DS3 (version A)

I. Exercice 1

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

1. **a)** Déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f.

b) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

c) On considère les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $v = (3, 1, -2)$.
Calculer $f(u)$ et exprimer $f(v)$ en fonction de v.

2. On considère le vecteur $w = (-2, 0, 1)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Exprimer $f(w)$ comme combinaison linéaire de v et w puis vérifier que la matrice de f dans la base (u, v, w) est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. **a)** On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer N^2 puis utiliser la formule du binôme pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $T^n = D^n + n\, D^{n-1} N$.

b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n.

4. On note $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

a) Déterminer P et son inverse P^{-1}.

b) Justifier sans calcul : $A = PTP^{-1}$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$.

d) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

II. Exercice 2

On considère une pièce de monnaie qui amène Pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$ et Face avec probabilité $1-p$. On effectue des tirages successifs avec cette pièce. Dans la suite, on note :

× N_P la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier Pile,

× N_F la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier Face.

1. ***a)*** Quelles sont les lois des variables aléatoires N_P et N_F ?

b) Les variables aléatoires N_P et N_F sont-elles indépendantes ?

On appelle chaîne toute séquence constituée uniquement de Pile ou uniquement de Face. On définit alors les v.a.r. X et Y de la manière suivante :

× on note X la v.a.r. égale à la longueur de la première chaîne obtenue,

× on note Y la v.a.r. égale à la longueur de la deuxième chaîne obtenue.

Par exemple, si l'expérience a pour résultat $\omega_1 = (\text{Pile}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \ldots)$:

× la première chaîne est constituée de 3 Pile. On a ainsi : $X(\omega_1) = 3$.

× la deuxième chaîne commence avec le Face suivant. Elle est de taille 2. On a ainsi : $Y(\omega_1) = 2$.

× la chaîne suivante est de taille 1 (elle est constituée d'un seul Pile).

× celle qui suit est de taille 2 (elle est constituée de deux Face)

× ...

De même, si l'expérience a pour résultat $\omega_2 = (\text{Face}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \ldots)$ alors $X(\omega_2) = 1$ et $Y(\omega_2) = 2$.

2. ***a)*** Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

c) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout (i,j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}\big(\,[X=i] \cap [Y=j]\,\big) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. ***a)*** En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5. ***a)*** Établir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
(on pourra envisager $\mathbb{P}\big(\,[X=1] \cap [Y=1]\,\big)$)

b) Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

III. Exercice 3

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

- ***a)*** Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}\big([Z > k]\big)$.
- ***b)*** Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathbb{P}\big([Z = k]\big) = \mathbb{P}\big([Z > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > k]\big)$$

- ***c)*** En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$,
et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- ***a)*** Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.
- ***b)*** Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- ***c)*** Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

3. On rappelle que la fonction `rand` renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0,1[$.
Par ailleurs, la commande `modulo(x,2)` permet de tester si `x` est pair. Plus précisément :

- × `x` est pair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 0,
- × `x` est impair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 1.

Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité p et calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
x = 1
lancer = rand()
while lancer <= 1-p
    x = ..........
    lancer = rand()
end
if modulo(x,2) == 0 then
    ...........
else
    ...........
end
disp(t)
```

Exercice 4

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. ***a)*** Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'évènement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
Écrire l'évènement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des évènements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ \mathbb{P}\big([X_i = 1]\big) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a :

$$\mathbb{P}\big([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\big) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $\mathbb{E}(Y_n)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $\mathbb{E}(N_i)$.

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. On rappelle que `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie au hasard un entier de $[\![1, n]\!]$.
Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2')
n1 = 0
x1 = 1
for k = 1:n
    hasard = grand(1,1,'uin',1,n)
    if hasard == 1 then
        x1 = ..........
        n1 = ..........
    end
end
disp(x1)
disp(n1)
```