DS4 (version A)

Exercice 1

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En effet : ${}^t0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = -0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$.
- × Comme $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, M vérifie : ${}^tM = -M$.
- × Comme $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, N vérifie : ${}^tN = -N$.

Démontrons : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) = -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)$) . On a :

$$\begin{aligned} {}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) &= \lambda \cdot {}^tM + \mu \cdot {}^tN \\ &= \lambda \cdot (-M) + \mu \cdot (-N) \qquad \textit{(car } (M,N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2 \\ &= -\lambda \cdot M - \mu \cdot N \\ &= -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) \end{aligned}$$

On a bien : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

□

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)\, M + M\, A$$

2. a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer : $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(f(M)\big) = -f(M)$).

$$\begin{aligned} {}^t\big(f(M)\big) &= {}^t\big(({}^tA)\, M + M\, A\big) \\ &= {}^t(({}^tA)M) + {}^t(M\,A) \qquad \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ &= ({}^tM)\big({}^t({}^tA)\big) + ({}^tA)\,({}^tM) \\ &= (-M)A + ({}^tA)\,(-M) \qquad \textit{(car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\textit{)} \\ &= -MA - ({}^tA)\,M = -f(M) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

□

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire
  Soit $(M, N) \in \big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) & = & ({}^tA)\,(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) + (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)\,A \\ & = & \lambda \cdot ({}^tA)M + \mu \cdot ({}^tA)N + \lambda \cdot MA + \mu \cdot NA \\ & = & \lambda \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) + \mu \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) \\ & = & \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est bien une application linéaire.}}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
  D'après la question précédente, pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien à valeurs dans } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

□

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Il existe donc $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9$ tel que : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & {}^tM = -M \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -a \\ d & = & -b \\ g & = & -c \\ b & = & -d \\ e & = & -e \\ h & = & -f \\ c & = & -g \\ f & = & -h \\ i & = & -i \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ \mid \ a = 0, \ d = -b, \ g = -c, \ e = 0, \ h = -f, \ i = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ b \cdot J + c \cdot K + f \cdot L \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(J,K,L) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ains, } \mathscr{B} = (J,K,L) \text{ est bien une famille génératrice de } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

- On présente ici $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sous la forme d'un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Cette forme permet de pouvoir écrire $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Il est relativement fréquent dans les sujets d'avoir à étudier des ensembles paramétrés. La méthode illustrée ci-dessus possède un double avantage. En effet, l'écriture $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\,(J,K,L)$ permet de conclure :
  × que $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
  × que la famille (J,K,L) est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- Ce dernier point est important pour exhiber une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
  × si la famille (J,K,L) est libre, c'est alors une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
  × sinon, si la famille (J,K,L) est liée, on peut extraire de (J,K,L) une base $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. La famille $\mathcal{G}$ n'est autre que la famille (J,K,L) dans laquelle on a retiré tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de (J,K,L).

□

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot J + \lambda_2 \cdot K + \lambda \cdot L = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. $(*)$

$$\begin{array}{rcl} \text{Or :} \quad (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \ \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (J,K,L) \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est :
  - × génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ (d'après la question précédente).
  - × libre.

  On en déduit que c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3.}$$

□

4. a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

Démonstration.

- On a :
$$\begin{aligned} f(J) &= ({}^tA)\, J + J\, A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(J) = -J - L}$$

- On a :
$$\begin{aligned} f(K) &= ({}^tA)\, K + K\, A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(K) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

- On a :
$$\begin{aligned} f(L) &= ({}^tA)\, L + L\, A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(L) = -L}$$

□

b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On a démontré précédemment que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et (J, K, L) est en une base. Par caractérisation de l'image d'une application linéaire, on a :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\,(f(J), f(K), f(L)) & \\ & = & \mathrm{Vect}\left(-J-L, 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}, -L\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(-J-L, -L) & \\ & = & \mathrm{Vect}\,(-J, -L) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ vecteur en lui ajoutant l'opposé du } 2^{ème}\textit{)} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(J, L) & \textit{(on met à jour les deux vecteurs en les multipliant tous les deux par } -1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(J, L)}$$

- Ainsi la famille (J, L) :
  - × engendre $\mathrm{Im}(f)$,
  - × est libre car constituée de deux matrices non colinéaires.

