
DS2 (version A)

I. Exercice 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note \mathcal{S}_2 l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA , AGA , AHA .

2. Montrer que \mathcal{S}_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de \mathcal{S}_2 .
Déterminer la dimension de \mathcal{S}_2 .

3. a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, ASA \in \mathcal{S}_2$.

b) Déterminer le rang de la famille (AFA, AGA, AHA) .

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

On note de plus :

$$E_{-4} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = -4X\}$$

$$E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = X\}$$

$$E_{16} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 16X\}$$

4. a) Démontrer : $E_{-4} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$.

b) En déduire une base et la dimension de E_{-4} .

5. En procédant comme en question 4., déterminer de même une base et la dimension de E_1 .

6. On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

7. Montrer : $M = PDP^{-1}$.

8. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

9. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

II. Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2 .
2.
 - a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
 - b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
 - c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.
 - d) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.
3.
 - a) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.
 - b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$.
4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
 - a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
 - b) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , on a : $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
 - c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a) : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.
 - d) Déduire de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
 - e) Justifier que, pour tout réel x , on a : $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
5. Écrire en **Scilab** une fonction **SuiteU** prenant en paramètre un entier n et calculant en sortie le terme u_n .
6.
 - a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{e^2}{2^n}$.
Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$.
 - b) Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près (on pourra utiliser la fonction **SuiteU**).

III. Exercice 3

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (le roi de carreau et le roi de cœur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole

Les $2n$ cartes du jeu sont alignées, face cachée, sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n - 1\}, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$.

2. a) Démontrer : $\forall m \geq 1, \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

b) Démontrer : $\mathbb{E}(X) = \frac{2n+1}{3}$.

3. Les $2n$ cartes étant alignées face cachée devant le joueur, on considère le jeu d'argent régi par les règles suivantes :

- les cartes sont découvertes de gauche à droite,
- chaque découverte de carte coûte un euro,
- le jeu s'arrête lorsque le premier roi rouge est découvert.

La partie est alors considérée comme gagnée et on verse a euros au joueur.

(la découverte de cette carte, comme les précédentes, coûte 1 euro au joueur)

On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte, G_1 prend la valeur $a - k$.

a) Exprimer G_1 en fonction de a et X .

b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

Partie II : Deuxième protocole

On reprend le protocole précédent en ajoutant la règle suivante :

- le joueur découvre au maximum n cartes.

Ainsi, contrairement au protocole précédente, la victoire du joueur n'est plus assurée. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Par exemple, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 prend la valeur $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 prend la valeur $-n$.

4. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $\mathbb{P}([G_2 = a - k])$.

5. Vérifier : $\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.

6. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}$.

Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).

7. Déterminer, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

IV. Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O .

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n + 1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de \mathbb{N} , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de \mathbb{N} X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout k de \mathbb{N}^* , exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i .

b) Donner la loi de X_1 .

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de \mathbb{N}^* , puis reconnaître la loi de T .

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , utiliser le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

3. a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p \mathbb{P}([X_n = k - 1])$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}, \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1 - p)$.
 En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.

Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

c) Vérifier que $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$.

On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
2  X = 0
3  for k = 1:n
4      u = grand(1,1,'uin',0,2)
5      if u == 2 then
6          X = .....
7      else
8          X = .....
9      end
10 end
11 disp(X)
    
```

5. a) Montrer : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6. a) Montrer, en utilisant la question 3a) : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$.

b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \mathbb{E}(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de p et n .

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$.

7. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{3}$.

En s'inspirant du programme de la question 4., écrire en **Scilab** une fonction **TrajectoireX** prenant en paramètre un entier n et calculant en sortie un vecteur T contenant les n premières abscisses du mobile.