DS2 (version B)

I. Exercice 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} AFA &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} AGA &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} AHA &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}}$$

□

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S}_2 &\Leftrightarrow {}^tM = M \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& a \\ c &=& b \\ b &=& c \\ d &=& d \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c &=& b \end{array} \right. \end{aligned}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_2 & = & \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid c = b\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid (a,b,d) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,d) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \big\{a \cdot F + b \cdot G + d \cdot H \mid (a,b,d) \in \mathbb{R}^3\big\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(F, G, H) \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \text{ donc un espace vectoriel.}}$$

Commentaire

- Pour faciliter la compréhension, on a beaucoup détaillé l'obtention de $\mathcal{S}_2$. Cependant, on peut commencer la question en écrivant directement : $\mathcal{S}_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.
- Si la rédaction précédente est celle attendue, il arrive parfois qu'on ne puisse pas l'utiliser (dans certains cas, l'ensemble étudié ne s'écrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie). Il est donc important de savoir utiliser la méthode consistant à revenir à la définition de sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $\mathcal{S}_2 \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{S}_2 \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{S}_2$ est stable par combinaison linéaire.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in {\mathcal{S}_2}^2$.

× Comme $M_1 \in \mathcal{S}_2$, il existe $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$.

× Comme $M_2 \in \mathcal{S}_2$, il existe $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$.

Démontrons : $\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 \in \mathcal{S}_2$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 & = & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_1 b_1 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_1 c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 a_2 & \lambda_2 b_2 \\ \lambda_2 b_2 & \lambda_2 c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{S}_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

- Dans le point ***(iii)***, il s'agit de démontrer que la matrice $\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2$ est une matrice symétrique carrée (d'ordre 2). Pour ce faire, on peut aussi se servir des propriétés de l'application transposée. Plus précisément :

$$\begin{array}{rcll} {}^t\big(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2\big) & = & \lambda_1 \cdot {}^tM_1 + \lambda_2 \cdot {}^tM_2 & \textit{(par linéarité de l'application transposée)} \\ & = & \lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 & \textit{(car } M_1 \textit{ et } M_2 \textit{ sont symétriques)} \end{array}$$

Ainsi, on a bien : $\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2 \in \mathcal{S}_2$.

- La famille (F, G, H) est :
  - $\times$ génératrice de $\mathcal{S}_2$, d'après le point précédent,
  - $\times$ libre.
    Démontrons ce point. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
    Supposons : $\lambda_1 \cdot F + \lambda_2 \cdot G + \lambda_3 \cdot H = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \quad (*)$

$$\text{Or :} \qquad \begin{array}{rcl} (*) & \Leftrightarrow & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \{ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{array}$$

Donc la famille (F, G, H) est libre.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (F, G, H) \text{ est une base de } \mathcal{S}_2.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(\mathcal{S}_2) = \operatorname{Card}\big((F, G, H)\big) = 3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (F, G, H) est un ensemble qui contient 3 vecteurs (F, G, H sont des vecteurs car sont des éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$). Cette famille est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\operatorname{Card}\big((F, G, H)\big) = 3$).
- L'ensemble $\operatorname{Vect}(F, G, H)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (F, G, H). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (F, G, H) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de cet espace vectoriel de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\operatorname{Card}\big(\operatorname{Vect}(F, G, H)\big)}$ et $\cancel{\dim\big((F, G, H)\big)}$ n'ont aucun sens !

□

On note u l'application qui, à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

3. a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, \ u(S) \in \mathcal{S}_2$.

Démonstration.
Soit $S \in \mathcal{S}_2$.

$$\begin{array}{rcll} {}^t\big(u(S)\big) & = & {}^t(ASA) & \\ & = & {}^t\big((AS)A\big) & \\ & = & {}^tA \ {}^t(AS) & \\ & = & {}^tA \ {}^tS \ {}^tA & \\ & = & ASA & \quad (\textit{car } {}^tA = A \ \ \textit{et} \ \ {}^tS = S) \\ & = & u(S) & \end{array}$$

Donc $u(S) \in \mathcal{S}_2$.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_2, \ ASA \in \mathcal{S}_2}$$

Commentaire

- On applique ici la formule suivante :

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2, \ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$$

Il faut bien faire attention à l'ordre d'apparition des matrices dans cette formule :

$${}^t(AB) \cancel{=} {}^tA\,{}^tB$$

- En particulier, si A et B sont des matrices symétriques, on obtient :

$${}^t(AB) \ = \ {}^tB\,{}^tA \ = \ BA$$

Or, le produit de matrices n'est pas commutatif. Cela signifie qu'il existe des matrices A et B telles que : $AB \neq BA$. Par exemple les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, vérifient :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a exhibé un couple de matrices symétriques (A,B) dont le produit n'est pas une matrice symétrique (${}^t(AB) \neq BA$). On peut en conclure que $\mathcal{S}_2$ n'est pas stable par produit. □

b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.

Démonstration.

- Démontrons que u est linéaire
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_2)^2$.

$$\begin{array}{rcll}
u(\lambda_1 \cdot S_1 + \lambda_2 \cdot S_2) & = & A\ (\lambda_1 \cdot S_1 + \lambda_2 \cdot S_2)\ A & \\
& = & (\lambda_1 \cdot AS_1 + \lambda_2 \cdot AS_2)\ A & \textit{(par distributivité à gauche de la loi $\times$ sur la loi $+$)} \\
& = & \lambda_1 \cdot AS_1A + \lambda_2 \cdot AS_2A & \textit{(par distributivité à droite de la loi $\times$ sur la loi $+$)} \\
& = & \lambda_1 \cdot u(S_1) + \lambda_2 \cdot u(S_2) &
\end{array}$$

L'application f est donc linéaire.

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{S}_2$
  C'est le résultat de la question ***3.a)***.

$$\boxed{\text{L'application } u \text{ est bien un endomorphisme de } \mathcal{S}_2.}$$

□

c) Donner la matrice de u dans la base (F,G,H) de $\mathcal{S}_2$.

Démonstration.

- $u(F) = AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot F + 0 \cdot G + 4 \cdot H.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(F,G,H)}\big(u(F)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- $u(G) = AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot F + 4 \cdot G + 12 \cdot H.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(F,G,H)}\big(u(G)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- $u(H) = AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot F + 6 \cdot G + 9 \cdot H.$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(F,G,H)}\big(u(H)\big) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Mat}_{(F,G,H)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}.}$$

□

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

4. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci, une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{rg}\,(M - (-4\,I)) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 - 3\,L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

  La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car sa ligne L_3 est constituée uniquement de 0. On en déduit que $M - (-4)\,I$ n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Le réel } -4 \text{ est bien valeur propre de } M.}$$

- Ensuite :

$$\mathrm{rg}\,(M - I) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 4\,L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 4\,L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

  La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car sa ligne L_3 est constituée uniquement de 0. On en déduit que $M - I$ n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Le réel } 1 \text{ est bien valeur propre de } M.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}\,(M-16\,I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 4 & 12 & -7 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow 4\,L_3+L_1}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 48 & -24 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3+4\,L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

La matrice $\begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car sa ligne L_3 est constituée uniquement de 0.
On en déduit que $M-16\,I$ n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Le réel 16 est bien valeur propre de } M.}$$

- Déterminons $E_{-4}(M)$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-4}(M) & \iff & MX = -4X \\ & \iff & (M+4I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 8y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 13z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3-L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 8y & + & 6z & = & 0 \\ & & 12y & + & 9z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow 2L_3-3L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 8y & + & 6z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} 4x & = & -4z \\ 8y & = & -6z \end{array}\right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_{-4}(M) & = & \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x=-z \ \text{ et } \ y = -\frac{3}{4}z\right\} \\ & = & \left\{\begin{pmatrix} -z \\ -\frac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-4}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)}$$

- La famille $\mathcal{F}_{-4} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$ est :
  - × génératrice de $E_{-4}(M)$ d'après la question précédente,
  - × libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_{-4} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{-4}(M).}$$

- Déterminons $E_1(M)$.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(M) & \iff & MX = X \\
& \iff & (M - I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 3y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 8z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & & + & 4z & = & 0 \\ & y & + & 2z & = & 0 \\ & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & & + & 4z & = & 0 \\ & y & + & 2z & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4z \\ y & = & -2z \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(M) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 4z \text{ et } y = -2z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} 4z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_1(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

- Déterminons une base de E_1.

  La famille $\mathcal{F}_{-4} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

  × génératrice de E_1 d'après le point précédent,

  × libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_1.}$$

- Déterminons $E_{16}(M)$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{16}(M) & \Longleftrightarrow & MX = 16\,X \\
& \Longleftrightarrow & (M - 16\,I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 4 & 12 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -16\,x & & & + & 4z & = & 0 \\ & - & 12\,y & + & 6z & = & 0 \\ 4\,x & + & 12\,y & - & 7\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -16\,x & & & + & 4z & = & 0 \\ & - & 12\,y & + & 6z & = & 0 \\ & & 48\,y & - & 24\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 4\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -16\,x & & & + & 4z & = & 0 \\ & - & 12\,y & + & 6z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -16\,x & & & = & -4\,z \\ & & -12\,y & = & -6\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{16}(M) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{1}{4}\,z \text{ et } y = \frac{1}{2}\,z \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\,z \\ \frac{1}{2}\,z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \;=\; \{ z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \;=\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \;=\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_{16}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)}$$

- Déterminons une base de $E_{16}(M)$.

  La famille $\mathcal{F}_{16} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ est :

  × génératrice de $E_{16}(M)$ d'après le point précédent,

  × libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_{16} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{16}(M).}$$

- La matrice M est une matrice carrée d'ordre 3.
  Elle possède 3 valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ est diagonalisable.}}$$

□

5. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $M = PDP^{-1}$.

