DS2

Exercice 1 /31

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.

- **3 pts :** $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

- **1 pt : résolution** $\{b = c$ **(ou 1 pt pour démonstration complète de sev)**
- **1 pt :** $\mathcal{S}_2 = \mathrm{Vect}\,(F, G, H)$
- **1 pt : caractère générateur**
- **1 pt : caractère libre**
- **1 pt :** $\dim(\mathcal{S}_2) = 3$

3. a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2,\ ASA \in \mathcal{S}_2$.

- **2 pts : si la justification** A **et** S **sont symétriques donnée (1 pt si justification absente et 0 si** ${}^t(ASA) = {}^tA^tS^tA$**)**

b) Déterminer le rang de la famille (AFA, AGA, AHA).

- **3 pts : qq soit la méthode**
  - × **expression sur la base** (F, G, H) **(1 pour expression, 1 pour opérations sur le rang, 1 pour conclusion)**
  - × **la même mais directement avec les matrices** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$
  - × **liberté de la famille (2 pour la liberté et 1 pour conclusion)**

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

On note de plus :

$$\begin{aligned} E_{-4} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = -4X\} \\ E_1 &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = X\} \\ E_{16} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 16X\} \end{aligned}$$

4. ***a)*** Démontrer : $E_{-4} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.

- **1 pt : écriture système**
- **1 pt : résolution** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -z \\ 4y & = & -3z \end{array}\right.$
- **1 pt :** $E_{-4} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$

b) En déduire une base et la dimension de E_{-4}.

- **1 pt : caractère générateur et libre**
- **1 pt :** $\dim(E_{-4}) = 1$

5. En procédant comme en question *4.*, déterminer de même une base et la dimension de E_1.

- **1 pt : résolution** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 4z \\ y & = & -2z \end{array}\right.$
- **1 pt :** $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt : caractère générateur et libre**
- **1 pt :** $\dim(E_1) = 1$

6. On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

- **3 pts :** $P^{-1} = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

7. Montrer : $M = PDP^{-1}$.

- **1 pt :** $DP^{-1} = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -8 & -12 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 16 & 64 & 64 \end{pmatrix}$ **ou** $PD = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 16 \\ -12 & -2 & 32 \\ 16 & 1 & 64 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $PDP^{-1} = M$

8. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

- **1 pt**

9. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

- **1 pt :** $(D + 4I)(D - I)(D - 16I) = D^3 - 13D^2 - 52D + 64I$ **(car I et D commutent !)**
- **1 pt : puissances de M en fonction de D**
- **1 pt : multiplication matricielle**

Exercice 2 /45

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

- **3 pts : $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_2 = \frac{15}{4}$**
  0 si donnés sous forme non simplifiée

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

- **1 pt :** $u_n = 2 \times \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{2^k}\right)$
- **1 pt :** $\forall k \in [\![1,n]\!]$**,** $1+\frac{1}{2^k} \geqslant 1$

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

- **1 pt :** $u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n$
- **1 pt :** $u_n > 0$
- **1 pt :** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ **et donc** $u_{n+1} \geqslant u_n$

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

- **1 pt :** $\ln$ **concave sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt : équation de tangente** $y = x-1$
- **1 pt : application à** $x = 1+t \in]0,+\infty[$

d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

- **1 pt :** $\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$
- **1 pt :** $\frac{1}{2^k} \in]-1,+\infty[$**, on peut donc appliquer la qst précédente**
- **1 pt :** $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$
- **1 pt :** $1-\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 2$

3. a) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $\left[2, e^2\right]$.

- **1 pt : majoration de (u_n) par e^2**
- **1 pt : théorème de convergence monotone**
- **1 pt : encadrement de ℓ**

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.

- **1 pt : structure de raisonnement par l'absurde**
  0 si négation fausse
- **1 pt : par récurrence immédiate** $\forall n \geqslant n_0$**,** $u_n \geqslant u_{n_0}$
- **1 pt : passage à la limite :** $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$.

- **1 pt : continuité de** $\ln$ **en** $\ell \in [2, \mathbf{e}^2] \subset \,]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\ln(\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$.

