $$U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad U_3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  Tout d'abord :
  $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_3)) & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) \\ & = & A \times U_3 \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$
  On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant (U_1, U_2, U_3).
  Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(*)$.
  Or :
  $$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & 2 \\ & & 2\,\beta & + & \gamma & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 1 \end{array} \right.$$
  $$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & 2 \\ & & 2\,\beta & + & \gamma & = & 1 \\ & & \beta & & & = & -1 \end{array} \right.$$
  $$\overset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & 2 \\ & & \beta & & & = & -1 \\ & & 2\,\beta & + & \gamma & = & 1 \end{array} \right.$$
  $$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & 2 \\ & & \beta & & & = & -1 \\ & & & & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$
  $$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & & & = & -1 \\ & & \beta & & & = & -1 \\ & & & & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

On en conclut :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_3)\big) &= (-1)\cdot U_1 + (-1)\cdot U_2 + 3\cdot U_3 \\
&= (-1)\cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) + (-1)\cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) + 3\cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((-1)\cdot u_1 + (-1)\cdot u_2 + 3\cdot u_3\big) && \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)}
\end{aligned}$$

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)$ étant bijective, on en déduit : $f(u_3) = (-1)\cdot u_1 + (-1)\cdot u_2 + 3\cdot u_3$.

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ consiste à exprimer l'image par f des vecteurs u_1, u_2, u_3, suivant la base (u_1, u_2, u_3).
- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
  Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{aligned}
E \text{ espace vectoriel de dimension } n \quad &\longleftrightarrow \quad \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\
f : E \to E \text{ endomorphisme} \quad &\longleftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\
f \text{ bijectif} \quad &\longleftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible}
\end{aligned}$$

  Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\text{expression de } f(u_3) \text{ dans } (u_1, u_2, u_3) \quad \longleftrightarrow \quad \text{expression de } A\, U_3 \text{ dans } (U_1, U_2, U_3)$$

  Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme.

□

c) En écrivant $T = 3I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, pus de I et T.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $N = T - 3\cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- De plus : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.

Commentaire

- Au lieu de faire une récurrence, on peut aussi écrire, pour tout $k \geqslant 2$:

$$N^k = N^{k-2} \times N^2 = N^{k-2} \times 0 = 0$$

- On insiste sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geqslant 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Les matrices $3I$ et N commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
T^n & = & (3\,I + N)^n & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, (3\,I)^{n-k} \; N^k & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, 3^{n-k} \, I^{n-k} \; N^k & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, 3^{n-k} \, I \; N^k & \textit{(car : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \, 3^{n-k} \; N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \, 3^{n-k} \; N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \, 3^{n-k} \; N^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\binom{n}{0} \, 3^n \; N^0 + \binom{n}{1} \, 3^{n-1} \; N^1 & \\
 & = & 3^n I + n \; 3^{n-1} \; N &
\end{array}$$

- Enfin : $3^0 \; I + 0 \; 3^{-1} \; N = I$ et $T^0 = I$.
La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : \ T^n = 3^n \; I + n \; 3^{n-1} \; N.}$$

- De plus, comme $N = T - 3I$, on obtient :

$$T^n \; = \; 3^n \; I + n \; 3^{n-1} \; (T - 3I) \; = \; 3^n \; I + n \; 3^{n-1} \; T - n \; 3^n \; I \; = \; n \; 3^{n-1} \; T - (n-1) \; 3^n \; I$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \ T^n = n \; 3^{n-1} \; T - (n-1) \; 3^n \; I.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:
$$\sum_{k=m}^{n} u_k \;=\; \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$
(la seconde somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

□

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$.

Démonstration.

- Comme $T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f)$, d'après la question précédente, on obtient, par passerelle matrice-endomorphisme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = n3^{n-1}\ f - (n-1)\,3^n\ Id$$
- De plus : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par passerelle endomorphisme-matrice : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}\ A - (n-1)\,3^n\ I}$$

Commentaire

- C'est la manière subtile de rédiger cette question.
Mais, encore une fois, ce n'est pas la seule acceptée.
- On pouvait aussi procéder comme suit.
Notons $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Alors :
$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \;=\; P \times T \times P^{-1} \end{aligned}$$
Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.
(la récurrence n'est pas explicitement demandée dans le sujet, il n'est donc pas utile de la faire)
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$. Donc :
$$\begin{aligned} A^n &= P\ T^n\ P^{-1} \;=\; P\ (n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I)\ P^{-1} \\ &= n\ 3^{n-1}\ P\ T\ P^{-1} - (n-1)\ 3^n\ P\ P^{-1} \\ &= n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I \end{aligned}$$
Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I$.

□

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

Démonstration.
D'après la question ***1.***, $A^2 - 6A = -9I$.

On en déduit que : $-\dfrac{1}{9}\ (A^2 - 6A) = I$. Et ainsi :

$$A \times \left(-\frac{1}{9}(A - 6I)\right) = I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse : } A^{-1} = -\frac{1}{9}\ (A - 6I).}$$

Commentaire

- Il n'y a pas de division opérant dans le monde des matrices. Ainsi, il est impropre d'écrire : $\dfrac{A}{9}$. (l'écriture $\dfrac{A}{B}$ avec A et B deux matrices est elle aussi impropre).
- Par contre, il existe un opérateur de multiplication externe noté $\cdot$.
  L'écriture correcte est : $\dfrac{1}{9} \cdot A$.

$\square$

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I & = & (-1)\ 3^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 3^{-1}\ I \\ & = & (-1)\ \dfrac{1}{3^2}\ A - (-2)\ \dfrac{1}{3}\ I \ = \ -\dfrac{1}{9}\ A + \dfrac{2}{3}\ I \\ & = & -\dfrac{1}{9}(A - 6I) \ = \ A^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule trouvée à la question } \textbf{\textit{5.a)}} \text{ reste valable pour } n = -1.}$$

$\square$

I. Exercice 3 (inspiré de oraux ESCP 2018)

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

1. Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \quad$ où $\quad \mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} x_n \text{ est défini} \\ x_n > 0 \end{array} \right.$.

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $x_0 > 0$
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e. \ \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} \text{ est défini} \\ x_{n+1} > 0 \end{array} \right. \right)$.
  - Par hypothèse de récurrence, $x_n > 0$. Ainsi : $x_n \neq 0$ et la quantité $\dfrac{1}{x_n}$ est bien définie et il en est de même de $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.
  - On en déduit enfin :
  $$x_{n+1} \ = \ x_n + \frac{1}{x_n} \ > \ 0$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence, } (x_n) \text{ est bien définie et à termes strictement positifs.}}$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes.
  Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre en réalité :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \qquad \text{où} \qquad \mathcal{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

□

2. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de (x_n) :

$$x_{n+1} - x_n \ = \ \frac{1}{x_n} \ > \ 0 \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (x_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$

□

3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la suite (x_n) est croissante. Deux cas se présentent alors :
  - × si (x_n) est majorée, alors elle converge.
  - × si (x_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
- Démontrons par l'absurde que (x_n) n'est pas majorée.
  Supposons que la suite (x_n) est majorée.
  Alors elle converge vers un réel ℓ.
  - Tout d'abord, d'après ***1.*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$.
    Par passage à la limite : $\ell \geqslant 0$.

