DS3 (version A)

I. Exercice 1

On considère une pièce de monnaie qui amène Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $1-p$. On effectue des tirages successifs avec cette pièce. Dans la suite, on note :

× N_P la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier Pile,

× N_F la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier Face.

1. ***a)*** Quelles sont les lois des variables aléatoires N_P et N_F ?

b) Les variables aléatoires N_P et N_F sont-elles indépendantes ?

On appelle chaîne toute séquence constituée uniquement de Pile ou uniquement de Face. On définit alors les v.a.r. X et Y de la manière suivante :

× on note X la v.a.r. égale à la longueur de la première chaîne obtenue,

× on note Y la v.a.r. égale à la longueur de la deuxième chaîne obtenue.

Par exemple, si l'expérience a pour résultat $\omega_1 = (\text{Pile}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \ldots)$:

× la première chaîne est constituée de 3 Pile. On a ainsi : $X(\omega_1) = 3$.

× la deuxième chaîne commence avec le Face suivant. Elle est de taille 2. On a ainsi : $Y(\omega_1) = 2$.

× la chaîne suivante est de taille 1 (elle est constituée d'un seul Pile).

× celle qui suit est de taille 2 (elle est constituée de deux Face)

× ...

De même, si l'expérience a pour résultat $\omega_2 = (\text{Face}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \ldots)$ alors $X(\omega_2) = 1$ et $Y(\omega_2) = 2$.

2. ***a)*** Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

c) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout (i,j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}\big(\,[X=i] \cap [Y=j]\,\big) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. ***a)*** En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5. ***a)*** Établir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
(on pourra envisager $\mathbb{P}\big(\,[X=1] \cap [Y=1]\,\big)$)

b) Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

II. Exercice 2

- Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieurs ou égal à n, et on désigne par $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_n)$ sa base canonique (pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = X^i$).
- Dans la suite, a désigne un réel quelconque.
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\big(\Psi_a(P)\big)(X) = 2P(X) + (X-a)\, P'(X)$.
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2} \displaystyle\int_a^x (t-a)\, P(t)\, dt & \text{si } x \neq a, \\[2ex] \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

- Enfin on définit, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, le polynôme Q_k par : $Q_k(X) = (X-a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. ***a)*** Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

b) Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Calculer, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.

d) En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.

4. ***a)*** Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\big((X-a)^2 P(X)\big)'$ en fonction de $\big(\Psi_a(P)\big)(X)$.

b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big) = P$.

c) En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.

d) Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

III. Problème

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\dfrac{1}{p}$).

On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. ***a)*** Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

c) Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \dfrac{p}{1+q}$.

2. ***a)*** Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.

En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2\ \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T) = \dfrac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.

3. ***a)*** Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$.
En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([Z = j] \cap [Z = T])$.

b) Montrer que pour tout couple (j, l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) = 2p^2q^{2j+l-2}$.

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$)

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.

4. ***a)*** À l'aide du résultat de la question ***3.e)***, calculer $\text{Cov}(Z, T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T).

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.