  On en conclut que la famille (J, L) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit finalement : } \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) \;=\; \mathrm{Card}\left((J, L)\right) \;=\; 2.}$$

Commentaire

- Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(-J-L, -L)$, la famille $(-J-L, -L)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. On aurait ainsi pu terminer la question avec cette famille. Cependant, c'est plutôt un bon réflexe que de simplifier la famille génératrice obtenue. Pour se faire, il est primordial de connaître précisément les opérations qui ne modifient pas l'espace vectoriel engendré par la famille étudiée.
- L'énoncé stipule que la base obtenue ne doit que contenir des matrices de $\mathscr{B}$. C'est donc certainement la forme (J, L) qui était attendue ici.
- Notons enfin que l'on pouvait démontrer le caractère libre en rappelant que (J, L) est une sous-famille de la famille (J, K, L) qui est libre en tant que base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

□

c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) & + & \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = 3 - 2 = 1.}$$

- De plus, d'après ce qui précède : $f(K) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{D'où : } K \in \mathrm{Ker}(f).}$$

- Ainsi, la famille (K) est :
  - × une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$, car constituée uniquement d'une matrice non nulle,
  - × telle que : $\mathrm{Card}\big((K)\big) = 1 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

  On en déduit que la famille (K) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(K).}$$ □

5. a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède : $f(J) = (-1) \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L$.

  On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- D'après ce qui précède : $f(K) = 0 \cdot J + 0 \cdot K + 0 \cdot L$.

  On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(K)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- D'après ce qui précède : $f(L) = 0 \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L$.

  On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F = \mathrm{Mat}_{(J,K,L)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$ □

b) En déduire les valeurs propres de f.

Démonstration.
La matrice F étant triangulaire (inférieure), ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(F) = \{-1, 0\}$.

$$\boxed{\text{Comme } F = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f), \text{ on en conclut : } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(F) = \{-1, 0\}.}$$ □

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer le rang de $f + \mathrm{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{rg}(f + \mathrm{id}) & = & \mathrm{rg}(F + I) & \textit{(car } F \textit{ et } I \textit{ sont les représentations matricielles dans la base } \mathscr{B} \textit{ des endomorphismes } f \textit{ et } \mathrm{id}\textit{)} \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) & \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ 2 & \end{array}$$

La dernière égalité est vérifiée car la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre (constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(f + \mathrm{id}) = 2.}$$

- Comme $f + \mathrm{id}$ est un endomorphisme de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, on a, d'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big)}_{=3} = \dim\big(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})\big) + \underbrace{\dim\big(\mathrm{Im}(f + \mathrm{id})\big)}_{=2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \dim\big(E_{-1}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})\big) = 3 - 2 = 1.}$$

- On a démontré précédemment : $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0\}$. Or :

$$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_{-1}(f)\big) = 1 + 1 = 2 \neq \dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big)$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Dans cette dernière question, on démontre que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir, notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A.
- Considérons un espace vectoriel E de dimension finie.
  Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cet exercice, même si elle est un peu cachée. Ici, f a deux valeurs propres : 0 et -1. De plus :
  - × le sous-espace propre $E_0(f)$ a pour base la famille (K).
  - × le sous-espace propre $E_{-1}(f)$ a pour base la famille (L).
    En effet, comme $f(L) = -L$, on a : $L \in E_{-1}(f)$ et ainsi : $\mathrm{Vect}\,(L) \subset E_{-1}(f)$.
    On conclut : $\mathrm{Vect}\,(L) = E_{-1}(f)$ par égalité des dimensions de ces deux espaces vectoriels (puisqu'on a démontré : $\dim\big(E_{-1}(f)\big) = 1$).

  La famille (K, L) est une famille libre de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ car elle est constituée de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
  On complète alors cette famille en une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ en lui adjoignant le vecteur J. La matrice représentative de f dans la base (J, K, L) obtenue est triangulaire (inférieure). □

I. Exercice 2 (EML 2013)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de la boule numérotée i) indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{n}$ (on choisit une boule dans l'urne $\mathcal{U}$ de manière équiprobable parmi les n boules disponibles).
- La variable X_i donne le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right).}$$

On en déduit que X_i admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{Plus précisément : } \mathbb{E}(X_i) = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = k \times \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right).}$$

□

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- On commence par noter que :
$$[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$$
En effet, en k tirages, on ne peut pas obtenir à la fois k fois la boule numéro i et k fois la boule numéro j. On obtient donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
- D'autre part, d'après la question ***1.***, on sait que :
$$\mathbb{P}([X_i = k]) = \mathbb{P}([X_j = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} = 1 \times \frac{1}{n^k} \times 1 = \frac{1}{n^k}$$
Donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k])\, \mathbb{P}([X_j = k]) = \frac{1}{n^k} \times \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{2k}} \neq 0$$

On obtient finalement que :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) \neq \mathbb{P}([X_i = k])\, \mathbb{P}([X_j = k])$$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- On cherche ici à démontrer que les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes. Si elles l'étaient, alors toute paire de variables X_i, X_j (avec $i \neq j$) serait indépendante (l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux).
- Ainsi, en démontrant que les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas deux à deux indépendantes, on démontre qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