Commentaire

- On rappelle que le passage à la limite est compatible avec les inégalités **larges**. En effet, si la suite (u_n) converge vers ℓ :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > a \quad \Rightarrow \quad \ell \geqslant a$$

- On pourra retenir l'exemple classique de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$:
  - × d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$
  - × d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \cancel{>} 0$

- Deux cas se présentent alors :
  - × si $\ell > 0$. Par définition de (x_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

Ainsi, par continuité de la fonction inverse en $\ell \in \,]0, +\infty[$, on obtient : $\ell \ = \ \ell + \dfrac{1}{\ell}$. D'où :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ell} = 0 \\ \text{donc} \quad & 1 = 0 \qquad \textit{(en multipliant par } \ell \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

Absurde !

  - × si $\ell = 0$. Par définition de (x_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

Ainsi, par passage à la limite :

$$0 \ = \ 0 + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} \ = \ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ = \ +\infty$$

Absurde !

On en déduit que (x_n) n'est pas majorée.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.}$$

□

4. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

Démonstration.

- Par définition de la suite (x_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{x_n} = x_{n+1} - x_n$$
La nature de la série $\sum \dfrac{1}{x_n}$ est donc la même que celle de la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$.

- Déterminons la nature de la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) &= \sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} x_k} + x_{n+1} \right) - \left(x_0 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} x_k} \right) \\
&= x_{n+1} - x_0
\end{aligned}$$
Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} - x_0 = +\infty$.
Ainsi la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) \right)$ diverge vers $+\infty$. La série $\sum (x_{n+1} - x_n)$ est donc divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit la série } \sum \frac{1}{x_n} \text{ est divergente.}}$$

Commentaire

Le lecteur plus à l'aise avec le télescopage pourra se permettre de ne pas détailler le décalage d'indice. On obtient la rédaction suivante :
$$\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0 \qquad \textit{(par télescopage)}$$

□

5. Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

a) On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note ℓ sa somme ($\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}$).

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ${x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{x_k}$$
$$\text{donc} \quad x_{k+1}^2 = \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^2 = x_k^2 + 2\,\cancel{x_k}\,\frac{1}{\cancel{x_k}} + \frac{1}{x_k^2}$$
$$\text{ainsi} \quad x_{k+1}^2 - x_k^2 = 2 + \frac{1}{x_k^2}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  En sommant les égalités précédentes pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{x_k^2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \\
&= 2\,\big((n-1) - 0 + 1\big) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \\
&= 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}
\end{aligned}$$

  De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) &= \sum_{k=0}^{n} x_{k+1}^2 - \sum_{k=0}^{n} x_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 & \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2} + x_n^2\right) - \left(x_0^2 + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2}\right) \\
&= x_n^2 - x_0^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 - x_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}.}$$

□

(ii) En déduire que la suite $\left(\dfrac{x_n{}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
& x_n^2 = x_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \\
\text{donc} \quad & \frac{x_n^2}{n} = \frac{1}{n}\left(x_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}\right) \\
\text{d'où} \quad & \frac{x_n^2}{n} = \frac{x_0^2}{n} + 2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}
\end{aligned}$$

- On a supposé dans cette question ***5.a)*** que la série $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{x_n^2}$ converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x_k^2} = \ell$.

  On en déduit : $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$

- De plus : $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{x_0^2}{n} = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n^2}{n} = 0 + 2 + 0 = 2.}$$

□

(iii) En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{n} = 2 \neq 0$. On en déduit : $\dfrac{x_n^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
  Ainsi : $\dfrac{n}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}.}$$

- On obtient :
  × tout d'abord : $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n} > 0$
  × la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente. Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2n}$.
  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\dfrac{1}{2} \neq 0$*)*

  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x_n^2}$ est divergente.

$$\boxed{\text{Cette conclusion est absurde puisqu'on a supposé que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x_n^2} \text{ est convergente.}}$$ $\square$

b) Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

Démonstration.
Démontrons par l'absurde que $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ est divergente.
Supposons que la série $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ est convergente.
Alors, d'après la question ***5.a)***, la série $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ est divergente.
Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum \dfrac{1}{x_n^2} \text{ est divergente.}}$$ $\square$

6. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \ln(k+1) - \ln(k) \ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{lcccccl} & k & \leqslant & x & \leqslant & k+1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k} & \geqslant & \dfrac{1}{x} & \geqslant & \dfrac{1}{k+1} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[) \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx \\ \| & & \| & & \| \\ \dfrac{1}{k} & & [\ \ln(|x|)\ ]_k^{k+1} & & \dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les encadrements précédents pour k variant de 1 à n ($n \geqslant 1$).

$$\begin{array}{lcccccl} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \\ \text{donc} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \textit{(par sommation télescopique)} \\ \text{d'où} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ \text{enfin} & H_{n+1} - 1 & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & H_n & \textit{(par définition de } H_n) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a donc démontré : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n.}$$

En particulier, l'inégalité de gauche de l'énoncé est démontrée.
Il reste à déterminer l'inégalité de droite.

- D'après ce qui précède : $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ H_{m+1} \leqslant 1 + \ln(m+1)$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, en considérant ces inégalités en $m = n-1 \geqslant 1$, on obtient :

$$H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ H_n \leqslant 1 + \ln(n)}$$

- Remarquons enfin :
  × $H_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$,
  × $1 + \ln(1) = 1$.
  On a donc bien : $H_1 \leqslant 1 + \ln(1)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).}$$ □

Commentaire

- Les questions ***6.a)*** et ***6.b)*** sont une illustration d'une méthodologie classique connue sous le nom de comparaison série-intégrale.
- L'énoncé demande de démontrer l'inégalité à partir du rang 1, ce qui n'est pas très commode (le cas $n = 1$ doit être traité à part). Ce cas n'est pas d'un grand intérêt pour la suite de l'énoncé et notamment pour la question suivante qui vise à établir un équivalent de la suite (H_n) (on peut alors choisir n dans n'importe quel voisinage de $+\infty$).

c) Déterminer un équivalent simple de la suite (H_n).

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- En multipliant membre à membre par $\frac{1}{\ln(n)} > 0$ l'inégalité obtenue en question précédente, on obtient :
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1$$
- Or :
  × $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
  × $\frac{1}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- On prend garde de choisir initialement un entier $n \geqslant 2$ afin que la quantité $\frac{1}{\ln(n)}$ soit bien définie (c'est-à-dire tel que $\ln(n) \neq 0$).
- La propriété : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ est classique. Ce premier résultat est parfois complété par une étude permettant d'obtenir le début du développement asymptotique de la série harmonique. Plus précisément, on obtient :
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$
où γ ($\simeq 0,577$), appelée constante d'Euler est la limite de la suite $\big(H_n - \ln(n)\big)$.
La démonstration la plus usuelle fait intervenir des suites adjacentes et est donc tout à fait adaptée au programme ECE.

7. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, H_n$$

a) En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

Démonstration.
Démontrer $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ revient à prouver : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{2n} = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***5.a)(i)*** :

$$x_n^2 = 2n + x_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{x_n^2}{2n} = 1 + \frac{x_0^2}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$$

- Or :
  × d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0^2}{2n} = 0$.
  × d'autre part, d'après le résultat admis en question ***7.*** :

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2} \ln(n) = \frac{\ln(n)}{4n}$$

  Par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$.

  Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{2n} = 1 + 0 + 0 = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n.}$$

□

b) En déduire un équivalent de la suite (x_n).

Démonstration.
D'après la question précédente : $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$. Comme la suite (x_n) est à termes strictement positifs : $\sqrt{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'en toute généralité, on ne compose pas les équivalents !
- On dispose tout de même de la propriété de compatibilité de l'équivalent avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ (u_n) \text{ strictement positive à} \\ \text{partir d'un certain rang} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^\alpha$$

  On utilise ici cette propriété pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n^2$ et $v_n = 2n$.

□

Problème (`EML 2020 voie S`)

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcccccccccc} P_n(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} \\ & = & \dfrac{(-x)^0}{0!} & + & \dfrac{(-x)^1}{1!} & + & \cdots & + & \dfrac{(-x)^{2n}}{(2n)!} & + & \dfrac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ & = & 1 & - & x & + & \cdots & + & \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} & - & \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array}$$

- On en déduit : $P_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty.}$$

- De même : $P_n(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Or : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty.}$$

□

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction P_n est continue sur $]-\infty,+\infty[$ en tant que fonction polynomiale.
Alors toute valeur comprise entre $\lim\limits_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$ est atteinte par la fonction P_n sur $]-\infty,+\infty[$.
Or $0 \in\ ]-\infty,+\infty[$, donc 0 admet (au moins) un antécedent par P_n.

$$\boxed{\text{Autrement dit, } P_n \text{ admet au moins une racine réelle.}}$$

Commentaire

- On applique dans cette question le théorème des valeurs intermédiaires (TVI). On rappelle qu'il s'énonce de la manière suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors toute valeur de $f(I)$ est atteinte par la fonction f sur I.

  Autrement dit :
  $$\forall c \in f(I),\ \exists x \in I,\ c = f(x)$$
  Ainsi, dans notre cas où $f = P_n$ et $I = \ ]-\infty, +\infty[$, on obtient :
  $$\forall c \in P_n(\ ]-\infty, +\infty[\ ),\ \exists x \in \ ]-\infty, +\infty[,\ c = P_n(x)$$
  Or, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = -\infty$, on obtient : $P_n(\ ]-\infty, +\infty[\ ) = \ ]-\infty, +\infty[$. On en déduit :
  $$\forall c \in \ ]-\infty, +\infty[,\ \exists x \in \ ]-\infty, +\infty[,\ c = P_n(x)$$
  Or $0 \in \ ]-\infty, +\infty[$. Il existe donc $x \in \ ]-\infty, +\infty[$ tel que : $P_n(x) = 0$ (ce que l'on cherchait à démontrer).
- L'utilisation du TVI est peu fréquente. Usuellement, lorsqu'on cherche à démontrer l'existence d'un point d'annulation d'une fonction f (continue sur un intervalle I), on se place sur un intervalle de stricte monotonie de f afin d'invoquer le théorème de la bijection. Plus précisément :
  × Si la fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :
  $$\forall c \in f(I),\ \exists! x \in I,\ c = f(x)$$
  Ainsi, si $c \in f(I)$, l'équation $f(x) = c$ admet une **unique** solution dans I.
  × Si on sait seulement que la fonction f est continue sur un intervalle I, alors :
  $$\forall c \in f(I),\ \exists x \in I,\ c = f(x)$$
  Ainsi, si $c \in f(I)$, l'équation $f(x) = c$ admet **au moins** une solution dans I.

□

2. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a de plus :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

Par linéarité de la dérivée, on obtient :

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= 0 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{k \times (-1) \times (-x)^{k-1}}{k!} \\
&= -\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{\cancel{k}\ (-x)^{k-1}}{\cancel{k} \times (k-1)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} + \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{(-1)^{2n+1}\ x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= -\left(P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) && \textit{(car : } (-1)^{2n+1} = -1\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

□

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n ne sont pas racines de P_n'.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que x_0 est une racine de P_n.
Démontrons par l'absurde que x_0 n'est pas racine de P_n'.
Supposons que x_0 est racine de P_n'.

- D'après la question précédente :

$$P_n'(x_0) = -P_n(x_0) - \frac{x_0^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or x_0 est :
× racine de P_n. D'où : $P_n(x_0) = 0$.
× racine de P_n'. D'où : $P_n'(x_0) = 0$.
On obtient alors :

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{P_n'(x_0)} = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{-P_n(x_0)} - \frac{x_0^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ainsi : $-\dfrac{x_0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$. Donc : $x_0^{2n+1} = 0$. Et finalement : $x_0 = 0$.
On vient donc de démontrer que la seule racine possible de P_n et P_n' est 0.

- Vérifions si 0 est effectivement racine de P_n.

$$\begin{aligned} P_n(0) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-0)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{0^k}{k!} \\ &= 1 + 0 \qquad \textit{(car : } \forall k \in N^*,\ 0^k = 0\textit{)} \end{aligned}$$

On en déduit : $P_n(0) \neq 0$. Donc 0 n'est pas racine de P_n.

Absurde !

$$\boxed{\text{On en conclut que les racines de } P_n \text{ ne sont pas racines de } P_n'.}$$

☐

3. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$.

<u>Indication</u> : on pensera à découper l'expression de P_n en deux sommes : l'une ne comportant que les termes d'indice pair, l'autre ne comportant que les termes d'indice impair.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{-x^k}{k!} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p}}{(2p)!} - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{x^{2p}}{(2p)!} - \frac{x^{2p+1}}{(2p+1) \times (2p)!} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \left(1 - \frac{x}{2p+1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right).}$$

☐

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1, 2n+1]$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On souhaite montrer que les solutions de l'équation $P_n(x) = 0$ appartiennent à l'intervalle $[1, 2n+1]$. Autrement dit, on souhaite démontrer :

$$\forall x \notin [1, 2n+1],\ P_n(x) \neq 0$$

- Soit $x \notin [1, 2n+1]$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty, 1[$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{array}{lrcl} & x & < & 1 \\ \text{donc} & -\dfrac{x}{2k+1} & > & -\dfrac{1}{2k+1} \qquad \textit{(car : } -(2k+1) < 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - \dfrac{x}{2k+1} & > & 1 - \dfrac{1}{2k+1} \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{lrcl} \text{comme} & k & \geqslant & 0 \\ \text{alors} & 2k+1 & \geqslant & 1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{2k+1} & \leqslant & 1 \qquad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - \dfrac{1}{2k+1} & \geqslant & 1 - 1 = 0 \end{array}$$

On en déduit, par transitivité :

$$1 - \frac{x}{2k+1} \ > \ 0$$

Deux nouveaux cas se présentent :

- si $x \neq 0$, alors : $x^2 > 0$. Donc : $x^{2k} = (x^2)^k > 0$. D'où : $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} > 0$. Ainsi :

$$\frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right) \ > \ 0$$

En sommant ces inégalités strictes pour k variant de 0 à n, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)}_{= P_n(x)} \ > \ 0$$

En particulier : $P_n(x) \neq 0$. On en déduit que x n'est pas racine de P_n.

