DS4 (version A)

Exercice 1 / 37 (EDHEC 2020)

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
- **1 pt :** $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- **2 pts :** $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ **est stable par combinaison linéaire**

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \ = \ ({}^tA)\, M + M\, A$$

2. a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

- **1 pt : linéarité** ${}^t\big(({}^tA)\, M + M\, A\big) = {}^t\big(({}^tA)\, M\big) + {}^t\big(M\, A\big)$
- **1 pt : calcul pour montrer que** ${}^t\big(M\, A\big) = {}^tA\ {}^tM$
- **1 pt : conclusion**

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** f **est à valeurs dans** $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- **2 pt :** f **est linéaire**

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt : écriture système linéaire**
- **1 pt : résolution système linéaire**
- **1 pt :** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}\,(J, K, L)$

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $\mathscr{B}$ **est libre**
- **1 pt :** $\mathscr{B}$ **est génératrice de** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ **donc est une base de** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
- **1 pt :** $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \text{Card}(\mathscr{B}) = 3$

4. ***a)*** Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

- **1 pt :** $f(J) = -J - L$
- **1 pt :** $f(K) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $f(L) = -L$

b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(f(J), f(K), f(L))$
- **1 pt :** $\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(-J - L, -L)$ **(éventuellement** $= \text{Vect}\,(J, L)$**)**
- **1 pt :** $(-J - L, -L)$ **est une famille libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires)**
- **1 pt :** (J, L) **est une base de** $\text{Im}(f)$

c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.

- **0 pt :** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ **est un espace vectoriel de dimension finie et** f **est un endomorphisme de** $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ **donc on peut utiliser le théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$
- **1 pt :** $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 3$ **et** $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ **donc** $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$
- **1 pt :** (K) **est libre car** K **non nul**
- **1 pt :** $K \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
- **1 pt :** (K) **est une base de** $\text{Ker}(f)$ **par argument de dimension**

5. ***a)*** Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(J)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(K)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(L)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- **0 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) En déduire les valeurs propres de f.

- **2 pts : la matrice est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux** *(ou autre argument)*
  - × **1 pt :** $\text{Sp}(F) = \{-1, 0\}$
  - × **1 pt :** $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(F)$

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \text{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

- **1 pt :** $\text{rg}(f + \text{id}) = \text{rg}(A + I)$
- **1 pt :** $\text{rg}(A + I) = 2$
- **1 pt (bonus) :** $\dim(E_{-1}(f)) = \dim(\text{Ker}(f + id)) = 1$ **par théorème du rang**
- **1 pt (bonus) : ainsi** $\dim(E_{-1}(f)) + \dim(E_0(f)) = 2 < 3$ **donc** f **n'est pas diagonalisable.**

I. Exercice 2 /66 (EML 2013)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I / 12

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r. et loi binomiale reconnue** $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_i) = \frac{k}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_i) = \frac{k}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i = k]) = \dbinom{k}{k} \left(\dfrac{1}{n}\right)^k \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-k}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = 0 \neq \mathbb{P}([X_i = k])\mathbb{P}([X_j = k])$

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r. et loi binomiale reconnue** $X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_i + X_j) = k \, \frac{2}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right)$

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{V}(X_i) + 2 \operatorname{Cov}(X_i, X_j) + \mathbb{V}(X_j)$
- **1 pt :** $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = -\dfrac{k}{n^2}$

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II / 31

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

- **1 pt :** $Z_1(\Omega) = \{1\}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_1) = 1$
- **1 pt :** $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $[Z_2 = 1] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i = 2]$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = 2]) = \cancel{n} \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} = \frac{1}{n}$ **par incompatibilité**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \frac{1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{1}{n} + 2 \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 2 - \dfrac{1}{n}$

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

- **1 pt :** $[Z_k = 1] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i = k]$
- **1 pt : réunion incompatible**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{1}{n^{k-1}}$
- **1 pt : cas** $k > n$
- **2 pts : cas** $k \leqslant n$ **(1 pt pour dénombrement de** $[Z_k = k]$ **et 1 pt pour** $\mathbb{P}([Z_k = k])$**.**

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\,\mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n-\ell+1}{n}\,\mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

- **1 pt :** $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$
- **1 pt :** $\Big([Z_k = i]\Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ **est un SCE**
- **1 pt : expression de la formule des probabilités totales**
- **1 pt :** $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing$ **si** $i \neq \ell$ **et** $i \neq \ell - 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_k = \ell - 1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{n - \ell + 1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_k = \ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}$
- **1 pt : cas** $\ell = 1$

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) + 1$.

- **1 pt : existence de** $\mathbb{E}(Z_k)$ **et** $\mathbb{E}(Z_{k+1})$ **car** $Z_i(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$
- **1 pt : expression correcte de l'espérance**
- **1 pt : changement d'indice**
- **1 pt : regrouper les deux sommes** $\sum\limits_{\ell=1}^{n}$
- **1 pt : reconnaître** $\mathbb{E}(Z_k)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) = 1$

6. ***a)*** Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

- **2 pts**

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

- **1 pt : formule** $v_k = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$
- **1 pt :** $v_1 = -(n-1)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_k)$

Partie III / 23

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

7. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{1}{4^{k-1}}$ **d'après *5.a)***
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

8. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

- **3 pts :** $\text{Card}([Z_k = 2])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 2])$

9. On note, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

- **1 pt :** $[Z_k \leqslant 3] = A_1 \ \cup \ A_2 \ \cup \ A_3 \ \cup \ A_4$
- **2 pts : formule du crible au rang 4**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1) = \ldots = \mathbb{P}(A_4)$
- **1 pt :** $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$
- **1 pt : résultat**