□

3. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la répétition de k épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de la boule numérotée i ou de la boule j) indépendantes et de même paramètre $\frac{2}{n}$ (le succès se réalise si l'on tire la boule i ou la boule j et on peut tirer n boules différentes en tout).
- La variable X_i+X_j est la v.a.r. qui donne le nombre de succès obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)}$$

On en déduit que $X_i + X_j$ admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{Plus précisément : } \mathbb{V}(X_i + X_j) = k \times \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right).}$$

□

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Démonstration.
D'après la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{V}(X_i) + 2\ \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + \mathbb{V}(X_j)$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) & = & \dfrac{1}{2}\left(\mathbb{V}(X_i + X_j) - \mathbb{V}(X_i) - \mathbb{V}(X_j)\right) \\[2mm]
& = & \dfrac{1}{\cancel{2}}\left(\dfrac{\cancel{2}\,k}{n}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) - \cancel{2}\,\dfrac{k}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right) \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}} \textit{ et } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\[2mm]
& = & \dfrac{k}{n}\left(\cancel{1} - \dfrac{2}{n} - \left(\cancel{1} - \dfrac{1}{n}\right)\right) \\[2mm]
& = & \dfrac{k}{n} \times \left(-\dfrac{1}{n}\right) \ = \ -\dfrac{k}{n^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{k}{n^2}}$$

□

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

Démonstration.

- Si $k = 1$, alors on effectue un unique tirage. Donc on ne peut obtenir qu'un seul numéro (celui de la boule choisie à cet unique tirage). Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1(\Omega) = \{1\} \\ \mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z_1 \text{ suit la loi certaine égale à 1, et } \mathbb{E}(Z_1) = 1.}$$

- Déterminons maintenant la loi de la variable Z_2.
  - On sait déjà que : $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
    En effet, en $k = 2$ tirages, on peut :
    - × soit obtenir deux fois la même boule, on observe alors 1 seul numéro.
    - × soit obtenir deux boules différentes, on observe alors 2 numéros distincts.
  - D'après le premier item du point précédent :

$$[Z_2 = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 2]$$

    Ainsi, l'événement $[Z_2 = 1]$ s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.
    On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z_2 = 1]) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = 2]) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{2}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2-2} & \textit{(d'après }\textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & \cancel{n} \, \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \; = \; \dfrac{1}{n} & \end{array}$$

  - La famille $([Z_2 = 1], [Z_2 = 2])$ est un système complet d'événements, donc :

$$\mathbb{P}([Z_2 = 1]) + \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} Z_2(\Omega) = \{1, 2\} \\ \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \dfrac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \dfrac{1}{n} \end{array} \right.}$$

  - Z_2 est une v.a.r. finie, elle admet donc une espérance.

$$\mathbb{E}(Z_2) = 1 \times \mathbb{P}([Z_2 = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = 2 - \frac{1}{n}}$$

□

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

Démonstration.

- L'événement $[Z_k = 1]$ est réalisé si on a obtenu un seul numéro lors de k tirages. Cela signifie que l'on a tiré la même boule lors des k tirages. Ainsi :

$$[Z_k = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = k]$$

L'événément $[Z_k = 1]$ étant une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k = 1]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = k]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ &= n \, \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{n^{k-1}}}$$

- Remarquons tout d'abord que si $k > n$ alors $[Z_k = k] = \varnothing$.
En effet, on ne peut obtenir strictement plus de n boules différentes lors de k tirages successifs dans une urne contenant n boules.

$$\boxed{\text{Si } k > n \text{ alors } \mathbb{P}([Z_k = k]) = 0.}$$

- On considère maintenant le cas où $k \leqslant n$.
L'univers Ω est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On procède alors par dénombrement.

L'univers est l'ensemble des k-uplets d'éléments de $[\![1, n]\!]$. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = n^k$.

Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = k]$ est un k-tirage lors duquel on a obtenu k boules distinctes. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

× le choix de la première boule : n possibilités,

× le choix de la deuxième boule : $n - 1$ possibilités,

× $\cdots$

× le choix de la $k^{\text{ème}}$ boule : $n - (k - 1)$ possibilités.

Il y a donc en tout : $n \times (n-1) \times \cdots \times (n - (k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ tels k-tirages.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \frac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!} \, \frac{1}{n^k}.}$$

Commentaire

- La première étape de la question consiste à écrire $[Z_k = 1]$ comme une réunion d'événements plus simples. On ne raisonne sur les probabilités qu'après avoir effectué cette étape primordiale de décomposition de l'événement.
- On pouvait mettre en place un dénombrement pour répondre à la première question. Détaillons cette rédaction.

  Un k-tirage qui réalise $[Z_k = 1]$ est un k-tirage lors duquel la même boule a toujours été tirée. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

  × le numéro de la boule qui est toujours tirée : n possibilités.