- si $x = 0$, on a déjà démontré en question ***2.b)*** qu'alors x n'est pas racine de P_n.

  × si $x \in]2n+1, +\infty[$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{array}{lrcl} & x & > & 2n+1 \\ \text{donc} & -\dfrac{x}{2k+1} & < & -\dfrac{2n+1}{2k+1} \qquad \textit{(car : } -(2k+1) < 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - \dfrac{x}{2k+1} & < & 1 - \dfrac{2n+1}{2k+1} \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{lrcl} \text{comme} & k & \leqslant & n \\ \text{alors} & 2k+1 & \leqslant & 2n+1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{2k+1} & \geqslant & \dfrac{1}{2n+1} \qquad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{2n+1}{2k+1} & \geqslant & \dfrac{2n+1}{2n+1} = 1 \qquad \textit{(car : } 2n+1 \geqslant 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & 1 - \dfrac{2n+1}{2k+1} & \leqslant & 1 - 1 = 0 \end{array}$$

On en déduit, par transitivité :

$$1 - \frac{x}{2k+1} \;<\; 0$$

De plus, comme : $x > 2n+1 > 0$, on en déduit : $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} > 0$. D'où :

$$\frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right) \;<\; 0$$

En sommant ces inégalités strictes pour k variant de 0 à n, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)}_{= P_n(x)} \;<\; 0$$

En particulier : $P_n(x) \neq 0$. On en déduit que x n'est pas racine de P_n.

$$\boxed{\text{On a bien démontré que les racines de } P_n \text{ appartiennent à l'intervalle } [1, 2n+1].}$$

□

4. a) Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P'_{n+1}(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P''_{n+1}(x) = P_n(x) \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question ***2.a)*** :

$$\begin{aligned}
P'_{n+1}(x) &= -P_{n+1}(x) - \frac{x^{2(n+1)+1}}{\big(2(n+1)+1\big)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{2(n+1)+1} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} + \frac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-x)^{2n+3}}{(2n+3)!}\right) - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \\
&= -\left(P_n(x) + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \cancel{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}\right) - \cancel{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}} \\
&= -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\; P'_{n+1}(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}$$

- La fonction P_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le point précédent :

$$\begin{array}{rcl} P''_{n+1}(x) & = & \left(P'_{n+1}\right)'(x) \ = \ -P'_n(x) - (2n+2)\,\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} \quad \textit{(par linéarité de la dérivée)} \\ & = & -P'_n(x) - \cancel{(2n+2)}\,\dfrac{x^{2n+1}}{\cancel{(2n+2)}\,(2n+1)!} \\ & = & -\left(-P_n(x) - \cancel{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right) - \cancel{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \quad \textit{(d'après \textbf{2.a)})} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ P''_{n+1}(x) = P_n(x).}$$

□

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\quad \mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} P_n \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R} \\ P_n \text{ s'annule une unique fois sur } \mathbb{R} \text{ en un réel } u_n \end{array} \right.$.

▸ **Initialisation** :

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$P_0(x) \ = \ \sum_{k=0}^{2\times 0+1} \frac{(-x)^k}{k!} \ = \ \sum_{k=0}^{1} \frac{(-x)^k}{k!} \ = \ 1 - x$$

  On sait déjà que P_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'_0(x) = -1 < 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P_0 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$P_0(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 - x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P_0 \text{ s'annule uniquement en } u_0 = 1.}$$

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{ \begin{array}{l} P_{n+1} \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R} \\ P_{n+1} \text{ s'annule une unique fois sur } \mathbb{R} \text{ en un réel } u_{n+1} \end{array} \right.$)

- Par hypothèse de récurrence, la fonction P_n s'annule une unique fois en u_n.
  Comme de plus (toujours par hypothèse de récurrence), la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :
  × $\forall x \in \,]-\infty, u_n[$, $P_n(x) > P_n(u_n) = 0$
  × $\forall x \in \,]u_n, +\infty[$, $P_n(x) < P_n(u_n) = 0$

  On sait également, d'après ***4.a)*** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P''_{n+1}(x) = P_n(x)$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction P'_{n+1}.

x	$-\infty$	u_n	$+\infty$
Signe de $P''_{n+1}(x) = P_n(x)$	$+$	0	$-$
Variations de P'_{n+1}	$\nearrow$		$\searrow$

- Toujours d'après ***4.a)*** :

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(u_n) &= -P_n(u_n) - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ &= 0 - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \end{aligned}$$

Or $2n+2$ est pair, donc : $u_n^{2n+2} \geqslant 0$. D'où : $\dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant 0$. Ainsi : $P'_{n+1}(u_n) \leqslant 0$.

On en déduit :
× comme P'_{n+1} est strictement croissante sur $]-\infty, u_n[$:

$$\forall x \in \,]-\infty, u_n[, \ P'_{n+1}(x) < P'_{n+1}(u_n) \leqslant 0$$

× comme P'_{n+1} est strictement décroissante sur $]u_n, +\infty[$:

$$\forall x \in \,]u_n, +\infty[, \ P'_{n+1}(x) < P'_{n+1}(u_n) \leqslant 0$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{u_n\}, \ P'_{n+1}(x) < 0 \quad \text{et} \quad P'_{n+1}(u_n) \leqslant 0$$

On en déduit que la fonction P'_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Avec la question ***1.a)***, on obtient le tableau de variations suivant pour la fonction P_{n+1} :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $P'_{n+1}(x)$	$-$	
Variations de P_{n+1}	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

- La fonction P_{n+1} est donc :
× continue sur $\mathbb{R}$,
× strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction P_{n+1} réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $P_{n+1}(\,]-\infty, +\infty[\,)$ où :

$$P_{n+1}(\,]-\infty, +\infty[\,) = \left] \lim_{x \to +\infty} P_{n+1}(x), \lim_{x \to -\infty} P_{n+1}(x) \right[= \,]-\infty, +\infty[$$

Or $0 \in \,]-\infty, +\infty[$. L'équation $P_{n+1}(x) = 0$ admet donc une unique solution u_{n+1} sur $\mathbb{R}$.