Démonstration.
D'après la question précédente, la matrice M est diagonalisable.
Il existe donc une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = P\,D\,P^{-1}$.
Plus précisément :

× la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de M,

× la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

Comme $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases respectives de $E_{-4}(M)$, $E_1(M)$ et $E_{16}(M)$:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On a bien trouvé } P \text{ inversible de première ligne } \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ tel que : } M = P\,D\,P^{-1}.}$$

□

6. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(D - I)\,(D - 16I) \;=\; \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$(D + 4I)\,(D - I)\,(D - 16I) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(D + 4I)(D - I)(D - 16I) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

7. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(D+4I)(D-I)(D-16I) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{array}{rcll} (D+4I)(D-I)(D-16I) & = & (D+4I)(D^2-17D+16I) & \textit{(car les matrices } D \textit{ et } I \textit{ commutent)} \\ & = & D^3 - 13D^2 - 52D + 64I & \end{array}$$

- On en déduire :

$$\begin{array}{rl} & D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & D^3 = 13D^2 + 52D - 64I \end{array}$$

- Or, d'après la question *7.* : $M = PDP^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{array}{rrcl} & M^2 & = & (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \ = \ PD(P^{-1}P)DP^{-1} \ = \ PD^2P^{-1} \\ \text{de même} & M^3 & = & M^2M \ = \ (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) \ = \ PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} \ = \ PD^3P^{-1} \end{array}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} M^3 & = & PD^3P^{-1} \\ & = & P(13D^2+52D-64I)P^{-1} \\ & = & 13PD^2P^{-1} + 52PDP^{-1} - 64PP^{-1} \\ & = & 13M^2 + 52M - 64I \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M^3 = 13\,M^2 + 52\,M + 64\,I.}$$

□

8. Établir : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application indentité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la **Partie I**.

Démonstration.
Notons $\mathscr{B} = (F, G, H)$.

- Remarquons tout d'abord, à l'aide de la question précédente :

$$\begin{array}{rrcll} & M^3 & = & 13\,M^2 + 52\,M + 64\,I & \\ \text{Ainsi} & \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)^3 & = & 13\,\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)^2 + 52\,\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big) + 64\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e) & \textit{(par définition de } M \textit{ et } I\textit{)} \\ & & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(13\,u^2 + 52\,u + 64\,e\big) & \textit{(par linéarité de l'application } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)\textit{)} \end{array}$$

Enfin, comme $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)^3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^3)$, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^3) \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(13\,u^2 + 52\,u + 64\,e\big)$$

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.) \text{ étant bijective, on en conclut : } u^3 = 13\,u^2 + 52\,u + 64\,e.}$$

Commentaire

- Il faut comprendre que l'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ établit un isomorphisme entre l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{S}_2$ et l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
  La base $\mathscr{B}$ étant fixée, cela signifie que tout endomorphisme de $\mathcal{S}_2$ possède une unique représentation matricielle dans $\mathscr{B}$ et qu'inversement toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle dans $\mathscr{B}$ d'un unique endomorphisme.
- Le passage du monde des endomorphismes vers le monde matriciel (application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$) est parfois appelé « passerelle endomorphisme-matrice ».
  Le passage du monde matriciel vers le monde des endomorphismes (la réciproque de $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$) est parfois appelé « passerelle matrice-endomorphisme ».
  On peut donc rédiger comme suit.

  On rappelle :
  $$M^3 \ = \ 13\,M^2 + 52\,M + 64\,I$$
  Comme M est la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$, on en déduit, par la passerelle matrice-endomorphisme :
  $$u^3 \ = \ 13\,u^2 + 52\,u + 64\,e$$

□

II. Exercice 2 (librement inspiré `oral ESCP 2018 - 1.17`)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln(n)$ et $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) = \left(1 + \frac{(-1)^{1-1}}{\sqrt{1}}\right) \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) = 2 \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$$

- Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{array}{lccccc} & -1 & \leqslant & (-1)^{k-1} & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & -\frac{1}{\sqrt{k}} & \leqslant & \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} & \leqslant & \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \textit{(car } \sqrt{k} > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - \frac{1}{\sqrt{k}} & \leqslant & 1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} & \leqslant & 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{rcll} 1 - \frac{1}{\sqrt{k}} > 0 & \Leftrightarrow & 1 > \frac{1}{\sqrt{k}} & \\ & \Leftrightarrow & 1 < \sqrt{k} & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1 < k & \textit{(par stricte croissance de } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \end{array}$$

La dernière inégalité est vraie (car $k \geqslant 2 > 1$). Ainsi, par équivalence, la première aussi. On en déduit, par transitivité :

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ 1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{k}} > 0$$

- On en conclut :

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) > 0$$

Ainsi :

$$\underbrace{2 \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)}_{= u_n} > 0$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0}$$

Commentaire

On pouvait aussi résoudre cette question grâce à une récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n > 0$.

- **Initialisation** :

$$u_1 \; = \; \prod_{k=1}^{1} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \; = \; \left(1 + \frac{(-1)^{1-1}}{\sqrt{1}}\right) \; = \; 2 \; > \; 0$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > 0$).

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)\right) \times \left(1 + \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{\sqrt{n+1}}\right) \\ &= u_n \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Or, avec la même démonstration que dans la preuve présentée plus haut : $1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} > 0$.
De plus, par hypothèse de récurrence : $u_n > 0$. On en déduit :

$$\underbrace{u_n \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)}_{= \, u_{n+1}} \; > \; 0$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

$\square$

2. ***a)*** Démontrer : $a_{n+1} - a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\,n^2}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - \big(H_n - \ln(n)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

- On rappelle le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$:
$$\ln(1+x) \ = \ x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$$
Ainsi, il existe une fonction ε définie au voisinage de 0, de limite nulle en 0, telle que, pour tout x au voisinage de 0 :
$$\ln(1+x) \ = \ x - \frac{x^2}{2} + x^2 \, \varepsilon(x)$$
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n+1} = 0$, on peut appliquer l'égalité précédente en $x = -\dfrac{1}{n+1}$.
On obtient :
$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ &= \ -\frac{1}{n+1} - \frac{\left(-\frac{1}{n+1}\right)^2}{2} + \left(-\frac{1}{n+1}\right)^2 \varepsilon\left(-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \ -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2\,(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\, \varepsilon\left(-\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$
Ainsi :
$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \ = \ -\frac{1}{2\,(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\, \varepsilon\left(-\frac{1}{n+1}\right)$$
Remarquons enfin que par théorème de composition des limites :
$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(-\frac{1}{n+1}\right) \ = \ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) \ = \ 0$$
On en conclut :
$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \ = \ -\frac{1}{2\,(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
D'où :
$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \ \underset{n\to+\infty}{\sim} \ -\frac{1}{2\,(n+1)^2}$$
$$\boxed{\text{Finalement : } a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,n^2}.}$$
□

b) En déduire la nature de la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)$.

Démonstration.
On sait :
× $a_n - a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n^2}$ (d'après la question précédente)
× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\,n^2} \geqslant 0$
× la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente. Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2\,n^2}$.
(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\dfrac{1}{2} \neq 0$*)*

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, } \sum\limits_{n\geqslant 1} (a_n - a_{n+1}) \text{ est convergente.} \\ \text{Il en est de même de } \sum\limits_{n\geqslant 1} (a_{n+1} - a_n). \end{array}}$$
□

c) En déduire que la suite (a_n) converge.

Démonstration.

- Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k & \\ & = & \sum\limits_{k=2}^{n} a_k - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \left(\cancel{\sum\limits_{k=2}^{n-1} a_k} + a_n \right) - \left(a_1 + \cancel{\sum\limits_{k=2}^{n-1} a_k} \right) & \\ & = & a_n - a_1 & \end{array}$$

D'où :

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

- Or, d'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (a_{n+1} - a_n)$ est convergente. Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \right)_{n \geqslant 2}$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (a_n) \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

Le lecteur plus à l'aise avec le télescopage pourra se permettre de ne pas détailler le décalage d'indice. On obtient la rédaction suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \qquad \textit{(par télescopage)}$$

□

3. Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^\lambda}$.

a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont monotones.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} S_{2(n+1)} - S_{2n} & = & S_{2n+2} - S_{2n} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{2n+2} \dfrac{(-1)^k}{k^\lambda} - \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k^\lambda} \\ & = & \left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k^\lambda}} + \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\lambda} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^\lambda} \right) - \cancel{\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k^\lambda}} \\ & = & \dfrac{1}{(2n+2)^\lambda} - \dfrac{1}{(2n+1)^\lambda} \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{rccll} & 2n+1 & < & 2n+2 & \\ \text{donc} & (2n+1)^\lambda & < & (2n+2)^\lambda & \textit{(par stricte croissance de } x \mapsto x^\lambda \textit{ sur }]0,+\infty[, \textit{ car } \lambda > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{(2n+1)^\lambda} & > & \dfrac{1}{(2n+2)^\lambda} & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Ainsi : $S_{2(n+1)} - S_{2n} < 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (S_{2n}) \text{ est (strictement) décroissante.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k^\lambda} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^\lambda} \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^\lambda}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^\lambda} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)^\lambda} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^\lambda}} \\ &= -\frac{1}{(2n+3)^\lambda} + \frac{1}{(2n+2)^\lambda} \end{aligned}$$

Or : $\dfrac{1}{(2n+2)^\lambda} > \dfrac{1}{(2n+3)^\lambda}$.