  Ainsi, il y a n tels k-tirages.
  On en conclut que : $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{n}{n^k} = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.
- On peut aussi faire la deuxième démonstration à l'aide des termes du chapitre dénombrement. L'événement $[Z_k = k]$ est réalisé par tous les k-tirages lors desquels on a obtenu k numéros distincts. Un tel k-tirage est un k-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.
  Autrement dit, un tel k-tirage est un k-arrangement de $[\![1, n]\!]$.
  Ainsi, $\text{Card}([Z_k = k]) = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

□

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n-\ell+1}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

Démonstration.

- On remarque que $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
  En effet, en k tirages, on peut obtenir :

  × au minimum 1 seule boule distincte (on obtient la même boule aux k tirages),

  × au maximum n boules distinctes (on a obtenu toutes les boules de l'urne).
  Ce cas ne peut se produire que lorsque $k \geqslant n$.
- La famille $\Big([Z_k = i]\Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell])$$

- Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$ et soit $i \in [\![1, n]\!]$. Étudions l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$.
  Cet événement est réalisé si les événements $[Z_k = i]$ et $[Z_{k+1} = \ell]$ sont tous les deux réalisés. L'événement $[Z_k = i]$ est réalisé si on a obtenu i numéros distincts lors des i tirages. Lorsqu'on procède à 1 tirage supplémentaire, deux cas se présentent :

  × soit on tire un numéro de boule déjà obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu i numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i]$ est alors réalisé.

  × soit on tire un numéro non obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu i numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i + 1]$ est alors réalisé.

  Ainsi, l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$ n'est réalisé que si $i = \ell$ ou $i + 1 = \ell$.

  $\boxed{\text{Pour tout } i \neq \ell \text{ et } i \neq \ell - 1,\ [Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing.}$

- Ainsi, pour tout $\ell \in [\![2, n]\!]$ (on écarte le cas $\ell = 2$ pour assurer que $\ell - 1 \geqslant 1$) :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
& = & \sum\limits_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
& = & \sum\limits_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i])\ \mathbb{P}_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = \ell]) & \begin{array}{l}\textit{(avec } \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1]) \neq 0 \\ \textit{et } \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \neq 0\textit{)}\end{array} \\
& = & \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) + \mathbb{P}([Z_k = \ell])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) &
\end{array}$$

  Il reste alors à déterminer chacune de ces deux probabilités conditionnelles.

- Si l'événement $[Z_k = \ell - 1]$ est réalisé, alors l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si on a pioché au $(k + 1)^{\text{ème}}$ tirage un numéro distinct des $\ell - 1$ numéros déjà obtenus lors les k tirages précédents. Il y a $n - (\ell - 1)$ tels numéros. Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{n - \ell + 1}{n}}$$

- Si l'événement $[Z_k = \ell]$ est réalisé, alors l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si on a pioché au $(k + 1)^{\text{ème}}$ tirage l'une des ℓ numéros déjà obtenus lors des k tirages précédents. Il y a ℓ tels numéros. Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{\ell}{n}}$$

- En combinant ces deux résultats, on obtient la fomule souhaitée.

$$\boxed{\text{Pour tout } \ell \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n - \ell + 1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])}$$

- Il reste alors à vérifier que la formule reste vraie si $\ell = 1$. D'après la question ***5.a)*** :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n}\ \frac{1}{n^{k-1}} = \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1])$$

  Enfin, comme $[Z_k = 0] = \varnothing$, $\mathbb{P}([Z_k = 0]) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule est aussi vérifiée pour } \ell = 1.}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) + 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)***, $Z_k(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$, et $Z_{k+1}(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$.
  Ainsi, Z_k et Z_{k+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc une espérance.
- Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Z_{k+1}) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_{k+1}=\ell]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \ell \left(\frac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) + \frac{n-\ell+1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell-1]) \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(n-\ell+1)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell-1]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-(\ell+\cancel{1})+\cancel{1})}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n\ell-\ell^2+n-\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) && \textit{(car } [Z_k=0]=\varnothing\textit{)} \\
= \ & \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) + \frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=n]) \right) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-1)\ell-\ell^2+n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) \\
= \ & \frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\cancel{\ell^2}+(n-1)\ \ell-\cancel{\ell^2}+n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) \\
= \ & n\ \mathbb{P}([Z_k=n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k=\ell]) \\
= \ & \left((n-1)\ \mathbb{P}([Z_k=n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) \right) + \left(\mathbb{P}([Z_k=n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k=\ell]) \right) \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_k=\ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k=\ell]) \ = \ \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k)+1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k)+1}$$

□

6. a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. D'après la question ***5.c)***, on obtient :

$$v_{k+1} = \mathbb{E}(Z_{k+1}) - n = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1 - n = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) - (n-1) = \frac{n-1}{n}\ (\mathbb{E}(Z_k) - n) = \frac{n-1}{n}\ v_k$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_k)_{k\geqslant 1} \text{ est géométrique de raison } \frac{n-1}{n}.}$$

Commentaire

Il faut faire bien attention aux notations ici. La suite est notée (v_k).
La raison $\dfrac{n-1}{n}$ est bien indépendante de k, indice de la suite.