La fonction P_{n+1} admet bien un unique point d'annulation u_{n+1} sur $\mathbb{R}$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en un unique réel u_n. □

5. a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function y = P(n,x)` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x, et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.
On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `factorial(k)` *renvoie une valeur de* `k!`.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```
1 function y = P(n, x)
2     y = 0
3     for k = 1:(2 * n + 1)
4         y = y + ((-x) ^ k) / factorial(k)
5     end
6 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  L'énoncé commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `P`,
  - × elle prend en paramètres d'entrée l'entier `n` et le réel `x`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `y`.

```
1 function y = P(n, x)
```

  La variable `y`, qui contiendra la valeur de $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \dfrac{(-x)^x}{k!}$, est initialisée à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2     y = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à calculer les valeurs successives de $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \dfrac{(-x)^k}{k!}$. Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
3     for k = 1:(2 * n + 1)
4         y = y + ((-x) ^ k) / factorial(k)
5     end
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `y` contient la somme $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \dfrac{(-x)^k}{k!} = P_n(x)$, ce que l'on souhaitait.

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Scilab** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

b) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = suite(n)
    a = .........
    b = .........
    c = (a+b)/2
    while .........
        if ......... then
            a = c
        else
            b = c
        end
        c = .........
    end
    .........
endfunction
```

Démonstration.

- Afin de bien comprendre tous les mécanismes en jeu, on se permet d'apporter une réponse très détaillée à cette question, accompagnée d'un aparté sur la méthode de recherche par dichotomie. Il faut toutefois garder en tête qu'un tel niveau de détail n'est pas du tout attendu lors des concours. Fournir la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
  Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

> *Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie*
>
> **Données** :
>
> × une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
>
> × un intervalle de recherche $[a, b]$,
>
> × une précision de recherche ε.
>
> **Résultat** : une valeur approchée à ε près d'un zéro (sur l'intervalle $[a, b]$) de la fonction f.
>
> Autrement dit, une valeur approchée (à ε près) d'un réel $x \in [a, b]$ tel que : $f(x) = 0$.

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :

  × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de f.
  Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.

  × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de f.
  Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

  La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.
  On itère jusqu'à obtenir un intervalle I contenant un zéro de f et de largeur plus faible que ε.
  Les points de cet intervalle I sont tous de bonnes approximations du zéro de f contenu dans I.

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur l'**intervalle** $[a, b]$.

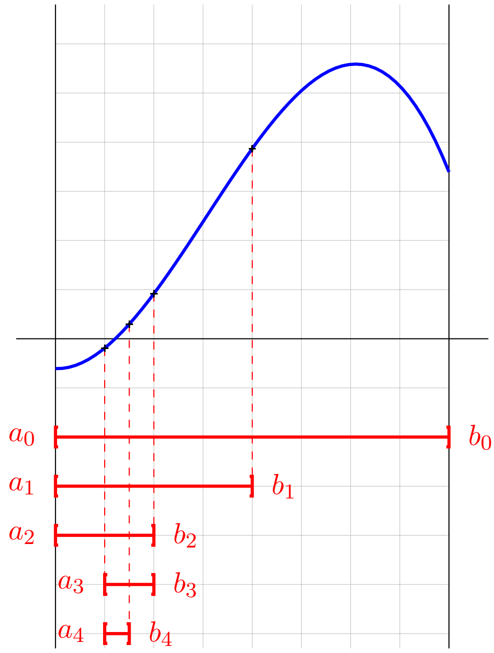
Supposons : $f(a)\ f(b) \leqslant 0$.

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Calcul des suites (a_m), (b_m), (c_m)

Cas $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$

- Initialement, $a_0 = a$, $b_0 = b$
- À chaque tour de boucle (tant que $b_m - a_m > \varepsilon$) :
  - × $c_m = \dfrac{a_m + b_m}{2}$ (point milieu de $[a_m, b_m]$)
  - × si $f(c_m) < 0$ alors :
    - ∗ $a_{m+1} = c_m$
    - ∗ $b_{m+1} = b_m$
  - × si $f(c_m) \geqslant 0$ alors :
    - ∗ $a_{m+1} = a_m$
    - ∗ $b_{m+1} = c_m$



- On construit ainsi une suite $\big([a_m, b_m]\big)_{m\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés :
  × contenant tous un zéro de f,
  × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche une valeur de x telle que : $P_n(x) = 0$.
  D'après ***3.a)***, on se fixe initialement l'intervalle de recherche $[1, 2n+1]$ de sorte que l'équation $P_n(x) = 0$ ne possède qu'une solution, à savoir la valeur u_n qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables `a` et `b` destinées à contenir les valeurs successives de a_m et b_m. Ces variables sont initialisées respectivement à 1 et $2n + 1$.

```
a = 1
b = 2 * n + 1
```

On définit le point milieu du segment de recherche.

```
    c = (a+b) / 2
```

On procède ensuite de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision 10^{-3} escomptée.

```
while (b-a) > 10 ^ (-3)
```

Puis on teste si $P_n(\texttt{c}) > 0$.
Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de droite (car la fonction P_n est décroissante sur $\mathbb{R}$).

```
    if P(n, c) > 0 then
        a = c
```

Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de gauche.

```
    else
      b = c
    end
```

On met ensuite à jour la variable `c` pour qu'elle contienne le point du nouveau segment de recherche (après mise à jour de `a` et `b`).

```
    c = (a+b) / 2
```

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que 10^{-3} et contient un zéro de P_n. Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à 10^{-3} près de ce zéro.
On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

```
  u = a
```

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

```
  u = b
```

Ou encore le point milieu :