Ainsi : $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (S_{2n+1}) \text{ est (strictement) croissante.}}$$

□

b) En déduire que la suite (S_n) converge.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= S_{2n+1} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^\lambda} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^\lambda} \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^\lambda}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\lambda} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^\lambda}} \\ &= -\frac{1}{(2n+1)^\lambda} \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$. Donc, comme $\lambda > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)^\lambda = +\infty$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^\lambda} = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0.}$$

- On obtient :
  × la suite (S_{2n}) est décroissante,
  × la suite (S_{2n+1}) est croissante,
  × de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$

  On en déduit que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

  $\boxed{\text{Par théorème des suites adjacentes, } (S_{2n}) \text{ et } (S_{2n+1}) \text{ convergent vers une même limite } \ell.}$

- Soit I in intervalle ouvert contenant ℓ.
  × Comme $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
  × Comme $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indices impairs de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

  On en déduit que l'intevalle I contient tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (S_n) \text{ est convergente.}}$$

□

4. Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $w_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) - \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} w_k = \ln\left(\sqrt{n}\, u_n\right) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{2}\, a_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} w_k \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k}\right) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
= \ & \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\, H_n \\
= \ & \ln(u_n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\, \big(a_n + \ln(n)\big) && \textit{(par définition de } u_n \textit{ et } a_n\textit{)} \\
= \ & \ln(u_n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\, a_n + \ln(\sqrt{n})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} w_k = \ln\left(\sqrt{n}\, u_n\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\, a_n}$$

□

b) On admet qu'il existe une fonction ε, définie au voisinage de 0, de limite nulle en 0 et telle que pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$\ln(1+x) \ = \ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \ \varepsilon(x)$$

En déduire : $|w_k| \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3} \, \dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par définition de w_k :

$$w_k \ = \ \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k}$$

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} = 0$, on peut appliquer l'égalité précédente en $x = \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.
  On obtient :

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \ &= \ \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{\left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)^3}{3} + \left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)^3 \ \varepsilon\left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \\ &= \ \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2\,k} + \frac{(-1)^{3k-3}}{3\,k^{\frac{3}{2}}} + \frac{(-1)^{3k-3}}{k^{\frac{3}{2}}} \ \varepsilon\left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)\end{aligned}$$

  Ainsi :

$$\underbrace{\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2\,k}}_{= \, w_k} \ = \ \frac{(-1)^{3k-3}}{3\,k^{\frac{3}{2}}} + \frac{(-1)^{3k-3}}{k^{\frac{3}{2}}} \ \varepsilon\left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$$

  Remarquons enfin que par théorème de composition des limites :

$$\lim_{k\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \ = \ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) \ = \ 0$$

  On en conclut :

$$w_k \ = \ \frac{(-1)^{3k-3}}{3\,k^{\frac{3}{2}}} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{(-1)^{3k-3}}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

  D'où :

$$w_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{3k-3}}{3\,k^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } |w_k| \underset{k\to+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^{3k-3}}{3\,k^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{1}{3\,k^{\frac{3}{2}}}.}$$

□

c) En déduire que la série $\sum w_n$ converge.

Démonstration.
On sait :

× $|w_k| \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{3\, k^{\frac{3}{2}}}$ (d'après la question précédente)

× $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{3\, k^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$

× la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2}$ ($\dfrac{3}{2} > 1$). Elle est donc convergente. Il en est de même de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{3\, k^{\frac{3}{2}}}$.

(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\dfrac{1}{3} \neq 0$*)*

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum\limits_{k \geqslant 1} |w_k|$ est convergente. La série $\sum\limits_{k \geqslant 1} w_k$ est donc absolument convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k \geqslant 1} w_k \text{ est convergente.}}$$

□

d) En isolant la quantité $\ln(u_n \sqrt{n})$ dans l'égalité ***4.a)***, en déduire la nature de la suite (u_n).

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***4.a)*** :

$$\ln\left(\sqrt{n}\, u_n\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} w_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\, a_n$$

Or :

× la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k\right)$ converge d'après la question précédente,

× la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$ converge d'après ***3.*** appliquée à $\lambda = \dfrac{1}{2}$,

× la suite (a_n) converge d'après ***2.***

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } \Big(\ln\left(\sqrt{n}\, u_n\right)\Big) \text{ converge vers un réel } L.}$$

- On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\sqrt{n}\, u_n\right) = L$. Par continuité de la fonction exp en L, on obtient alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, u_n \;=\; \mathrm{e}^L$$

Or $\mathrm{e}^L \neq 0$. D'où : $\sqrt{n}\, u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^L$. On en déduit : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^L}{\sqrt{n}}$.

$$\boxed{\text{Comme } \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^L}{\sqrt{n}} = 0, \text{ on en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

□

5. Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $z_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\lambda}\right) - \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\lambda}$.

Par ailleurs, pour tout réel $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \ln(v_n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} z_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} \\
&= \ln(v_n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} \qquad \textit{(par définition de } v_n\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} z_k = \ln(v_n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}}$$

□

b) Démontrer : $z_k \underset{k \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2} \dfrac{1}{k^{2\lambda}}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par définition de z_k :

$$z_k = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}$$

- Comme en question ***2.a)***, il existe une fonction ε définie au voisinage de 0, de limite nulle en 0, telle que, pour tout x au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \ \varepsilon(x)$$

- Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} = 0$ (car $\lambda > 0$), on peut appliquer l'égalité précédente en $x = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}$.
On obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) &= \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} - \frac{\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)^2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} - \frac{1}{2\,k^{2\lambda}} + \frac{1}{k^{2\lambda}} \ \varepsilon\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\underbrace{\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)-\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}}_{= z_k} \;=\; -\frac{1}{2\,k^{2\lambda}}+\frac{1}{k^{2\lambda}}\,\varepsilon\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$$

Remarquons enfin que par théorème de composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) \;=\; \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) \;=\; 0$$

On en conclut :

$$z_k \;=\; -\frac{1}{2\,k^{2\lambda}}+\underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^{2\lambda}}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } z_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,k^{2\lambda}}.}$$

□

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la suite $\big(\ln(v_n)\big)$.
Quelle est la limite de cette suite lorsque cette condition n'est pas vérifiée ?

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après ***5.a)***, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\ln(v_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} z_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}$$

Or, on sait d'après la question ***3.*** que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$ est convergente. On cherche donc à connaître la nature de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right)$, autrement dit, de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} z_k$.

- On sait :
  × $-z_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,k^{2\lambda}}$ (d'après la question précédente)
  × $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\,k^{2\lambda}}\geqslant 0$
  × la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^{2\lambda}}$ est une série de Riemann d'exposant 2λ. Elle est donc convergente si et seulement si $2\lambda>1$. Il en est de même de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{1}{2\,k^{2\lambda}}$.
  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\frac{1}{2}\neq 0$*)*

  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}(-z_k)$ est convergente si et seulement si $2\lambda>1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k\geqslant 1} z_k \text{ est convergente si et seulement si } \lambda>\frac{1}{2}.}$$

- On obtient alors :
  × $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$ est convergente (d'après ***3.***),
  × $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right)$ est convergente si et seulement si $\lambda > \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } \big(\ln(v_n)\big) \text{ est convergente si et seulement si } \lambda > \frac{1}{2}.}$$

- Supposons maintenant : $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  D'après la question précédente : $z_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\,k^{2\lambda}}$. Or, deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang. On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k \geqslant N$, $z_k \leqslant 0$.
  Ainsi, la série $\sum\limits_{k\geqslant N} z_k$ est une série à termes négatifs. La suite de ses sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=N}^{n} z_k\right)_{n\geqslant N}$ est donc décroissante. Par théorème de la limite monotone, deux cas se présentent alors :
  × soit $\left(\sum\limits_{k=N}^{n} z_k\right)_{n\geqslant N}$ est convergente (si cette suite est minorée),
  × soit $\left(\sum\limits_{k=N}^{n} z_k\right)_{n\geqslant N}$ diverge vers $-\infty$ (si cette suite n'est pas minorée).

  Or on a démontré que, dans le cas $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} z_k$ est divergente. Il en est de même de la série $\sum\limits_{k\geqslant N} z_k$).
  (on ne change pas la nature d'une série en ôtant ou en ajoutant un nombre fini de termes)
  On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right)$ diverge vers $-\infty$.

$$\boxed{\text{Comme } \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) \text{ converge, on en conclut, dans le cas } \lambda \leqslant \frac{1}{2} : \lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty.}$$
□

d) En déduire que la suite (v_n) converge.
Démontrer enfin que sa limite est nulle si et seulement si $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

Démonstration.
D'après la question précédente, deux cas se présentent :

- si $\lambda > \dfrac{1}{2}$, alors la suite $\big(\ln(v_n)\big)$ converge vers un réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \ell$.
  Par continuité de la fonction exp en ℓ, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \;=\; \mathrm{e}^{\ell}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \lambda > \frac{1}{2}, \text{ la suite } (v_n) \text{ converge vers une limite } \mathrm{e}^{\ell} > 0.}$$

- si $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(v_n) = -\infty$.
  Par théorème de composition des limites :

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{n \to +\infty} \exp\big(\ln(v_n)\big) & = & \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) & = & 0 \\ \shortparallel & & & & \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n & & & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \lambda \leqslant \dfrac{1}{2}, \text{ la suite } (v_n) \text{ converge vers } 0.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement, dans tous les cas, la suite } (v_n) \text{ converge.} \\ \text{De plus, elle converge vers 0 si et seulement si } \lambda \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{array}}$$

$\square$

III. Exercice 3

Soit $p \in \,]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune « pile » avec la probabilité p.
On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

× lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois ;

× aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné « pile » aux manches précédentes ;

× on s'arrête lorsque toutes les pièces ont donné « pile ».

Pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la $k^{\text{ème}}$ pièce.

On note Y le nombre de manches effectuées.

1. Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, R]\!]$.

- Pour la $k^{\text{ème}}$ pièce, l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de pile) indépendantes et de même paramètre p (probabilité d'obtention de pile).
- La v.a.r. X_k est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience (nombre de lancers effectués avec la $k^{\text{ème}}$ pièce).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![1, R]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \forall k \in [\![1, R]\!] : \ \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{p} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X_k) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.}$$
□

2. a) Démontrer : $Y = \max(X_1, \dots, X_R)$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y donne le nombre de manches effectuées lors de l'expérience. Il y a au minimum une manche effectuée (chaque pièce doit être lancée au moins une fois pour amener « pile »).