□

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'après la question ***6.a)***, la suite (v_k) est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$, donc :

$$v_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$$

Or $v_1 = \mathbb{E}(Z_1) - n = 1 - n = -(n-1)$ d'après la question ***4.***, donc :

$$v_k = -(n-1) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = -(n-1) \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} = -\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} = -n \frac{(n-1)^k}{n^k} = -n \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

- Par définition, $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$, donc :

$$\mathbb{E}(Z_k) = v_k + n = -n \left(\frac{n-1}{n}\right)^k + n = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$$

□

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

7. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{5.a)}},\ \mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{4^{k-1}}.}$$

Par ailleurs, l'urne $\mathcal{U}$ ne contenant que 4 boules, on peut obtenir au maximum 4 numéros différentes en k tirages. Ainsi : $[Z_k \geqslant 5] = \varnothing$.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \mathbb{P}([Z_k \geqslant 5]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$

□

8. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

Démonstration.

- L'univers de cette expérience est l'ensemble des k-uplets de $[\![1, 4]\!]$.
  Donc, en particulier, $\text{Card}(\Omega) = 4^k$.
- Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = 2]$ est entièrement déterminé par :
  - × le choix des 2 numéros distincts parmi les 4 de l'urne : $\binom{4}{2}$ possibilités,
  - × les positions possibles pour les boules portant le 1^{er} numéro (sur les 2) :
    - s'il n'y a qu'une unique boule portant le 1er numéro sur les k tirages : $\binom{k}{1}$ possibilités,
    - s'il y a 2 boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\binom{k}{2}$ possibilités,
    - ...
    - s'il y a ℓ boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\binom{k}{\ell}$ possibilités,
    - ...
    - s'il y a $(k-1)$ boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\binom{k}{k-1}$ possibilités.

  On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\text{Card}([Z_k = 2]) &= \binom{4}{2} \sum_{\ell=1}^{k-1} \binom{k}{\ell} \\
&= \binom{4}{2} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \right) - \binom{k}{k} - \binom{0}{k} \right) \\
&= \binom{4}{2} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} \right) - 2 \right)
\end{aligned}$$

  Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} = 2^k$$

  On obtient alors :

$$\text{Card}([Z_k = 2]) = \binom{4}{2} (2^k - 2) = 6\,(2^k - 2)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_k = 2]) = \frac{\text{Card}([Z_k = 2])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6\,(2^k - 2)}{4^k}}$$

Commentaire

- On pouvait alléger cette présentation : une fois les deux numéros choisis ($\binom{4}{2}$ possibilités), on peut affirmer qu'à chaque tirage, on a le choix entre l'une de ces deux boules. Ce qui conduit à penser qu'il y a $\binom{4}{2}\ 2^k$ k-tirages convenables.
- Attention : si l'on procède ainsi, on peut ne tirer que la boule portant le 1er numéro (resp. l'autre numéro). Il y a donc $2\ k$ tirages à exclure. On retrouve bien les $\binom{4}{2}\ (2^k - 2)$ k-tirages convenables.

□

9. On note, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.
L'événement $[Z_k \leqslant 3]$ est réalisé si et seulement si au moins l'une des 4 boules n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages. Donc :

$$[Z_k \leqslant 3] = A_1 \ \cup\ A_2 \ \cup\ A_3 \ \cup\ A_4$$

- D'après la formule du crible :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \\ = & \mathbb{P}(A_1 \ \cup\ A_2 \ \cup\ A_3 \ \cup\ A_4) \\ = & \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ + & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{array}$$

- Les boules jouant un rôle similaire, la probabilité de ne pas en tirer une au cours de k tirages est la même, quelle que soit la boule considérée. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4)$$

  De même, la probabilité de ne pas en tirer deux au cours de k tirages est la même, quelle que soit les deux boules considérées. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_3 \cap A_4)$$

  Et, par le même raisonnement :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \ = \ 4\ \mathbb{P}(A_1) - 6\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- Enfin, on remarque que : $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$.
  En effet, il n'est pas possible, lors des k tirages, de ne tirer aucune des boules de l'urne. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$

□

Commentaire

Dans le programme, il est précisé que la formule du crible ne doit être connu que jusqu'à l'ordre 3. Il faudrait donc, si on suit le programme à la lettre, adopter la rédaction suivante.