```
  u = (a + b) / 2
```

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus $\dfrac{10^{-3}}{2}$ de ce point milieu.
On obtient ainsi une valeur approchée à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ du zéro recherché.

Commentaire

On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :

× l'intervalle de recherche initial $[1, 2n+1]$ est de largeur $2n+1$.

× la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.
À la fin du $m^{\text{ème}}$ tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur $\dfrac{2n+1}{2^m}$.

× l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que 10^{-3}.

On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\begin{aligned}
\frac{2n+1}{2^m} \leqslant 10^{-3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2^m}{2n+1} \geqslant 10^3 && \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad 2^m \geqslant (2n+1)\, 10^{-3} && \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(2^m\right) \geqslant \ln\left((2n+1)\, 10^3\right) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad m \ \ln(2) \geqslant \ln(2n+1) + 3 \ \ln(10) && \\
&\Leftrightarrow \quad m \geqslant \frac{\ln(2n+1) + 3 \ \ln(10)}{\ln(2)} && \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

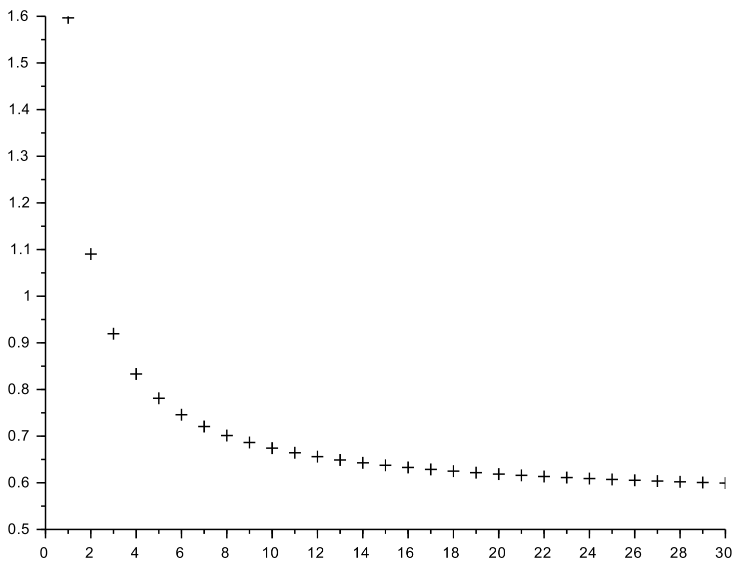
Ainsi : $\left\lceil \dfrac{\ln(2n+1) + 3 \ \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ tours de boucle suffisent.

- On obtient le programme complet suivant.