- **1 pt**

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question ***3a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

- **1 pt : minoration**
- **2 pts : majoration**
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k}$
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2^n}$

d) Déduire de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

- **1 pt : croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$ **et décroissance de** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ **sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\ell > 0$

e) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

- **1 pt : inégalité** $1 - \mathbf{e}^{-x} \leqslant x$
- **1 pt : application inégalité de convexité à** $x = \dfrac{1}{2^n}$
- **3 pts : critère de comparaison des SATP**
  - × **encadrement**
  - × **convergence de la série géométrique de raison** $\dfrac{1}{2}$
  - × **citation du critère**

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme $u_{\mathtt{n}}$.

- **4 pts :**
  - × **1 pt : structure de fonction**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : boucle for**

6. a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{2^n}$.
Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

- **1 pt :** $\ell - u_n \leqslant \dfrac{\mathbf{e}^2}{2^n}$ **car** $\ell \leqslant \mathbf{e}^2$
- **1 pt : gestion valeur absolue**
- **1 pt : minoration de** N
- **1 pt : valeur de** $N = \left\lceil \dfrac{3\ \ln(10) + 2}{\ln(2)} \right\rceil$

b) Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près (*on pourra utiliser la fonction* `SuiteU`).

- **3 pts : 1 pt par ligne**

Exercice 3 /25

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (le roi de carreau et le roi de cœur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole

Les $2n$ cartes du jeu sont alignées, face cachée, sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n-1\}, \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2n-k}{n\,(2n-1)}$.

- **3 pts : peu importe la méthode**
  - × **dénombrement : 2 pts pour** $\text{Card}([X = k]) = (2n-2) \cdots (2n-k+1)\,(2n-k)\,2\,(2n-k)\ \dots\ 1$ **et 1 pt pour** $\text{Card}(\Omega) = (2n)!$
  - × **FPC : 1 pt pour** $[X = k] = \overline{R_1}\ \cap\ \dots\ \cap\ \overline{R_{k-1}}\ \cap\ R_k$**, 1 pt pour FPC,** **1 pt pour** $\mathbb{P}_{\overline{R_1}\ \cap\ \dots\ \cap\ \overline{R_{j-1}}}(\overline{R_j}) = \dfrac{2n-1-j}{2n+1-j}$ **et** $\mathbb{P}_{\overline{R_1}\cap\dots\cap\overline{R_{k-1}}}(R_k) = \dfrac{2}{2n+1-k}$

2. a) Démontrer : $\forall m \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \dfrac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

b) Démontrer : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

- **1 pt :** $X(\Omega) \subset [\![1, 2n-1]\!]$
- **1 pt :** X **est finie donc admet une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} k\mathbb{P}([X = k])$
- **2 pts : calcul (1 pt si une des deux formules des somme des** k **premiers entiers ou carrés est juste même si le calcul n'aboutit pas)**

3. Les $2n$ cartes étant aligées face cachée devant le joueur, on considère le jeu d'argent régi par les règles suivantes :

– les cartes sont découvertes de gauche à droite,

– chaque découverte de carte coûte un euro,

– le jeu s'arrête lorsque le premier roi rouge est découvert.
La partie est alors considérée comme gagnée et on verse a euros au joueur.
(la découverte de cette carte, comme les précédentes, coûte 1 euro au joueur)

On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte, G_1 prend la valeur $a - k$.

a) Exprimer G_1 en fonction de a et X.

- **1 pt :** $G_1 = a - X$
- **1 pt : explication convaincante**
  0 à la moindre confusion d'objet

b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire G_1.

- **1 pt : G_1 admet une espérance en tant que transformée affine de X**
- **1 pt : par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(G_1) = a - \dfrac{2n+1}{3}$**

Partie II : Deuxième protocole

On reprend le protocole précédent en ajoutant la règle suivante :

– le joueur découvre au maximum n cartes.

Ainsi, contrairement au protocole précédente, la victoire du joueur n'est plus assurée. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Par exemple, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 prend la valeur $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 prend la valeur $-n$.

4. Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer $\mathbb{P}\left([G_2 = a - k]\right)$.