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*.}$$

- Soit $\omega \in \Omega$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} Y(\omega) = n & \Leftrightarrow & \text{L'expérience s'est terminée en } n \text{ manches} \\ & \Leftrightarrow & \text{L'une (au moins) des pièces a été lancée } n \text{ fois et les autres ont été lancées au plus } n \text{ fois} \\ & \Leftrightarrow & \text{Le rang d'apparition du premier « pile » d'une pièce (au moins) est } n \text{ et les rangs d'apparition des autres « pile » sont inférieurs ou égaux à } n \\ & \Leftrightarrow & \text{Parmi toutes les pièces, le rang d'apparition maximal du premier « pile » est } n \\ & \Leftrightarrow & \max\big(X_1(\omega), \dots, X_R(\omega)\big) = n \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } Y = \max(X_1, \dots, X_R).}$$

Commentaire

- Cette égalité étant fournie par l'énoncé, l'absence de réponse à la question ***2.b)*** suivante démontre que le candidat ne sait pas déterminer la loi du maximum de v.a.r. indépendantes. Cette question est ajoutée ici pour éviter qu'un candidat puisse être bloqué par une mauvaise compréhension de la v.a.r. Y.
- Il est difficile de savoir quel niveau de précision est attendu pour un tel résultat. Si ce résultat n'était pas présent dans l'énoncé, l'écrire dans une copie, même sans démonstration, suffirait à démontrer la bonne compréhension des v.a.r. considérées.
- Il n'est pas obligatoire d'introduire d'élément $\omega \in \Omega$ pour résoudre cette question. Détaillons ici une autre rédaction possible. La v.a.r. Y prend pour valeur le nombre de manches effectuées lors de l'expérience. Ce nombre de manches correspond exactement au nombre de lancers de la pièce qui a été lancée le plus grand nombre de fois. Autrement dit, Y prend pour valeur le rang d'apparition de « pile » de la dernière pièce qui a donné « pile ». On en déduit, au vu des définitions des v.a.r. $X_1, \ldots, X_R$: $Y = \max(X_1, \ldots, X_R)$.

$\square$

b) En déduire la loi de Y.

Démonstration.

- On l'a vu en question précédente : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([Y \leqslant k] \big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{R} [X_i \leqslant k] \right) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{R} \mathbb{P}\big([X_i \leqslant k] \big) & \textit{(par indépendance des v.a.r. } X_1, \ldots, X_R\textit{)} \\
& = & \Big(\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant k] \big) \Big)^R & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_R \textit{ ont toutes même loi)} \\
& = & \big(1 - (1-p)^k \big)^R & \\
& = & \big(1 - q^k \big)^R & \textit{(*)}
\end{array}$$

Remarquons au passage que ce résultat est valable pour $k = 0$. En effet :

× $\mathbb{P}\big([Y \leqslant 0] \big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ car la v.a.r. Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

× $\big(1 - q^0 \big)^R = (1-1)^R = 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\big([Y \leqslant k] \big) = \big(1 - q^k \big)^R}$$

- Démontrons le dernier point $(*)$. Comme la v.a.r. X_1 est à valeurs entières positives, on a :

$$[X_1 \leqslant k] \ = \ \bigcup_{i=1}^{k} \ [X_1 = i]$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\,[X_1 \leqslant k]\,\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big(\,[X_1 = i]\,\big) & \textit{(car les événements de la famille } \big(\,[X_1 = i]\big)_{i \in \mathbb{N}^*}\big) \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & p \sum\limits_{i=1}^{k} q^{i-1} & \\
& = & p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^{i} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p\, \dfrac{q^0 - q^k}{1-q} & \\
& = & \cancel{p}\, \dfrac{1 - q^k}{\cancel{p}} &
\end{array}$$

- Pour déterminer la loi de Y, il reste encore à déterminer les valeurs de $\mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\begin{array}{rcll}
[Y \leqslant k] & = & [Y < k] \cup [Y = k] & \\
& = & [Y \leqslant k-1] \cup [Y = k] & \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs entières)}
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant k]\,\big) & = & \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant k-1] \cup [Y = k]\,\big) & \\
& = & \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant k-1]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big) & \textit{(car les événements } [Y \leqslant k-1] \textit{ et } [Y = k] \textit{ sont inconpatibles)}
\end{array}$$

Finalement :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big) & = & \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant k]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant k-1]\,\big) \\
& = & \big(1 - q^k\big)^R - \big(1 - q^{k-1}\big)^R
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \left\{\begin{array}{l} - \ Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ - \ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big) \ = \ \big(1 - q^k\big)^R - \big(1 - q^{k-1}\big)^R \end{array}\right.}$$

Commentaire

- Dans cette question, on détermine la loi du minimum de v.a.r. indépendantes à valeurs entières. C'est une question qui apparaît de manière régulière aux concours. Les techniques de résolution développées dans cette question sont donc à considérer comme classiques et il convient de les maîtriser.
- On retiendra en particulier que pour toute v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant k]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant k-1]\,\big)$$

Cette formule est fondamentale pour obtenir la loi de la v.a.r. Y.

□

3. a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big([Y = k]\big) = \mathbb{P}\big([Y > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Y > k]\big)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\begin{array}{rcll} [Y > k] \cup [Y = k] & = & [Y \geqslant k] & \\ & = & [Y > k-1] & \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([Y > k-1]\big) & = & \mathbb{P}\big([Y > k] \cup [Y = k]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([Y > k]\big) + \mathbb{P}\big([Y = k]\big) & \textit{(car les événements } [Y > k] \textit{ et } [Y = k] \textit{ sont inconpatibles)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Y > k-1]) - \mathbb{P}([Y > k])}$$

Commentaire

- Le résultat présenté ici est similaire à celui mis en avant dans la question précédente. Il est d'ailleurs possible de démontrer ce résultat à l'aide du résultat précédent. Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([Y = k]\big) & = & \mathbb{P}\big([Y \leqslant k]\big) - \mathbb{P}\big([Y \leqslant k-1]\big) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{[Y \leqslant k]}\right)\right) - \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{[Y \leqslant k-1]}\right)\right) & \\ & = & \left(\cancel{1} - \mathbb{P}\big([Y > k]\big)\right) - \left(\cancel{1} - \mathbb{P}\big([Y > k-1]\big)\right) & \\ & = & \mathbb{P}\big([Y > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Y > k]\big) & \end{array}$$

  On a préféré opter dans ce corrigé pour une rédaction similaire à celle de la question ***2.b)*** car, comme signalé dans la remarque précédente, ces formules sont à considérer comme classiques et il faut savoir les démontrer indépendamment les unes des autres.

- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.

  On retiendra que derrière une formule reliant la probabilité de plusieurs événements, se cache souvent un résultat reliant ces différents événements.

- La formule énonce une différence entre des probabilités d'événements. Après réordonnement, on obtient une somme. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une union. Si on ne réordonne pas les différents membres de l'égalité, on peut aussi penser à une décomposition à l'aide d'une différence ensembliste. Pour cela on remarque que, comme Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$[Y > k-1] \setminus [Y > k] = [Y = k]$$

$$\text{Ainsi : } \begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([Y = k]\big) & = & \mathbb{P}\big([Y > k-1] \ \setminus \ [Y > k]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([Y > k-1]\big) \ - \ \mathbb{P}\big([Y > k-1] \ \cap \ [Y > k]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([Y > k-1]\big) \ - \ \mathbb{P}\big([Y > k]\big) & \textit{(car } [Y > k] \subset [Y > k-1]\textit{)} \end{array}$$

□

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big)$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{cll} & \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) & \\ = & \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\Big(\mathbb{P}\big([Y>j-1]\big) - \mathbb{P}\big([Y>j]\big)\Big) & \textit{(d'après la question précédente et car } j \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\ = & \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y>j-1]\big) - \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ = & \sum\limits_{j=0}^{N-1} (j+1)\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) - \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) & \textit{(par décalage d'indice)} \\ = & \sum\limits_{j=0}^{N-1} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) + \sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ = & 0 \times \mathbb{P}([Y>0]) + \cancel{\sum\limits_{j=1}^{N-1} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big)} + \sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - \Big(\cancel{\sum\limits_{j=1}^{N-1} j\,\mathbb{P}([Y>j]} + N\,\mathbb{P}([Y>N])\Big) & \\ = & \sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big) & \end{array}$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big)}$$

□

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après le cours, on a : } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha\,x + \underset{x\to 0}{o}(x).}$$

□

d) En déduire que Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y>k]\big)$$

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\,\mathbb{P}\big([Y=n]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- D'après la question précédente, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big) \quad (*)$$

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big) & = & N\,\Big(1 - \mathbb{P}\big(\overline{[Y>N]}\big)\Big) & \\ & = & N\,\big(1 - \mathbb{P}\big([Y\leqslant N]\big)\big) & \\ & = & N\,\Big(1 - \big(1-q^N\big)^R\Big) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}} \textit{ avec } N \in \mathbb{N}^*\textit{)} \end{array}$$

On déduit de la question ***3.c)*** : $1-(1+x)^\alpha = -\alpha\, x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et ainsi :

$$1-(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} -\alpha\, x$$

Par ailleurs, on a : $q^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $q \in \,]-1,1[$.
Ainsi, en prenant $\alpha = R$ et $x = -q^N$, on obtient :

$$1-\left(1-q^N\right)^R \underset{N\to+\infty}{\sim} \cancel{-}R\,(\cancel{-}q^N)$$

Finalement :

$$N\,\left(1-\left(1-q^N\right)^R\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} R\,N\,q^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(car } q\in\,]-1,1[\textit{)}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big) = N\,\left(1-\left(1-q^N\right)^R\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

- On a alors :

  La série $\sum n\,\mathbb{P}\big([Y=n]\big)$ est convergente

  $\Leftrightarrow$ La suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

  $\Leftrightarrow$ La suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbb{P}\big([Y>j]\big)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente *(d'après la relation $(*)$)*

  $\Leftrightarrow$ La série $\sum \mathbb{P}\big([Y>n]\big)$ est convergente

  Or :

  × $\forall N\in\mathbb{N}^*,\ R\,q^n \geqslant 0$

  × $\mathbb{P}\big([Y>n]\big) = 1-(1-q^n)^R \underset{n\to+\infty}{\sim} R\,q^n$

  × La série $\sum q^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $q\in\,]-1,1[$.
  Il en est de même de la série $\sum R\,q^n$ car on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel $R\neq 0$.

  Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \mathbb{P}\big([Y>n]\big)$ est convergente.

  $$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } Y \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus, par passage à la limite dans l'égalité $(*)$ (toutes les quantités admettant une limite finie), on a :

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) & = & \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big)\right) & - & \lim\limits_{N\to+\infty} \big(N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big)\big) \\ \| & & \| & & \| \\ \sum\limits_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) & & \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) & & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la v.a.r. } Y \text{ admet une espérance égale à : } \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y>j]\big).}$$

□

4. Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 1 - (1 - q^x)^R$.

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ et montrer :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto q^x = \exp(x \ln(q))$ est continue sur $[0, +\infty[$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto \ln(q)\, x$ est :
    - – continue sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.
    - – telle que $h_1\big([0, +\infty[\big) \subset \mathbb{R}$
  - × $h_2 : x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  La fonction f est elle-même continue sur $[0, +\infty[$ par somme et produits de fonctions continues sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est donc seulement impropre en $+\infty$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^B f(x)\, dx &= \int_0^B \Big(1 - \big(1 - q^x\big)^R\Big)\, dx \\
&= \int_0^B \Big(\big(1 - q^x\big)^0 - \big(1 - q^x\big)^R\Big)\, dx \\
&= \int_0^B q^x\, \frac{\big(1 - q^x\big)^0 - \big(1 - q^x\big)^R}{1 - \big(1 - q^x\big)}\, dx \\
&= \int_0^B q^x \left(\sum_{k=0}^{R-1} \big(1 - q^x\big)^k\right) dx \\
&= \int_0^B \left(\sum_{k=0}^{R-1} q^x \big(1 - q^x\big)^k\right) dx \\
&= \sum_{k=0}^{R-1} \int_0^B \Big(q^x \big(1 - q^x\big)^k\Big)\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{R-1} \int_0^B \Big(\mathrm{e}^{\ln(q)\, x} \big(1 - \mathrm{e}^{\ln(q)\, x}\big)^k\Big)\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{R-1} \frac{-1}{\ln(q)} \int_0^B \Big(-\ln(q)\, \mathrm{e}^{\ln(q)\, x} \big(1 - \mathrm{e}^{\ln(q)\, x}\big)^k\Big)\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{R-1} \frac{-1}{\ln(q)} \left[\frac{\big(1 - \mathrm{e}^{\ln(q)\, x}\big)^{k+1}}{k+1}\right]_0^B \\
&= \frac{-1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{\big(1 - \mathrm{e}^{\ln(q)\, B}\big)^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}$$

Or, comme $q \in \,]0,1[$, on a : $\ln(q) < 0$ et ainsi : $\mathrm{e}^{\ln(q)\,B} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par somme et compositions de limites, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} \frac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{k+1}}{k+1} & = & \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{1}}{1} & + & \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{2}}{2} & + & \cdots & + & \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{R}}{R} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle B \to +\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle B \to +\infty} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle B \to +\infty} \\
 & & \dfrac{1^1}{1} & & \dfrac{1^2}{2} & & & & \dfrac{1^R}{R}
\end{array}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{B \to +\infty} \int_0^B f(x)\,dx \\
&= \lim_{B \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{k+1}}{k+1} \right) \\
&= -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}.}$$

Commentaire

Les énoncés de type `TOP3` se distinguent des énoncés `TOP5` par un découpage plus faible des questions qui oblige le candidat à prendre plus d'initiatives. En particulier, cette question est à considérer comme très difficile. Afin d'éviter que cette question soit bloquante pour la suite, le résultat est fourni par l'énoncé.

□

5. a) Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant f(k-1)$.

Démonstration.

- Par une démonstration similaire à celle effectuée en question ***4.*** (en remplaçant continue par dérivable) on démontre que la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$.
  Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$f'(x) = \cancel{-}R \left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,x}\right)^{R-1} \times \left(\cancel{-}\ln(q)\ \mathrm{e}^{\ln(q)\,x}\right)$$

  Comme $\ln(q) < 0$, alors $\ln(q)\ x \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{\ln(q)\,x} \leqslant 1$. Ainsi : $\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,x}\right)^{R-1} \geqslant 0$.
  Comme $\ln(q) < 0$, alors $\ln(q)\ \mathrm{e}^{\ln(q)\,x} > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement : } \forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x) \leqslant 0. \\ \text{On en déduit que la fonction } f \text{ est décroissate sur } [0,+\infty[.\end{array}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [k-1, k]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Comme} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k \\ \text{alors} & f(k-1) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(k) \end{array}$$

(par décroissance de la fonction f sur $[0, +\infty[$)

- La fonction f est continue sur le **segment** $[k-1, k]$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$ est bien définie.
  De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k - 1 \leqslant k$) :

$$\underbrace{\int_{k-1}^{k} f(k-1)\, dt}_{=\big(k-(k-1)\big)\ f(k-1)} \geqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \geqslant \underbrace{\int_{k-1}^{k} f(k)\, dt}_{=\big(k-(k-1)\big)\ f(k)}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leqslant f(k-1)}$$

□

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{N+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=0}^{N} f(k) \leqslant \int_0^{N} f(x)\, dx + 1.$

Démonstration.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On obtient, par sommation des inégalités de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{m} f(k) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt}_{=\int_0^m f(t)\, dt} \leqslant \sum_{k=1}^{m} f(k-1) = \sum_{k=0}^{m-1} f(k)$$

(d'après la relation de Chasles)

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } m \in \mathbb{N}^* :\ \int_0^m f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} f(k) \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^{m} f(k) \leqslant \int_0^m f(t)\, dt.}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
  En utilisant la première inégalité précédente en $m = N + 1 \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\int_0^{N+1} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{N} f(k)$$

  En utilisant la deuxième inégalité précédente en $m = N \in \mathbb{N}^*$ et en ajoutant $f(0) = 1$ de part et d'autre, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N} f(k) \leqslant \int_0^N f(t)\, dt + 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{N+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=0}^{N} f(k) \leqslant \int_0^N f(x)\, dx + 1.}$$

□

c) Établir l'encadrement :

$$-\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \mathbb{E}(Y)\ \leqslant\ 1 - \frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

On pourra admettre sans démonstration : $\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \underset{R\to+\infty}{\sim} \ln(R)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{N+1} f(x)\ dx \ \leqslant\ \sum_{k=0}^{N} f(k) \ \leqslant\ \int_0^{N} f(x)\ dx + 1$$

$$\sum_{k=0}^{N} f(k) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\big([Y > k]\big) \quad \textit{(par définition de } f\textit{)}$$

Comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge (d'après la question ***4.***) et que la série $\sum \mathbb{P}\big([Y > n]\big)$ est elle aussi convergente (d'après la question ***3.d)***), tous les termes de l'inégalité précédente admettent une limite finie. Par passage à la limite, on en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} f(x)\ dx \ \leqslant\ \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} f(k)\right) \ \leqslant\ \lim_{N\to+\infty} \left(\int_0^{N} f(x)\ dx + 1\right)$$

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} f(k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y > k]\big) = \mathbb{E}(Y)$$

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\int_0^{N} f(x)\ dx + 1\right) = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx + 1 = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} + 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \mathbb{E}(Y)\ \leqslant\ 1 - \frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}.}$$

- Pour R suffisamment grand, on a $R > 1$ et donc $\ln(R) > 0$. Par ailleurs $\ln(q) < 0$.
En divisant l'inégalité précédente par $-\dfrac{\ln(R)}{\ln(q)} \geqslant 0$, on obtient :

$$\frac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} \ \leqslant\ \frac{\mathbb{E}(Y)}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} \ \leqslant\ \frac{1}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} + \frac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}}$$

Or :

× $\dfrac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{\ln(R)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'après le résultat donné par l'énoncé.

× $\dfrac{1}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} = -\dfrac{\ln(q)}{\ln(R)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc : $\dfrac{1}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} + \dfrac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{R \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(Y) \underset{R \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(R)}{\ln(q)}.}$$

□

IV. Problème (EDHEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Commentaire

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.
  1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
  On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Ici, Ω est l'ensemble de tous les ∞-déplacements possibles du mobile. Par exemple, $\omega = (0, 1, 2, 0, 1, 0, \dots)$ (évidemment, on ne peut décrire l'∞-tirage en entier !) est un ∞-déplacement qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le mobile se déplace à droite aux instants 1 et 2, puis revient en 0 à l'instant 3, puis se déplace de nouveau à droite à l'instant 4 puis revient de nouveau en 0 à l'instant 5 ...
  Décrire précisément Ω n'est pas si simple ici. On peut toutefois dire que Ω est un sous-ensemble de l'ensemble des suites à valeurs entières positives.

  2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$. Par exemple, l'événement A : « le mobile se déplace à droite à l'instant 1 » regroupe tous les ∞-déplacements dont le coefficient en position 1 vaut 1. Par exemple, $\omega = (0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots) \in A$.
  Lorsque $\omega \in A$, on dit que ω **réalise** l'événement A.

  3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :
  - elles prennent comme argument un résultat possible de l'expérience et renvoient une valeur réelle. Par exemple, avec l'∞-déplacement ω précédent : $T(\omega) = T\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 3$.
    En effet, d'après l'énoncé, T prend la valeur du premier instant de retour à l'origine du mobile.
    Par ailleurs :
    × $X_1\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 1$, × $X_3\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 0$, × $X_5\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 0$,
    × $X_2\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 2$, × $X_4\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 1$, × ...
  - elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $[T = 2]$ est un événement.
    Il regroupe **tous** les ∞-déplacements ω tels que : $T(\omega) = 2$.
    Autrement dit : $[T = 2] = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) = 2\} \subset \Omega$.

  Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

- Les notations $T = 1$ et $T = 4$ de l'énoncé sont malvenues. Écrire $T = 4$ signigie que T est la v.a.r. constante égale à 4. Il n'en est rien. Il faut alors traduire rigoureusement l'énoncé : si $\omega = (0, 1, 2, 3, 0, 0, 1, \dots)$ alors $T(\omega) = 4$. On peut aussi dire que si les abscisses de déplacement du mobile sont 0, 1, 2, 3, 0, 0, 1 alors la v.a.r. T **prend la valeur** 4.
  Mais en aucun cas, il ne faut écrire $T = 4$ car cela marque une confusion d'objets.
  Sur ce point remarquons que l'écriture : $X_0 = 0$ de l'énoncé est juste. En effet, le mobile se situe toujours à l'origine à l'instant 0. Ainsi, la v.a.r. est constante égale à 0.

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- L'événement $[T = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile revient en 0 pour la première fois à l'instant k. Cela signifie qu'entre l'instant 0 et l'instant $k - 1$, le mobile n'est pas revenu en 0 et que ce retour a eu lieu à l'instant k.
  Étant données les règles de déplacement du mobile, l'événement $[T = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile s'est déplacé sur la droite lors des $k - 1$ premiers instants puis est revenu en 0 à l'instant k. Finalement, cet événement est réalisé si et seulement si :
  × le mobile se trouve en position 1 à l'instant 1.
  × le mobile se trouve en position 2 à l'instant 2.
  × ...
  × le mobile se trouve en position $k - 1$ à l'instant $k - 1$.
  × le mobile se trouve en position 0 à l'instant k.

$$\boxed{\text{On en déduit : } [T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \right) \cap [X_k = 0].}$$

- Afin de lever toute ambiguïté, précisons cette formule lorsque $k = 1$.

$$\boxed{[T = 1] = [X_1 = 0]}$$

(le mobile revient à la position 0 *dès l'instant* 1*)* □

b) Donner la loi de X_1.

Démonstration.

- Après l'instant 0 :
  × soit le mobile a avancé d'une position et se trouve donc en position 1.
  × soit le mobile est resté sur le point origine.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_1(\Omega) = \{0, 1\}.}$$

- D'après l'énoncé, on a de plus :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p).}$$

□

c) En déduire $\mathbb{P}([T=k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([T=k]\big) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i=i]\right) \cap [X_k=0]\right) \\ &= \mathbb{P}\big([X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]\cap[X_k=0]\big)\end{aligned}$$

- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\big([T=k]\big) \\ =\ &\mathbb{P}([X_1=1])\times\ldots\times\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-2}=k-2]}([X_{k-1}=k-1])\times\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0])\end{aligned}$$

- La position du mobile à un instant $j \geqslant 2$ ne dépendant que de sa position à l'instant précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{j-1}=j-1]}([X_j=j]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{j-1}=j-1]}([X_j=j]) = p$$

  et :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0]) = 1-p$$

  ce qui permet de lever la réserve précédente.

- On en conclut :

$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) = p\times\ldots\times p\times(1-p) = p^{k-1}\ (1-p)}$$

- Remarquons alors : $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
  (le mobile peut revenir, pour la première fois en position 0 à n'importe quel instant)
  On peut donc en conclure, grâce au calcul de probabilité précédent :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$$

□

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

▸ **Initialisation** :
D'après l'énoncé, $X_0=0$. Ainsi : $X_0(\Omega)=\{0\}=[\![0,0]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n\in\mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$).
D'après l'hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$. Autrement dit, le mobile peut se trouver à n'importe quelle position $k\in[\![0,n]\!]$ à l'instant n.
Concernant la position du mobile à l'instant $n+1$, deux cas se présentent :
× soit le mobile se déplace en avant et ainsi le mobile se retrouve en position $k+1\in[\![1,n+1]\!]$.
× soit le mobile revient en position 0.
Toutes les positions dans $[\![0,n+1]\!]$ peuvent donc bien être atteintes.
Ainsi : $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n\in\mathbb{N},\ X_n(\Omega)=[\![0,n]\!].}$$

Commentaire

- L'énoncé demande ici de démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, **l'égalité** : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Il s'agit donc de démontrer une double inclusion.
  - $\times$ $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$. Cette inclusion est souvent la plus simple à démontrer. Elle est même généralement la seule nécessaire à la poursuite de l'exercice.
    Ici, comme le mobile ne peut prendre une position (strictement) à gauche de 0 et peut atteindre au plus le point d'abscisse n en n étapes (en ne se déplaçant que sur la droite), on obtient directement l'inclusion voulue.
  - $\times$ $[\![0, n]\!] \subset X_n(\Omega)$. Il s'agit ici de démontrer que chacune des positions 0, 1, ..., n peut être atteinte par le mobile en n étapes. Cette inclusion se démontre le plus souvent en exhibant des déplacements du possibles du mobile. Détaillons ce procédé ici.

    Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'∞-déplacement ω_k suivant réalise l'événement $[X_n = k]$:

    $$\omega_k \ = \ (\underbrace{0,\, 0,\, \ldots,\, 0}_{n-k},\, 1,\, 2,\, \ldots,\, k, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

    Ainsi : $\omega_k \in [X_n = k]$, c'est-à-dire : $X_n(\omega_k) = k$. D'où : $k \in X_n(\Omega)$.

  Dans la démonstration par récurrence proposée, on ne détaille pas si précisément la double-inclusion, mais la récurrence nous assure bien que chacune des positions souhaitées (de 0 à $n+1$ cette fois) sont bien atteintes.
- Remarquons enfin que pour la suite de l'exercice, démontrer l'inclusion : $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ est suffisante. C'est d'ailleurs sans doute ce que l'énoncé avait en tête en posant cette question. $\square$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $\Big([X_{n-1} = k] \Big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer : $\mathbb{P}\left([X_n = 0]\right) = 1 - p$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $\Big([X_{n-1} = k] \Big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_n = 0]) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0]\right) & \\
 & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}\left([X_n = 0]\right) & \textit{(car : } \forall k \in [\![0, n-1]\!], \\
 & & & \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0\textit{)} \\
 & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times (1-p) & \\
 & = & (1-p) \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) & \\
 & = & (1-p) &
\end{array}$$

En effet, comme $\big([X_{n-1} = k] \big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une système complet d'événements :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p.}$$

$\square$

3. a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}\ ,\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- La famille $\Big([X_n = i] \Big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :
  $$\mathbb{P}\big([X_{n+1} = k] \big) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] \big)$$
- Démontrons alors : $\forall i \neq k-1,\ [X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] = \varnothing$.
  Soit $i \in [\![0, n]\!]$. L'événement $[X_n = i] \cap [X_{n+1} = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile se trouve en position i à l'instant n et en position $k \neq 0$ à l'instant suivant $n+1$. Le mobile se déplaçant d'un pas sur la droite à chaque étape, cet événement ne peut être réalisé que si $i = k-1$.
  $$\boxed{\forall i \neq k-1,\ [X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] = \varnothing}$$
- Finalement :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_{n+1} = k] \big) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] \big) \\ &= \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k-1}}^{n} \cancel{\mathbb{P}\big([X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] \big)} \right) + \mathbb{P}\big([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k] \big) \end{aligned}$$
- Et ainsi :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) &= \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times \mathbb{P}_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k]) && \textit{(par la formule des probabilités composées)} \\ &= \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times p \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])}$$

Commentaire

Il est aussi possible de remarquer directement :
$$[X_{n+1} = k] = [X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]$$
La rédaction est très similaire à celle présentée ci-dessus. L'événement $[X_{n+1} = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile se trouve en position k à l'instant $n+1$. Comme $k \neq 0$, cela se produit si et seulement si le mobile se trouvait en position $k-1$ à l'instant n et se retrouve en position k à l'instant $n+1$ suite à son déplacement vers la droite. □

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}\ ,\ \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = p^k\,(1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}\left([X_n = n]\right)$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = p^k\,(1-p)$.

  ▸ **Initialisation** :
  D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}\left([X_{n+1} = k]\right) = p^k\,(1-p)$).
  Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :

  × si $k = 0$:
  D'une part : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = 1 - p$.
  D'autre part : $p^0\ (1-p) = 1 - p$.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vérifiée dans ce cas.

  × si $k \in [\![1, n]\!]$:
  D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & = & p\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) & \\ & = & p \times p^{k-1}(1-p) & \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à } k-1 \in [\![0, n-1]\!]\textit{)} \\ & = & p^k(1-p) & \end{array}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée dans ce cas.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = p^k\,(1-p).}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question précédente appliqué à $k = n+1 \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) = p\ \mathbb{P}([X_n = n]) \quad (*)$$

  On peut alors démontrer par récurrence : $\forall \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\mathbb{P}\big(\,[X_n = n]\,\big) = p^n$.

  ▸ **Initialisation** :
  – D'une part, d'après la question ***1.b)***, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p\right)$.
  Ainsi : $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1]\,\big) = p$.
  – D'autre part : $p^1 = p$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}\big(\,[X_{n+1} = n+1]\,\big) = p^{n+1}$).
  On a :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) & = & p\ \mathbb{P}([X_n = n]) & \textit{(d'après l'égalité } (*)\textit{)} \\ & = & p \times p^n & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & p^{n+1} & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n}$$

Ce résultat s'explique par le fait que le seul n-déplacement réalisant $[X_n = n]$ est celui dans lequel le mobile ne fait qu'avancer sans retour en 0. Chaque avancée se produisant avec probabilité p, un tel n-déplacement se déroule avec probabilité p^n.