```
function u = suite(n)
    a = 1
    b = 2 ⋆ n + 1
    c = (a+b)/2
    while (b-a) > 10 ^ (-3)
        if P(n, c) > 0 then
            a = c
        else
            b = c
        end
        c = (a+b) / 2
    end
    u = (a+b) / 2
endfunction
```

☐

c) On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Démonstration.
Il semble d'après la figure fournie par l'énoncé : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} \approx 0,6 \neq 0$.

$$\boxed{\text{On conjecture alors : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0,6\,n. \text{ On en déduirait : } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

☐

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} P_{n+1}(u_n) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_n^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{u_n}{2k+1}\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_n^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{u_n}{2k+1}\right) + \frac{u_n^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \left(1 - \frac{u_n}{2(n+1)+1}\right) & \\ & = & P_n(u_n) + \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right) & \\ & = & 0 + \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right) & \textit{(car } u_n \textit{ est racine de } P_n \textit{ d'après } \textbf{\textit{4.b)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)}$$

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de u_{n+1} : $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.
- D'après la question précédente :

$$P_{n+1}(u_n) \ = \ \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)$$

× Tout d'abord : $\dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant 0$.

× De plus, d'après ***3.b)*** : $u_n \in [1, 2n+1]$. Ainsi :

$$\begin{array}{lcccccl} & 1 & \leqslant & u_n & \leqslant & 2n+1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{2n+3} & \leqslant & \dfrac{u_n}{2n+3} & \leqslant & \dfrac{2n+1}{2n+3} & \textit{(car : } 2n+3 > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - \dfrac{1}{2n+3} & \geqslant & 1 - \dfrac{u_n}{2n+3} & \geqslant & 1 - \dfrac{2n+1}{2n+3} & \end{array}$$

Or : $1 - \dfrac{2n+1}{2n+3} = \dfrac{\cancel{2n} + 3 - (\cancel{2n} + 1)}{2n+3} = \dfrac{2}{2n+3} \geqslant 0$.

Ainsi, par transitivité :

$$1 - \frac{u_n}{2n+3} \ \geqslant \ 1 - \frac{2n+1}{2n+3} \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } P_{n+1}(u_n) \geqslant 0.}$$

- On obtient alors :
$$P_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \ \leqslant \ P_{n+1}(u_n)$$
Or, d'après la question ***4.b)***, la fonction P_{n+1} réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $P_{n+1}^{-1} :]-\infty, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$ est strictement décroissante sur $]-\infty, +\infty[$. En appliquant P_{n+1}^{-1}, on obtient alors :
$$\begin{array}{ccc} P_{n+1}^{-1}\big(P_{n+1}(u_{n+1})\big) & \geqslant & P_{n+1}^{-1}\big(P_{n+1}(u_n)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ u_{n+1} & & u_n \end{array}$$
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

Commentaire

- Cette question ***6.b)*** consiste en l'étude de la suite (u_n). On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P_n(x) = 0$

  On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction P_n.
- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \ P_m(u_m) = 0}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (u_n).
  C'est de cette propriété dont on se sert ici (en $m = n+1$) pour démontrer la monotonie de la suite (u_n). Comme la suite (u_n) est définie de manière implicite, cette étude ne se réalise pas directement en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :
$$P_{n+1}(u_{n+1}) \ \leqslant \ P_{n+1}(u_n)$$
  et de conclure : $u_n \ \leqslant \ u_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de P_{n+1}.

□

7. On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.
On admet dans la suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in [u_n, \ell]$, $|P_n'(x)| \leqslant e^\ell$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^\ell \ |u_n - \ell|$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait :
× P_n est dérivable sur $[u_n, \ell]$,
× $\forall x \in [u_n, \ell]$, $|P_n'(x)| \leqslant e^\ell$ (d'après l'énoncé).
On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :
$$\forall (x, y) \in [u_n, \ell]^2, \quad |P_n(y) - P_n(x)| \ \leqslant \ e^\ell \, |y - x|$$
En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [u_n, \ell]$ et $x = \ell \in [u_n, \ell]$, on obtient :
$$|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \ \leqslant \ e^\ell \ |u_n - \ell|$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^\ell \ |u_n - \ell|}$$

Commentaire

- L'énoncé parle du segment $[u_n, \ell]$. Il sous-entend donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
  Cette propriété classique se démontre par l'absude.
- Démontrons par l'absurde : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
  Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{n_0} > \ell$.
  × La suite (u_n) étant croissante d'après ***6.b)***, on a, par récurrence immédiate :
  $$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$$
  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$
  × En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.

  Absurde ! □

b) En revenant à la définition de P_n, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell)$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = \mathrm{e}^{-\ell}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de P_n :
$$P_n(\ell) \ = \ \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\ell)^k}{k!}$$
On reconnaît la somme partielle d'ordre $2n+1$ de la série exponentielle de paramètre $-\ell$. Elle est donc convergente. Ainsi la suite $\big(P_n(\ell)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
$$\boxed{\text{On a de plus : } \lim_{n\to+\infty} P_n(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\ell}.}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :
$$|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{\ell}\ |u_n - \ell|$$
$$\text{donc} \qquad -\mathrm{e}^{\ell}\ |u_n - \ell| \ \leqslant \ P_n(u_n) - P_n(\ell) \ \leqslant \ \mathrm{e}^{\ell}\ |u_n - \ell|$$
$$\text{d'où} \qquad P_n(\ell) - \mathrm{e}^{\ell}\ |u_n - \ell| \ \leqslant \ P_n(u_n) \ \leqslant \ P_n(\ell) + \mathrm{e}^{\ell}\ |u_n - \ell|$$
Or :
× d'après ce qui précède : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell) = \mathrm{e}^{-\ell}$,
× comme (u_n) converge vers ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.
On en déduit :
× $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell) - \mathrm{e}^{\ell}\ |u_n - \ell| = \mathrm{e}^{-\ell}$
× $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell) + \mathrm{e}^{\ell}\ |u_n - \ell| = \mathrm{e}^{-\ell}$
$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} P_n(u_n) = \mathrm{e}^{-\ell}.}$$
□

c) Aboutir à une contradiction.

Démonstration.

- D'une part, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = \mathrm{e}^{-\ell}$.
- D'autre part, par définition de (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(u_n) = 0$.
  On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = 0$.

Or : $\mathrm{e}^{-\ell} > 0$. Absurde ! □

8. En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)***, la suite (u_n) est croissante. Deux cas se présentent alors :
  - × soit la suite (u_n) est de plus majorée. Alors elle converge vers un réel ℓ.
  - × soit la suite (u_n) est non majorée. Alors elle diverge vers $+\infty$.
- Démontrons par l'absurde que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
  Supposons que la suite (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$.
  D'après la disjonction de cas précédente, on en déduit que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
  Alors, d'après la question ***7.***, on aboutit à une contradiction !

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

□

PARTIE B : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9. On note f la fonction définie sur $]0,1]$ par : $\forall t \in]0,1], \ f(t) = -\ln(t)$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ converge et préciser sa valeur.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est donc impropre en 0.
- Soit $A \in]0,1]$.

$$\begin{aligned} \int_A^1 f(t)\, dt &= \int_A^1 -\ln(t)\, dt \\ &= -\left[\, t\ln(t) - t\,\right]_A^1 \\ &= -\left(\cancel{1\ln(1)} - 1 - (A\ln(A) - A)\right) \\ &= 1 - A\ln(A) + A \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{A\to 0} A\ln(A) = 0$ par croissances comparées.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale impropre } \int_0^1 f(t)\, dt \text{ converge et } \int_0^1 f(t)\, dt = 1.}$$

Commentaire

- On utilise, dans cette question, un résultat classique : la fonction $t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de la fonction ln.
  Ce résultat n'est pas officiellement au programme mais son utilisation directe ne serait certainement pas sanctionnée. Pour autant, il est important de savoir le démontrer rapidement par intégration par parties : cela pourrait être explicitement demandé.

Commentaire

- Retrouvons donc la valeur de $\displaystyle\int_A^1 \ln(t)\ dt$ grâce à une intégration par parties (IPP) :

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, 1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^1 \ln(t)\ dt &= [\ t \ln(t)\ ]_A^1 - \int_A^1 \frac{1}{t}\ t\ dt \\ &= -A\ln(A) - [\ t\ ]_A^1 \ = \ -A\ln(A) - 1 + A \end{aligned}$$

$\square$

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Justifier, pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$: $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ dt \leqslant \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

En déduire : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\ dt + \frac{\ln(n)}{n}$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Soit $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Alors :

$$\begin{array}{lcccccl} & \dfrac{k}{n} & \leqslant & t & \leqslant & \dfrac{k+1}{n} & \\ \text{donc} & f\left(\dfrac{k}{n}\right) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) & \textit{(par décroissance de la fonction } f \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($\frac{k}{n} \leqslant \frac{k+1}{n}$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt & \geqslant & \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ f\left(\dfrac{k}{n}\right)\left(\dfrac{k+1}{n} - \dfrac{k}{n}\right) & & & & f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\left(\dfrac{k+1}{n} - \dfrac{k}{n}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \frac{1}{n}\ f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{n}\ f\left(\frac{k}{n}\right).}$$

- On somme les encadrements précédents pour k variant de 1 à $n-1$ ($n \geqslant 2$).

$$\begin{array}{lccccl} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\ f\left(\frac{k+1}{n}\right) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\ f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \text{donc} & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) & \leqslant & \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{(n-1)+1}{n}} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \textit{(par relation de Chasles)} \\ \text{d'où} & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) & \leqslant & \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \textit{(par décalage d'indice)} \end{array}$$