- **1 pt : $[G_2 = a - k] = [X = k]$**
  0 à la moindre confusion d'objet
- **1 pt : conclusion $\mathbb{P}\big(\,[G_2 = a - k]\,\big) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$**

5. Vérifier : $\mathbb{P}\left([G_2 = -n]\right) = \dfrac{n-1}{2\,(2n-1)}$.

- **1 pt : $G_2(\Omega) \subset \{a - k \mid k \in [\![1, n]\!]\} \cup \{-n\}$**
- **1 pt : $\big(\,[G_2 = a-1]\,, [G_2 = a-2]\,, \ldots, [G_2 = a-n]\,, [G_2 = -n]\,\big)$ forme un SCE**
- **2 pts : calcul**

6. Montrer : $\mathbb{E}\left(G_2\right) = \dfrac{3\,(3n-1)\,a - \left(7n^2 - 1\right)}{6\,(2n-1)}$.

- **1 pt : G_2 est finie donc admet une espérance**
- **3 pts : calcul**

Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).

7. Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

- **3 pts : protocole 1 plus favorable ssi $a > \dfrac{17}{3}$ (dont 1 pour l'application de $n = 16$)**

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

- **1 pt : explication claire de la CNS pour que $[T = k]$ soit réalisé**
- **2 pts : formule** $[T = k] = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \right) \cap [X_k = 0]$

b) Donner la loi de X_1.

- **1 pt :** $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p$ **et** $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$
- **1 pt :** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

- **1 pt : écriture correcte formule des probas composées**
- **1 pt : explication de l'existence des probas conditionnelles**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T = k]) = p \times \ldots \times p \times (1-p) = p^{k-1}\ (1-p)$
- **1 pt :** $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** $T \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

- **1 pt : initialisation :** $X_0(\Omega) = \{0\} = [\![0, 0]\!]$
- **2 pt : hérédité**

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

- **1 pt : la famille $\Big([X_{n-1} = k] \Big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est un système complet d'événements d'après la question précédente.**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = 0]) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0])$
- **1 pt :** $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$**,** $\mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$

3. *a)* Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\}\,,\ \mathbb{P}\left([X_{n+1} = k]\right) = p\ \mathbb{P}\left([X_n = k-1]\right)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[X_{n+1} = k]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]\,\big)$
- **1 pt : formule des probabilités composées et** $\mathbb{P}\big(\,[X_n = k-1]\,\big) \neq 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k]) = p$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\}\,,\ \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = p^k\,(1-p)\,.$
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}\left([X_n = n]\right)$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

- **1 pt : initialisation première récurrence**
- **2 pts : hérédité première récurrence**
- **0 pt : initialisation deuxième récurrence**
- **2 pts : hérédité deuxième récurrence**
- **1 pt : toute explication probabiliste raisonnable**

c) Vérifier : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1$.

- **2 pts : calcul**

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
X = 0
for k = 1:n
    u = grand(1,1,'uin',0,2)
    if u == 2 then
        X = ...........
    else
        X = ...........
    end
end
disp(X)
```

- **2 pts :** `X = X + 1`
- **1 pt :** `X = 0`
- **1 pt :** `(BONUS)` **explications raisonnables**

5. *a)* Montrer : $\forall n \geqslant 2,\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

b) En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

- **1 pt : X_n est finie donc X_n admet une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n = k])$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k \ \mathbb{P}([X_n = k])\right) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n])$
- **1 pt : reste du calcul**

6. a) Montrer, en utilisant la question *3a)* : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)$.

- **1 pt : les v.a.r. X_n et X_{n+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc des moments d'ordre 2.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k])$ **par définition**
- **1 pt : découpage de la somme (cas de l'indice 0 traité à part)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \mathbb{P}([X_n = k-1])$ **d'après la question *3.a)* (ici $k \geqslant 1$!)**
- **2 pt : fin du calcul**

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer : $u_{n+1} = p\ u_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$.

- **1 pt :** $u_{n+1} = p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right) + (2n+1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p}$
- **1 pt :** $p\ u_n = p\ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p}$
- **1 pt :** $u_{n+1} - pu_n = p\ \dfrac{1+p}{1-p}$

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

- **1 pt : (u_n) est une suite arithmético-géométrique**
- **1 pt : méthode connue**
- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{p}{(1-p)^2}(1+p-2p^n)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n^2) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right)$

d) Montrer enfin : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

- **1 pt : justification que X_n admet une variance.**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2$ **d'après la formule de Kœnig-Huygens.**
- **2 pt : fin du calcul**

7. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

En s'inspirant du programme de la question *4.*, écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie un vecteur `T` contenant les `n` premières abscisses du mobile.

- **1 pt : structure fonction correcte**
- **1 pt : initialisation `T = zeros(1,n)`**
- **2 pt : boucle for correcte pour remplir `T`**