Commentaire

- On aurait pu démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$ en utilisant la question ***2.a)***.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  La famille $\left([X_n = k] \right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements d'après ***2.a)***.
  Ainsi :
  $$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) & = & 1 \\ \shortparallel & & \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}([X_n = n]) & & \end{array}$$
  On en déduit :
  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_n = n]) & = & 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) & \\ & = & 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k \, (1-p) & \textit{(d'après le résultat précédent de cette question)} \\ & = & 1 - (1-p) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k & \\ & = & 1 - \cancel{(1-p)} \, \dfrac{1-p^n}{\cancel{1-p}} & \\ & = & \cancel{1} - (\cancel{1} - p^n) \ = \ p^n & \end{array}$$
- Ce n'était sans doute pas la méthode attendue au regard de la question suivante. □

c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) & = & \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) \right) + \mathbb{P}([X_n = n]) & \\ & = & \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k \, (1-p) \right) + p^n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\ & = & (1-p) \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} p^k \right) + p^n & \\ & = & \cancel{(1-p)} \, \dfrac{1-p^n}{\cancel{1-p}} + p^n & \textit{(car } p \neq 1\textit{)} \\ & = & 1 - p^n + p^n \ = \ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1}$$

□

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1  n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
2  X = 0
3  for k = 1:n
4      u = grand(1,1,'uin',0,2)
5      if u == 2 then
6          X = ...........
7      else
8          X = ...........
9      end
10 end
11 disp(X)
```

Démonstration.
Le but de ce programme est de simuler la v.a.r. $X_{\mathtt{n}}$ qui donne la position du mobile à l'instant `n`.
Pour ce faire, le déplacement du mobile est simulé à chaque instant.
Détaillons les différents éléments du script.

- **Début du programme**
  - × On commence par stocker dans une variable `n` une valeur entière stockée par l'utilisateur.
  - × On crée alors une variable informatique `X` dans le but stocker les simulations successives des v.a.r. X_0, X_1, $\dots$, $X_{\mathtt{n}}$. Comme $X_0 = 0$, la variable `X` est initialisée à 0 (ce qui revient à dire que le mobile est initialement en position 0).

```
1  n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
2  X = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 10 consistent à simuler successivement les v.a.r. X_1, $\dots$, $X_{\mathtt{n}}$.
  Pour cela, on met en place une structure itérative (boucle for) :

```
3  for k = 1:n
4      u = grand(1,1,'uin',0,2)
5      if u == 2 then
6          X = X + 1
7      else
8          X = 0
9      end
10 end
```

L'idée est la suivante. Supposons qu'au début d'un certain tour de boucle $\texttt{k} \in [\![1, \texttt{n}]\!]$ la variable informatique `X` contient une simulation de la v.a.r. $X_{\texttt{k}}$. Autrement dit, la variable `X` contient une position possible du mobile après `k` instants. L'instant suivant, le mobile se trouve :

– en position `X + 1` s'il s'est déplacé vers la droite. Dans ce cas, on procédera à la mise à jour :

```
6            X = X + 1
```

D'après l'énoncé, ceci doit se produire avec probabilité $p = \frac{1}{3}$.

– en position `0` s'il est revenu en 0. Dans ce cas, on procédera à la mise à jour :

```
8            X = 0
```

D'après l'énoncé, ceci doit se produire avec probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$.

Il reste alors à comprendre comment on procède pour que ces mises à jour se fassent avec la bonne probabilité. Ceci est réalisé à l'aide de la fonction `grand`. Plus précisément, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, 2)` renvoie 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$, 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et 2 avec probabilité $\frac{1}{3}$.
Ainsi, la ligne 4 stocke dans une variable `u` :

– la valeur 2 avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

– une valeur de $\{0, 1\}$ avec une probabilité $\frac{2}{3}$.

```
4       u = grand(1,1,'uin',0,2)
```

La mise à jour correspondant au déplacement à droite doit se faire avec probabilité $\frac{1}{3}$.

```
5       if u == 2 then
6           X = X + 1
```

Celle correspondant au retour en 0 doit se faire avec probabilité $\frac{2}{3}$.

```
7       else
8           X = 0
9       end
```

Étant donné le contenu de `X` au début de cette boucle, la variable `X` va contenir une simulation de la v.a.r. $X_{\texttt{k}+1}$ à l'issue de cette structure conditionnelleet donc au début du $(\texttt{k}+1)^{\text{ème}}$ tour de boucle.

- **Fin du programme**
À l'issue de cette boucle, la variable `X` contient une simulation de la v.a.r. $X_{\texttt{n}}$, autrement dit une position possible du mobile après `n` instants. □

5. a) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n) \quad$ où $\quad \mathcal{P}(n) : \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{2-1} k\ p^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{1} k\ p^{k-1} = 1\ p^0 = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{(2-1)\,p^2 - 2\,p^{2-1} + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{p^2 - 2p + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{(1-p)^2}{(1-p)^2} = 1$.

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

- **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \sum\limits_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} = \dfrac{n\ p^{n+1} - (n+1)\, p^n + 1}{(1-p)^2}\right)$.

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} & = & \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^{n-1} & \\
& = & \dfrac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + n\ p^{n-1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
& = & \dfrac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)^2\ p^{n-1}}{(1-p)^2} & \\
& = & \dfrac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1 + n\ (1-2p+p^2)\ p^{n-1}}{(1-p)^2} & \\
& = & \dfrac{(n-1)\, p^n - \cancel{n\, p^{n-1}} + 1 + \left(\cancel{n\ p^{n-1}} - 2\, n\, p^n + n\, p^{n+1}\right)}{(1-p)^2} & \\
& = & \dfrac{(n-1-2n)\, p^n + 1 + n\, p^{n+1}}{(1-p)^2} \ = \ \dfrac{n\, p^{n+1} - (n+1)\, p^n + 1}{(1-p)^2} &
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}.}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***2.a)***, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
  La v.a.r. X_n est donc finie. Ainsi, X_n admet une espérance.
- De plus, par définition de l'espérance :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(X_n) & = & \sum\limits_{k \in X_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \\
& = & \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ \mathbb{P}([X_n = k])\right) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n]) & \\
& = & \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ p^k\ (1-p)\right) + n\ p^n & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{2.b)}}, \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\
& = & (1-p)\ p\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^n & \\
& = & \cancel{(1-p)}\ p\ \dfrac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^{\cancel{2}}} + n\ p^n & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & p\ \left(\dfrac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)\ p^{n-1}}{1-p}\right) &
\end{array}$$

On en conclut finalement :

$$\mathbb{E}(X_n) \;=\; p\left(\frac{\cancel{np^n} - p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \cancel{n\,p^{n-1}} - \cancel{np^n}}{1-p}\right) \;=\; p\left(\frac{1-p^n}{1-p}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_n\right) = \frac{p\left(1-p^n\right)}{1-p}}$$

□

6. a) Montrer, en utilisant la question ***3.a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X_n\right) + 1\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Les v.a.r. X_n et X_{n+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc des moments d'ordre 2.
- De plus, par définition du moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}^2) &= \sum_{k \in X_{n+1}(\Omega)} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) && \textit{(car } 0^2\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2\ p\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\
&= p \sum_{k=1}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) \\
&= p \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2\ \mathbb{P}([X_n = k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\ \mathbb{P}([X_n = k]) + 2 \sum_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k])\right) \\
&= p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right) && \textit{(par définition des moments et par la question } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right)}$$

□

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p\ u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2(n+1)-1)\,\frac{p^{n+2}}{1-p} \\ &= \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2n+1)\,\frac{p^{n+2}}{1-p} \\ &= p\,\big(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\big) + (2n+1)\,\frac{p^{n+2}}{1-p} \quad \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} p\ u_n &= p\ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + p\ \ (2n-1)\,\frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= p\ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\frac{p^{n+2}}{1-p} \end{aligned}$$

- On obtient, par soustraction des deux lignes :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - pu_n &= \cancel{p\ \mathbb{E}(X_n^2)} - \cancel{p\ \mathbb{E}(X_n^2)} + 2p\ \mathbb{E}(X_n) + p + ((2\cancel{n}+1) - (2\cancel{n}-1))\,\frac{p^{n+2}}{1-p} \\ &= 2p\ \frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + 2\ \frac{p^{n+2}}{1-p} \qquad \textit{(d'après la question \textbf{5.b)})} \\ &= p\ \frac{2p(1-p^n)}{1-p} + p\ \frac{1-p}{1-p} + p\ \frac{2p^{n+1}}{1-p} \\ &= p\ \frac{2p(1-p^n) + (1-p) + 2p^{n+1}}{1-p} \\ &= p\ \frac{2p - \cancel{2p^{n+1}} + 1 - p + \cancel{2p^{n+1}}}{1-p} \\ &= p\ \frac{1+p}{1-p} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p\ u_n + p\ \frac{1+p}{1-p}}$$

□

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

Démonstration.
D'après la formule trouvée dans la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :
$$x = p\,x + \frac{p(1+p)}{1-p}$$
Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.

- On écrit :
$$\begin{array}{rcccccll} u_{n+1} & = & p & \times & u_n & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} & (L_1) \\[2ex] \lambda & = & p & \times & \lambda & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} & (L_2) \\[2ex] \text{et donc} \quad u_{n+1}-\lambda & = & p & \times & (u_n-\lambda) & & & (L_1)-(L_2) \end{array}$$
Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison p.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = p^n \times v_0 = p^n \times (u_0 - \lambda)$$
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = v_n + \lambda = p^n \times (u_0-\lambda) + \lambda$$

- Enfin : $u_0 = \mathbb{E}(X_0^2) + (2\times 0 - 1)\dfrac{p^1}{1-p} = \mathbb{E}(0^2) - \dfrac{p}{1-p} = -\dfrac{p}{1-p}$.

- Ainsi : $u_0 - \lambda = -\dfrac{p}{1-p} - \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \dfrac{-p(1-p)-p(1+p)}{(1-p)^2} = -p\dfrac{1-\cancel{p}+1+\cancel{p}}{(1-p)^2} = \dfrac{-2p}{(1-p)^2}$.