On obtient alors :

× d'une part, avec l'inégalité de gauche :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) && \textit{(par définition de } f\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \ln(n)\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{\ln(n)}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt + \frac{\ln(n)}{n}.}$$

× d'autre part, avec l'inégalité de droite :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{n}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{n}\right)\right) && \textit{(par définition de } f\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \cancel{\ln(1)}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).}$$

□

c) En déduire la limite de $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \ \leqslant\ \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\ dt + \frac{\ln(n)}{n}$$

- Or :

  × d'après la question ***9.a)*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\ dt = \int_{0}^{1} f(t)\ dt = 1$,

  × par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\ dt + \frac{\ln(n)}{n} = 1+0$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = 1$.

- Enfin, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \ =\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right) \ =\ -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) = -1.}$$

□

d) Montrer finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \ =\ \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right) \ =\ \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} k}{\prod\limits_{k=1}^{n} n}\right) \ =\ \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \ =\ \ln\left(\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \ =\ \ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$$

- Ainsi, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right) = -1$.

  Par continuité de la fonction exp en -1, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)\right) \ =\ \exp(-1)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1}.}$$

□

10. On note g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall t \in\,]0,+\infty[,\ g(t) = t + \ln(t) + 1$.

Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$\mathrm{e}^{-2} < \alpha < \mathrm{e}^{-1}$$

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $t \in\,]0,+\infty[$.

$$g'(t) \ = \ 1 + \frac{1}{t} \ > \ 0$$

On obtient le tableau de variations suivant :

t	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(t)$	$+$
Variations de g	$-\infty \nearrow +\infty$

- La fonction g est donc :
  - × continue (car dérivable) sur $]0,+\infty[$,
  - × strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

  Ainsi, g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(\,]0,+\infty[\,)$ où :

$$g(\,]0,+\infty[\,) \ = \,]\lim_{t\to 0} g(t), \lim_{t\to+\infty} g(t)[\,=\,]-\infty,+\infty[$$

  Or : $0 \in\,]-\infty,+\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe un unique } \alpha \in\,]0,+\infty[\text{ tel que : } g(\alpha) = 0.}$$

- On remarque :
  - × tout d'abord : $g(\mathrm{e}^{-2}) = \mathrm{e}^{-2} + \ln(\mathrm{e}^{-2}) + 1 = \mathrm{e}^{-2} - 2 + 1 = \mathrm{e}^{-2} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-2} - 1 < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 < 0 \qquad \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{aligned}$$

    La dernière inégalité est vraie. Ainsi, par équivalence la première aussi. D'où : $g(\mathrm{e}^{-2}) < 0$.
  - × ensuite, par définition de α : $g(\alpha) = 0$.
  - × enfin : $g(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1} + \ln(\mathrm{e}^{-1}) + 1 = \mathrm{e}^{-1} - 1 + 1 = \mathrm{e}^{-1} > 0$.

  On obtient alors :

$$g(\mathrm{e}^{-2}) \ < \ g(\alpha) \ < \ g(\mathrm{e}^{-1})$$

  D'après le théorème de la bijection, la fonction $g^{-1} :]-\infty,+\infty[\,\to\,]0,+\infty[$ est strictement croissante. En appliquant g^{-1} de part et d'autre de l'encadrement, on obtient :

$$\mathrm{e}^{-2} \ < \ \alpha \ < \ \mathrm{e}^{-1}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{-2} \ < \ \alpha \ < \ \mathrm{e}^{-1}}$$

□

11. On admet dans la suite le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n)! \leqslant (u_n)^{2n}\ \mathrm{e}^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n \mathrm{e}^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de w_n : $u_n = 2n\, w_n$. On en déduit avec le résultat admis :

$$\begin{array}{lccccl}
 & (2n)! & \leqslant & (2n\, w_n)^{2n}\ \mathrm{e}^{2n\, w_n} & \leqslant & \dfrac{(2n+3)!}{2} \\[2ex]
\text{donc} & (2n)! & \leqslant & (2n)^{2n}\ (w_n \mathrm{e}^{w_n})^{2n} & \leqslant & \dfrac{(2n+3)!}{2} \\[2ex]
\text{d'où} & \dfrac{(2n)!}{(2n)^{2n}} & \leqslant & (w_n\, \mathrm{e}^{w_n})^{2n} & \leqslant & \dfrac{(2n+3)!}{2} \times \dfrac{1}{(2n)^{2n}} \qquad \textit{(car : } (2n)^{2n} > 0\textit{)} \\[2ex]
\text{ainsi} & \left(\dfrac{(2n)!}{(2n)^{2n}}\right)^{\frac{1}{2n}} & \leqslant & w_n\, \mathrm{e}^{w_n} & \leqslant & \left(\dfrac{(2n+3)!}{2} \times \dfrac{1}{(2n)^{2n}}\right)^{\frac{1}{2n}} \qquad \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^{\frac{1}{2n}} \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{)} \\[2ex]
\text{puis} & \dfrac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} & \leqslant & w_n\, \mathrm{e}^{w_n} & \leqslant & \left(\dfrac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \times \dfrac{1}{2n}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient déjà : } \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n\, \mathrm{e}^{w_n}.}$$

- Il reste à démontrer : $\left(\dfrac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \times \dfrac{1}{2n} \leqslant \left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \dfrac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$. Or :

$$\begin{array}{lccl}
 & \left(\dfrac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \times \dfrac{1}{2n} & \leqslant & \left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \dfrac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \\[2ex]
\Leftrightarrow & \left(\dfrac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} & \leqslant & \left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}} \qquad \textit{(car : } 2n > 0\textit{)} \\[2ex]
\Leftrightarrow & \dfrac{(2n+3)!}{2} & \leqslant & \dfrac{(2n+3)^3}{2}\ (2n)! \qquad \textit{(par stricte croissance de } x \mapsto x^{2n} \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{)} \\[2ex]
\Leftrightarrow & (2n+3)! & \leqslant & (2n+3)^3\ (2n)! \\[1ex]
\Leftrightarrow & (2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)! & \leqslant & (2n+3)^3\,(2n)! \\[1ex]
\Leftrightarrow & (2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1) & \leqslant & (2n+3)^3 \qquad \textit{(car } (2n)! > 0\textit{)}
\end{array}$$

Or :

$$0 \leqslant 2n+1 \leqslant 2n+3 \qquad 0 \leqslant 2n+2 \leqslant 2n+3 \qquad 0 \leqslant 2n+3 \leqslant 2n+3$$

D'où :

$$(2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1) \ \leqslant \ (2n+3)^3$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée, par équivalence :

$$\left(\frac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \times \frac{1}{2n} \ \leqslant \ \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

On en déduit, par transitivité :

$$w_n\,\mathrm{e}^{w_n} \ \leqslant \ \left(\frac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \times \frac{1}{2n} \ \leqslant \ \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } w_n\,\mathrm{e}^{w_n} \ \leqslant \ \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.}$$

□

b) En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question ***10***.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g(w_n) \ = \ w_n + \ln(w_n) + 1$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \ \leqslant \ w_n\,\mathrm{e}^{w_n} \ \leqslant \ \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

donc $\ln\left(\dfrac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) \ \leqslant \ \ln(w_n\,\mathrm{e}^{w_n}) \ \leqslant \ \ln\left(\left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \dfrac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right)$ *(par croissance de* $\ln$ *sur* $]0,+\infty[$*)*

d'où $\ln\left(\dfrac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) \ \leqslant \ \ln(w_n) + w_n \ \leqslant \ \ln\left(\left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \dfrac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right)$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \ln\left(\frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) \ \leqslant \ g(w_n) - 1 \ \leqslant \ \ln\left(\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right).}$$

- D'après la question ***9.d)*** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1}$.

  Autrement dit, en notant (v_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

  on a démontré : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}^{-1}$.

  Comme (v_{2n}) est une sous-suite de (v_n), on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \mathrm{e}^{-1}$.

  Autrement dit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} = \mathrm{e}^{-1}$.

$$\boxed{\text{Par continuité de } \ln \text{ en } \mathrm{e}^{-1}\text{, on obtient : } \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-1}) = -1.}$$

- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln\left(\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) \ = \ \frac{1}{2n} \ \ln\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right) + \ln\left(\frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right)$$

Or :

$$\frac{1}{2n} \ \ln\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right) \ = \ \frac{3 \ \ln(2n+3)}{2n} - \frac{\ln(2)}{2n}$$

De plus, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3 \ \ln(2n+3)}{2n} = 0$. Par ailleurs : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{2n} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} \ \ln\left(\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) = -1.}$$

- Par théorème d'encadrement, on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(w_n) - 1 = -1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} g(w_n) = 0.}$$

- Par continuité de la fonction g^{-1} en $0 \in]-\infty, +\infty[$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} g^{-1}\big(g(w_n)\big) & = & g^{-1}(0) \\[2ex] \displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n & & \alpha \end{array}$$

En effet, par définition de α : $g(\alpha) = 0$. D'où : $\alpha = g^{-1}(0)$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \alpha}$$

□

12. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \alpha$.
Or, d'après la question ***10.*** : $\alpha > \mathrm{e}^{-2}$. En particulier : $\alpha \neq 0$. D'où :

$$\begin{array}{rccc} & w_n & \underset{n\to+\infty}{\sim} & \alpha \\[2ex] \text{donc} & \dfrac{u_n}{2n} & \underset{n\to+\infty}{\sim} & \alpha \\[2ex] \text{d'où} & u_n & \underset{n\to+\infty}{\sim} & \alpha \, 2 \, n \end{array}$$

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\alpha \, n}$$

□