- D'après la formule du crible appliquée à A_1 et $A_2 \cup A_3 \cup A_4$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}(A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4)) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_4)) \end{aligned}$$

- D'après la formule du crible appliquée à A_2, A_3 et A_4, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= 3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \textit{(car les boules sont indiscernables)} \end{aligned}$$

- D'après la formule du crible appliquée à $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ et $A_1 \cap A_4$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_4)) \\ =\ & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) \\ & - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_4)) \\ & - \mathbb{P}((A_1 \cap A_3) \cap (A_1 \cap A_4)) \\ & + \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3) \cap (A_1 \cap A_4)) \\ =\ & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) \\ & - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ & - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \\ & + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ =\ & 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \quad \textit{(car les boules sont indiscernables)} \\ =\ & 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \textit{(car } \bigcap_{i=1}^{4} A_i = \varnothing \textit{)} \end{aligned}$$

- Finalement : $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= \mathbb{P}(A_1) \\ &\quad + (3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ &\quad - (3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ &= 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.

- On remarque : $A_1 = [X_1 = 0]$.
  D'après la question ***1.*** : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) = \binom{k}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^k}$$

- On remarque que :

$$A_1 \cap A_2 = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] = [X_1 + X_2 = 0]$$

D'après la question ***3.a)*** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}([X_1 + X_2 = 0]) = \binom{k}{0} \left(\frac{2}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{4}\right)^{k-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

- On remarque que :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [X_4 = k]$$

En effet, ne piocher aucune des boules 1 à 3 au cours des k tirages, revient exactement à ne piocher que la boule numéro 4 au cours de ces k tirages.
D'après la question ***1.*** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}([X_4 = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^k}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

Démonstration.

- On calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \\ &= 4 \left(\frac{3}{4}\right)^k - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^k + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^k && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.b)}}\textit{)} \\ &= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}}$$

- On sait que :

$$[Z_k \leqslant 3] = [Z_k = 1] \cup [Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]$$

Les événements $[Z_k = 1]$, $[Z_k = 2]$ et $[Z_k = 3]$ sont 2 à 2 incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \mathbb{P}([Z_k = 1]) + \mathbb{P}([Z_k = 2]) + \mathbb{P}([Z_k = 3])$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k = 3]) &= \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) - \mathbb{P}([Z_k = 1]) - \mathbb{P}([Z_k = 2]) \\ &= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} - \frac{1}{4^{k-1}} - \frac{6\,(2^k - 2)}{4^k} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.}} \textit{ et } \textbf{\textit{8.}}\textit{)} \\ &= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + \cancel{4} - \cancel{4} - 6 \times 2^k + 12}{4^k} \\ &= \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k} \end{aligned}$$

- On remarque que :

$$[Z_k = 4] = \overline{[Z_k \leqslant 3]}$$

On obtient donc :

$$\mathbb{P}([Z_k = 4]) = 1 - \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 1 - \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 3]) = \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_k = 4]) = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}}$$ □

Exercice 3 (EDHEC 2020)

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

Démonstration.

- Dans le cas où $n = 1$, l'urne U contient une unique boule numérotée 1. Ainsi, l'événement $[X = 1]$ est toujours réalisé (autrement dit : $[X = 1] = \Omega$).
- Comme l'événement $[X = 1]$ est réalisé, on pioche 1 boule dans l'urne V. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès p (probabilité de piocher une boule blanche).
- La v.a.r. Y prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p).}$$

Commentaire

En toute rigueur, on a ici démontré que la **loi conditionnelle de Y sachant** $[X = 1]$ est la loi $\mathcal{B}(p)$. Cependant, comme $[X = 1] = \Omega$, cela revient bien à dire que la loi de Y est la loi $\mathcal{B}(p)$. En effet :

- comme $n = 1$, on peut obtenir 0 ou 1 boule blanche en piochant dans l'urne V.
  Ainsi : $Y(\Omega) \subset \{0, 1\}$.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y=1]) & = & \mathbb{P}([Y=1] \cap [X=1]) & \textit{(car } [X=1]=\Omega\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}([X=1])\ \mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1]) & \\ & = & \mathbb{P}(\Omega) \times p & \textit{(car la loi conditionnelle de } Y \textit{ sachant } [X=1] \textit{ est } \mathcal{B}(p)\textit{)} \\ & = & 1 \times p \ = \ p & \end{array}$$

On retrouve bien : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

☐

On revient au cas général

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- La première partie de l'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi n issues numérotées de 1 à n.
- La v.a.r. X correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

☐

3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X = k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}(\,[Y = i]\,)$.

Démonstration.

- Si l'événement $[X = k]$ est réalisé, c'est qu'on a pioché la boule numérotée k dans l'urne U. On effectue alors k tirages dans l'urne V.
  Cette deuxième partie de l'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir une boule blanche dans l'urne V).
- La v.a.r. Y correspond au nombre de succès de cette expérience.