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

- **1 pt :** $A_1 = [X_1 = 0]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^k$
- **1 pt :** $A_1 \cap A_2 = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] = [X_1 + X_2 = 0]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$
- **1 pt :** $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [X_4 = k]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}$
- **1 pt :** $[Z_k \leqslant 3] = [Z_k = 1] \cup [Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]$
- **1 pt : réunion incompatible**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 3]) = \dfrac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k}$
- **1 pt :** $[Z_k = 4] = \overline{[Z_k \leqslant 3]}$

Exercice 3 /42 (EDHEC 2020)

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

- **2 pts :** $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
  - × **1 pt : description de l'expérience**
  - × **1 pt : description de la v.a.r.** Y

On revient au cas général

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

- **2 pts :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
  - × **1 pt : description de l'expérience**
  - × **1 pt : description de la v.a.r.** X
- **2 pts :** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ **et** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{2}$

3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X = k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])$.

- **3 pts : la loi conditionnelle de** Y **sachant** $[X = k]$ **est la loi** $\mathcal{B}(k, p)$
  - × **1 pt : Si l'événement** $[X = k]$ **est réalisé, c'est que...**
    0 à la moindre confusion d'objets
  - × **1 pt : description expérience**
  - × **1 pt : description v.a.r.** Y

  -5 si ~~événement sachant un~~ autre ou $\cancel{[X=k]}$ $\cancel{Y}$
- **1 pt :** $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$

4. On rappelle les commandes **Scilab** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$,
- `grand(1, 1, 'bin', n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p,
- `grand(1, 1, 'geom', p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p,
- `grand(1, 1, 'poi', a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
X = ------
Y = ------
```

- **1 pt :** `X = grand(1, 1, 'uin', 1, n)`
- **2 pts :** `Y = grand(1, 1, 'bin', X, p)`

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}(\,[Y = 0]\,) \;=\; \frac{q\,(1-q^n)}{n\,(1-q)}$$

- **1 pt : justification** $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- **4 pts :** $\mathbb{P}(\,[Y = 0]\,) \;=\; \dfrac{q\,(1-q^n)}{n\,(1-q)}$
  - × **1 pt :** $(\ [X = k]\ )_{k \in [\![1,n]\!]}$ **est un SCE**
  - × **1 pt : FPT**
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}([X = k]) \neq 0$
  - × **1 pt : fin du calcul**

b) Écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(\,[Y = i]\,)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

- **1 pt : FPT sur le SCE** $(\ [X = k]\ )_{k \in [\![1,n]\!]}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y = i]) = \dfrac{1}{n}\left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])} + \sum\limits_{k=i}^{n} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])\right)$
- **1 pt : reste du calcul**

6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Démontrer : $i\dbinom{k}{i} = k\dbinom{k-1}{i-1}$.

- **2 pts**

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\,p^i\,q^{k-i}\right)$$

- **1 pt :** Y **admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}([Y = i])$
- **1 pt : interversion sommes** $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=i}^{n} = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{k}$
- **1 pt : utilisation qst précédente**

c) En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\,p}{2}$.

- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt : binôme de Newton**
- **1 pt : reste du calcul**

7. ***a)*** Établir :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \left(k\,(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2}\, p^i\, q^{k-i} \right)$$

- **1 pt :** $Y(Y-1)$ **admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt : théorème de transfert** $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) = \sum\limits_{i=0}^{n} i(i-1)\ \mathbb{P}\big(\,[Y=i]\,\big)$
- **1 pt : échange de somme**
- **1 pt : utilisations de *6.a)***

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \ = \ \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

- **1 pt : décalage d'indice effectué correctement (pas de confusion sur** i **et** k**)**
- **1 pt : formule du binôme de Newton pour faire apparaître** $(p+q)^{k-1}$
- **2 pts :** $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2}$ **et** $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2 = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n=1$.

- **2 pts :** $(1^2-1) = 0$ **et** $\mathbb{E}(Y(Y-1)) = 0$
  0 si erreur de logique

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

- **1 pt : formule de Koenig-Huygens**
- **1 pt : reste (**$Y^2 = Y(Y-1) + Y$ **et linéarité de l'espérance)**

Exercice 4 /13 (début d'un exercice oral HEC)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on pose : $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer : $2f - f^2 = \text{id}$.

- **1 pt :** $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$**.**
- **1 pt :** $2A - A^2 = I$ **et passerelle matrice-endomorphisme (ou bijectivité de** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$**)**

2. Montrer que l'endomorphisme f est un automorphisme.
Quel est l'automorphisme réciproque de f ?

- **2 pts : double égalité** $f \circ (2\,\text{id} - f) = \text{id}$ **et** $(2\,\text{id} - f) \circ f = \text{id}$
(ou égalité simple + argument de dimension finie par exemple)
- **1 pt :** $f^{-1} = 2\,\text{id} - f$

3. Montrer que f admet l'unique valeur propre 1.

- **2 pts :** $\text{Sp}(f) \subset \{$**racines de** $Q\} = \{1\}$ **(passage par** $\text{Sp}(A)$ **autorisé si** $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$ **rappelé)**
- **1 pt :** $\text{Sp}(f) = \{1\}$ **car** $A - I$ **non inversible**

4. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Quelle est sa dimension ?

- **1 pt : écriture correcte du système**
- **1 pt : résolution**
- **1 pt :** $E_1(f) = \text{Vect}\left((-1,1,0),(1,0,1)\right)$
- **1 pt : La famille** $\mathcal{F}_1 = \big((-1,1,0),(1,0,1)\big)$ **est génératrice de** $E_1(f)$ **et libre**
- **1 pt :** $\dim\big(E_1(f)\big) = \text{Card}\big(\mathcal{F}_1\big) = 2$