DS2 (version B)

I. Exercice 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

On note u l'application qui, à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

3. ***a)*** Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2,\ u(S) \in \mathcal{S}_2$.

b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.

c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

4. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci, une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?

5. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $M = PDP^{-1}$.

6. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

7. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

8. Établir : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application indentité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la **Partie I**.

II. Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln(n)$ et $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

2. ***a)*** Démontrer : $a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)$.

c) En déduire que la suite (a_n) converge.

3. Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^\lambda}$.

a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont monotones.

b) En déduire que la suite (S_n) converge.

4. Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $w_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) - \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} w_k = \ln\left(\sqrt{n}\, u_n\right) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{2}\, a_n$.

b) On admet qu'il existe une fonction ε, définie au voisinage de 0, de limite nulle en 0 et telle que pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\ln(1+x) \ = \ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\, \varepsilon(x)$$

En déduire : $w_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}\, \dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.

c) En déduire que la série $\sum\ w_n$ converge.

d) En isolant la quantité $\ln(u_n \sqrt{n})$ dans l'égalité ***4.a)***, en déduire la nature de la suite (u_n).

5. Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $z_n = w_n - \dfrac{1}{2n}$.

Par ailleurs, pour tout réel $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \ln\left(v_n\right) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}$.

b) Démontrer : $z_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}\, \dfrac{1}{k^{2\lambda}}$.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la suite $\big(\ln(v_n)\big)$.
Quelle est la limite de cette suite lorsque cette condition n'est pas vérifiée ?

d) En déduire que la suite (v_n) converge.
Démontrer enfin que sa limite est nulle si et seulement si $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

III. Exercice 3

Soit $p \in \,]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune « pile » avec la probabilité p.
On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

- lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois ;
- aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné « pile » aux manches précédentes ;
- on s'arrête lorsque toutes les pièces ont donné « pile ».

Pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la $k^{\text{ème}}$ pièce.

On note Y le nombre de manches effectuées.

1. Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.

2. ***a)*** Démontrer : $Y = \max(X_1, \ldots, X_R)$.

b) En déduire la loi de Y.

3. ***a)*** Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big([Y=k]\big) = \mathbb{P}\big([Y>k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Y>k]\big)$$

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big)$.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

d) En déduire que Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y>k]\big)$$

4. Soit la fonction $f : [0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 1 - (1-q^x)^R$.
Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ et montrer :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

5. ***a)*** Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\ dx \leqslant f(k-1)$.

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{N+1} f(x)\ dx \leqslant \sum_{k=0}^{N} f(k) \leqslant \int_0^{N} f(x)\ dx + 1$.

c) Établir l'encadrement :

$$-\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \mathbb{E}(Y) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R} \frac{1}{k+1}$$

En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

On pourra admettre sans démonstration : $\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \underset{R\to+\infty}{\sim} \ln(R)$.

IV. Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.

b) Donner la loi de X_1.

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\,\mathbb{P}([X_n = k-1])$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\},\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

c) Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
X = 0
for k = 1:n
    u = grand(1,1,'uin',1,3)
    if u == 2 then
        X = ...........
    else
        X = ...........
    end
end
disp(X)
```

5. a) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

b) En déduire que $\mathbb{E}\,(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

6. a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}\,(X_n) + 1\right)$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}\,(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n\,(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

7. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

a) En s'inspirant du programme de la question *4.*, écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie un vecteur `T` contenant les `n` premières abscisses du mobile.

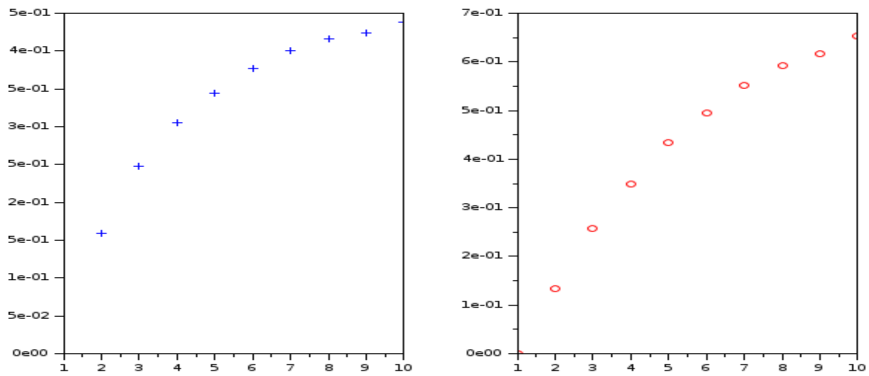
b) On considère le programme **Scilab** suivant :

```
n = input('Entrez un entier n : ')
N = 1000
T = zeros(N,n)
for i = 1:N
    T(i,:) = TrajectoireX(n)
end
E = zeros(1,n)
V = zeros(1,n)
for k = 1:n
    E(k) = mean(T(:,1:k))
    V(k) = variance(T(:,1:k))
end
subplot(1,2,1), plot(E,'+')
subplot(1,2,2), plot(V,'or')
```

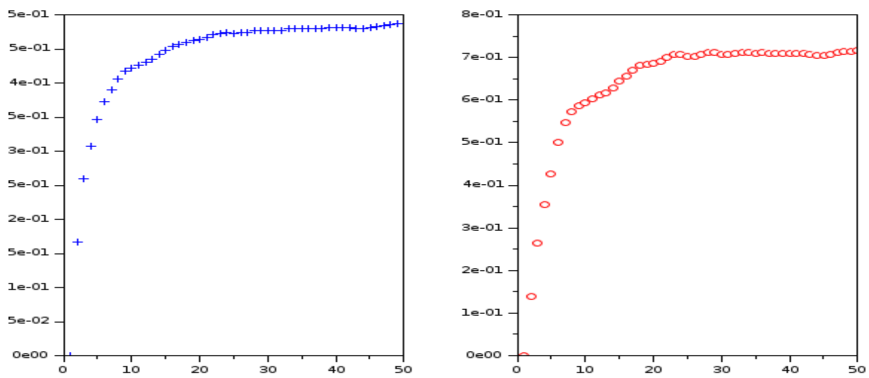
Que représentent les vecteurs `E` et `V` ?

c) Le programme précédent nous permet d'obtenir les graphiques suivants pour différentes valeurs de `n` :

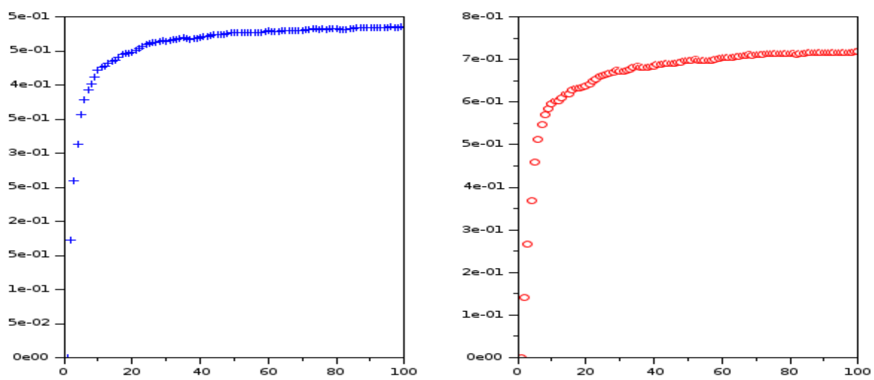
`n`= 10



`n`= 50



`n`= 100



Expliquer ces graphiques à l'aide des questions ***5.*** et ***6.***.