On en déduit que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi $\mathcal{B}(k, p)$.

$$\text{Ainsi : } \forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

□

4. On rappelle les commandes **Scilab** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$,
- `grand(1, 1, 'bin', n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p,
- `grand(1, 1, 'geom', p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p,
- `grand(1, 1, 'poi', a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
X = ------
Y = ------
```

Démonstration.

- **Début du programme**
  Les valeurs de `n` et de `p` sont choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
p = input('entrez la valeur de p : ')
```

- **Simulation de X**
  D'après la question *2.*, la v.a.r. X suit la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. On stocke alors dans la variable `X` une simulation de la v.a.r. X à l'aide de l'appel suivant :

```
X = grand(1, 1, 'uin', 1, n)
```

  Notons qu'on simule ainsi un tirage dans l'urne U. Le numéro de la boule piochée est donc stockée dans la variable `X`.

- **Simulation de Y**
  En ligne 3, le numéro k de la boule piochée dans l'urne U est stockée dans la variable `X`. Une fois ce nombre connu, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi $\mathcal{B}(k, p)$ (d'après la question précédente). On stocke alors dans la variable `Y` une simulation de la v.a.r. Y à l'aide de l'appel suivant :

```
4  Y = grand(1, 1, 'bin', X, p)
```

□

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

Démonstration.

- Démontrons : $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour cela, on procède par double inclusion.
  ($\subset$) On effectue au maximum n tirages dans l'urne V. Le nombre de boules blanches obtenues peut donc varier au plus entre 0 et n. Donc : $Y(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
  ($\supset$) Montrons maintenant que la v.a.r. Y peut prendre chaque valeur entière entre 0 et n.
  Si on obtient la boule numérotée n dans l'urne U, on effectue alors n tirages dans l'urne V.
  × Si on n'obtient aucune boule blanche, alors l'événement $[Y = 0]$ est réalisé.
  × Si on obtient 1 boule blanche, alors l'événement $[Y = 1]$ est réalisé.
  × $\cdots$
  × Si on obtient n boules blanches, alors l'événement $[Y = n]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Finalement : } Y(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

- On donne dans cette démonstration des exemples de tirages qui réalisent les événements $[Y = i]$. Il était bien sûr possible d'en choisir d'autres.
  Par exemple, pour l'événement $[Y = 0]$, si on obtient la boule numérotée 2 dans l'urne U, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne V.
  Si ce 2-tirage ne comporte pas de boule blanche, alors l'événement $[Y = 0]$ est réalisé.
- On peut un peu moins détailler la démonstration de cette question en rédigeant différemment :
  Si on obtient la boule numérotée n dans l'urne U, alors on effectue un n-tirage dans l'urne V, les tirages dans cette urne peuvent fournir de 0 à n boules blanches. Donc, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, l'évément $[X = i]$ peut être réalisé.
- Comme l'énoncé demande de **justifier** : $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, on peut penser qu'une réponse brève était attendue.
- Remarquons que pour la suite de l'exercice, notamment la détermination de la loi de Y, l'inclusion « $Y(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ » suffit.

- La famille $(\,[X=k]\,)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=0]) & \textit{(car : } \forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k])\neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}\times\dbinom{k}{0}\ p^0\ (1-p)^{k-0} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.}} \textit{ et } \textbf{\textit{3.}}\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(1-p)^k & \\
& = & \dfrac{1}{n}\times(1-p)^1\ \dfrac{1-(1-p)^n}{\cancel{1}-(\cancel{1}-p)} & \textit{(car : } 1-p\neq 1\textit{)} \\
& = & \dfrac{(1-p)\ \big(1-(1-p)^n\big)}{n\ p} &
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{Comme } q=1-p, \text{ on obtient : } \mathbb{P}([Y=0]) = \dfrac{q\ (1-q^n)}{n\ (1-q)}.}$$

□

b) Écrire, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(\,[Y=i]\,)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Démonstration.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$.
La famille $(\,[X=k]\,)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=i]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=i]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) & \textit{(car : } \forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k])\neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) & \textit{(car } X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n}\left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{i-1}\mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i])} + \sum\limits_{k=i}^{n}\mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i])\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=i}^{n}\dbinom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.}}\textit{)}
\end{array}
$$

$$\boxed{\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([Y=i]) = \dfrac{1}{n}\ p^i\ \sum\limits_{k=i}^{n}\dbinom{k}{i}\ (1-p)^{k-i}}$$

□

6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Démontrer : $i \dbinom{k}{i} = k \dbinom{k-1}{i-1}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$i \binom{k}{i} \ = \ i \ \frac{k!}{i! \ (k-i)!} \ = \ \frac{k!}{(i-1)! \ (k-i)!}$$

- De plus :

$$k \binom{k-1}{i-1} \ = \ k \ \frac{(k-1)!}{(i-1)! \ \big((k-\cancel{1}) - (i-\cancel{1})\big)!} \ = \ \frac{k!}{(i-1)! \ (k-i)!}$$

$$\boxed{i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}}$$

Commentaire

Cette relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se démontrer par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à k éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient k individus)
On souhaite alors construire une partie P à i éléments de cet ensemble contenant 1 élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de i individus dans lequel figure 1 représentant de ces individus).*
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à i éléments de E : $\dbinom{k}{i}$ possibilités.