- On en conclut :
$$\begin{aligned} u_n &= p^n\,\frac{-2p}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-2p^n\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-2p^n\right)}$$

- Il reste à déterminer $\mathbb{E}(X_n^2)$. Par définition de u_n :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= u_n - (2n-1)\,\frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-2p^n\right) - (2n-1)\,\frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-2p^n\right) - (2n-1)(1-p)\ p^n\ \frac{p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n\right) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n\right) \end{aligned}$$

- Enfin :

$$-(2n-1)(1-p) = (2n-1)(p-1) = 2np - 2n - p + 1 = (1-2n) + (2n-1)p$$

- On en conclut :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_n^2) & = & \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 + p - 2p^n + (1-2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right) \\ & = & \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 + p + (-1-2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^2) = \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 + p - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right)}$$

□

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 - (2n+1)\, p^n\, (1-p) - p^{2n+1}\right)$.

Démonstration.

- On a déjà vu en question ***6.a)*** que la v.a.r. X_n admet un moment d'ordre 2. Ainsi X_n admet une variance.
- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(X_n) & = & \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2 \\ & = & \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 + p - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right) - \left(\dfrac{p(1-p^n)}{1-p}\right)^2 \\ & = & \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 + p - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right) - \dfrac{p}{(1-p)^2}\ p(1-p^n)^2 \\ & = & \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 + \cancel{p} - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p(\cancel{1} - 2p^n + p^{2n})\right) \\ & = & \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 - (1+2n)p^n + (2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1}\right) \\ & = & \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2} \left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)}$$

□

7. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

a) En s'inspirant du programme de la question ***4.***, écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie un vecteur `T` contenant les `n` premières abscisses du mobile.

Démonstration.
On souhaite dans cette question simuler une trajectoire du mobile en n étapes. Le programme de la question ***4.*** quant à lui permet d'obtenir une simulation de la v.a.r. X_n, c'est-à-dire de la position du mobile au bout de n étapes.

Ainsi, pour obtenir la trajectoire en n étapes, il suffit de stocker les positions prises par le mobile à chaque étape dans un vecteur `T`. On modifie donc le programme de la question *4.* de la manière suivante :

```
1  function T = TrajectoireX(n)
2      T = zeros(1, n)
3      for k = 1:n
4          u = grand(1,1,'uin',0,2)
5          if u == 2 then
6              T(i+1) = T(i) + 1
7          else
8              T(i+1) = 0
9          end
10     end
11 endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `TrajectoireX`,
  × elle prend en entrée le paramètre `n`,
  × elle admet pour variable de sortie `T`.

```
1  function T = TrajectoireX(n)
```

  On initialise ensuite la variable `T` au vecteur nul de taille `n`. C'est cette variable qui contiendra la simulation d'une trajectoire du mobile au bout de `n` étapes.

```
2      T = zeros(1, n)
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 10 consistent à mettre à jour la variable `T` pour que ses coordonnées contienne les positions successives du mobile. On procède pour cela comme en question *4.*.

```
3      for k = 1:n
4          u = grand(1,1,'uin',0,2)
5          if u == 2 then
6              T(i+1) = T(i) + 1
7          else
8              T(i+1) = 0
9          end
10     end
```

□

b) On considère le programme **Scilab** suivant :

```
n = input('Entrez un entier n : ')
N = 1000
T = zeros(N,n)
for i = 1:N
    T(i,:) = TrajectoireX(n)
end
E = zeros(1,n)
V = zeros(1,n)
for k = 1:n
    E(k) = mean(T(:,1:k))
    V(k) = variance(T(:,1:k))
end
subplot(1,2,1), plot(E,'+')
subplot(1,2,2), plot(V,'or')
```

Que représentent les vecteurs `E` et `V` ?

Démonstration.

- Vecteur `E` :
  Le vecteur `E` est un vecteur à `n` coordonnées.
  Soit $k \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$. La coordonnée $\mathtt{E}(k)$ est la moyenne empirique des `N` trajectoires du mobile, jusqu'à l'instant k.

  La variable `E` représente donc une approximation de $\mathbb{E}(X_k)$.

- Vecteur `V` :
  Le vecteur `V` est un vecteur à `n` coordonnées.
  Soit $k \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$. La coordonnée $\mathtt{V}(k)$ est la variance empirique des `N` trajectoires du mobile, jusqu'à l'instant k.

  La variable `V` représente donc une approximation de $\mathbb{V}(X_k)$.

Commentaire

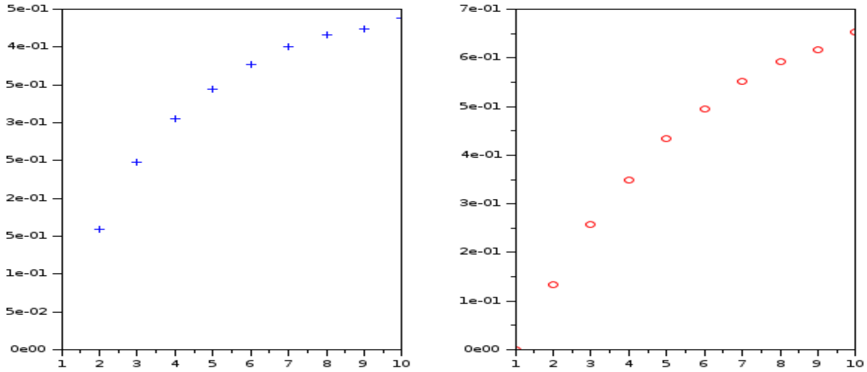
- Afin de savoir où le mobile se trouve, en moyenne, à l'instant k, l'idée est la suivante :
  - × on simule un grand nombre de trajectoires de taille n du mobile (ici $N = 1000$),
  - × pour chacune de ces trajectoires, on s'intéresse à la position du mobile à l'instant k.

  On considère alors que la moyenne des positions du mobile à l'instant k calculée sur toutes ces simulations de trajectoires est une bonne approximation de la moyenne théorique du mobile à l'instant k. Autrement dit, la moyenne simulée par le programme est une bonne approximation de $\mathbb{E}(X_k)$.
- Le résultat précédent est assez naturel. La loi (faible) des grands nombres permet de donner une justification rigoureuse à cette intuition. Plus précisément, ce résultat stipule que la moyenne **empirique** des positions à l'instant k fournit bien une approximation de la moyenne **théorique** $\mathbb{E}(X_k)$. Ce résultat sera détaillé en fin d'année dans le chapitre « Convergence et approximations ».

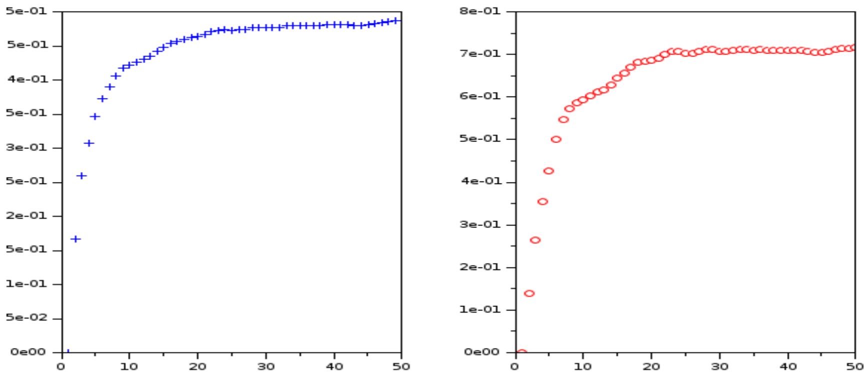
□

c) Le programme précédent nous permet d'obtenir les graphiques suivants pour différentes valeurs de `n` :

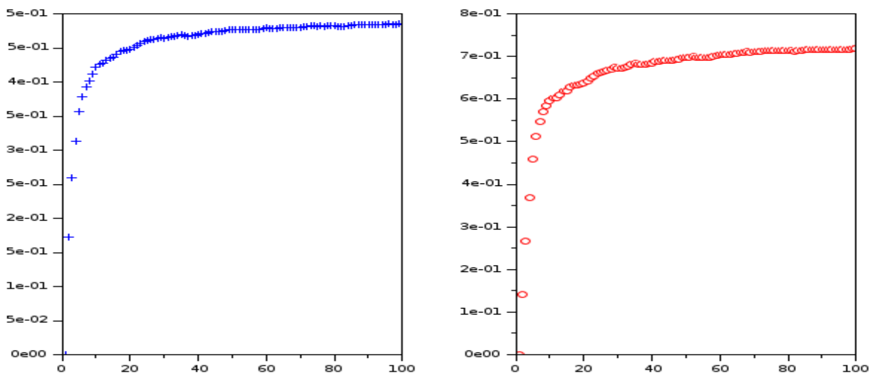
`n`= 10



`n`= 50



`n`= 100



Expliquer ces graphiques à l'aide des questions ***5.*** et ***6.***.

Démonstration.

- D'après la loi faible des grands nombres, `E` est une approximation de $\mathbb{E}(X_n)$, donc les graphiques bleus ci-dessus montrent l'évolution de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n croît.
  Donc, on peut deviner sur ces graphiques $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.
- Comme $p = \dfrac{1}{3}$, d'après la question ***5.***, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p(1-p^n)}{1-p} = \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Les graphiques de gauche illustrent le résultat } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}.}$$

- D'après la loi faible des grands nombres, `V` est une approximation de $\mathbb{V}(X_n)$, donc les graphiques rouges ci-dessus montrent l'évolution de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n croît.
  Donc, on peut deviner sur ces graphiques $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n)$.
- Comme $p = \dfrac{1}{3}$, d'après la question ***6.*** :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\right) = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\text{Les graphiques de droite illustrent le résultat } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = \frac{3}{4}.}$$

□