On distingue ensuite 1 élément de cet ensemble P : $\dbinom{i}{1}$ possibilités.

(on choisit d'abord les i individus et on élit ensuite 1 représentants de ces individus)

Ainsi, il y a $\dbinom{k}{i} \dbinom{i}{1} = \dbinom{k}{i} \ i$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\dbinom{k}{1}$ possibilités.

On choisit ensuite $i-1$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\dbinom{k-1}{i-1}$ possibilités.

(on choisit d'abord 1 représentant puis on leur adjoint un groupe de $i-1$ individus)

Ainsi, il y a $\dbinom{k}{1} \dbinom{k-1}{i-1} = k \dbinom{k-1}{i-1}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat souhaité. □

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i \, q^{k-i} \right)$$

Démonstration.

- Tout d'abord, la v.a.r. Y admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y) & = & \sum\limits_{i=0}^{n} i\,\mathbb{P}([Y=i]) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}([Y=i]) & \textit{(car : } 0\times\mathbb{P}([Y=0])=0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} i \left(\dfrac{1}{n}\ p^i \sum\limits_{k=i}^{n} \dbinom{k}{i}\ (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après } \textbf{5.b)}\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=i}^{n} i \dbinom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} i \dbinom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} i \dbinom{k}{i}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} k \dbinom{k-1}{i-1}\ p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=1}^{k} \dbinom{k-1}{i-1}\ p^i\ q^{k-i} \right).}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\,p}{2}$.

Démonstration.
On reprend les calculs précédents.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y) & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=1}^{k} \dbinom{k-1}{i-1}\ p^i\ q^{k-i} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dbinom{k-1}{i}\ p^{i+1}\ q^{k-(i+1)} \right) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \dfrac{p}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dbinom{k-1}{i}\ p^{i}\ q^{(k-1)-i} \right) & \\
& = & \dfrac{p}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k\ (p+q)^{k-1} & \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
& = & \dfrac{p}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k & \textit{(car : } p+q=1\textit{)} \\
& = & \dfrac{p}{\cancel{n}} \times \dfrac{\cancel{n}(n+1)}{2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\ p}{2}.}$$

□

7. a) Établir :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\,(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2}\, p^i\, q^{k-i} \right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. $Y(Y-1)$ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie (car Y est une v.a.r. finie).
- De plus, par théorème de transfert :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y(Y-1)) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\,(i-1)\,\mathbb{P}([Y=i]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{i=2}^{n} i\,(i-1)\,\mathbb{P}([Y=i]) & \textit{(car : } 0\times(-1)\times\mathbb{P}([Y=0])=0 \\
& & & \textit{et } 1\times 0\times\mathbb{P}([Y=1])=0\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{i=2}^{n} i\,(i-1) \left(\frac{1}{n}\, p^i \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i}\, (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} i\ (i-1)\, \binom{k}{i}\, p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{2\leqslant i\leqslant k\leqslant n} i\ (i-1)\, \binom{k}{i}\, p^i\ (1-p)^{k-i} & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{k} i\ (i-1)\, \binom{k}{i}\, p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{k} k\ (i-1)\, \binom{k-1}{i-1}\, p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{k} k\ (k-1)\, \binom{k-2}{i-2}\, p^i\ (1-p)^{k-i} \right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.a)}} \\
& & & \textit{appliquée à } i-1 \textit{ et } k-1\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\,(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2}\, p^i\, q^{k-i} \right).}$$

□

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

Démonstration.
Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. On reprend les calculs précédents.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) & = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\ (k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2}\, p^i\ q^{k-i} \right) & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\ (k-1) \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i}\, p^{i+2}\ q^{k-(i+2)} \right) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \displaystyle\frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k\ (k-1) \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i}\, p^i\ q^{(k-2)-i} \right) &
\end{array}$$

Par formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\,(p+q)^{k-1} \\
&= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1) && \textit{(car : } p+q=1\textit{)} \\
&= \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\,k && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \\
&= \frac{p^2}{\cancel{n}} \left(\frac{(n-1)\,\cancel{n}\,\big(2\,(n-1)+1\big)}{6} + \frac{(n-1)\,\cancel{n}}{2} \right) \\
&= p^2\,(n-1)\,\frac{(2n-1)+3}{6} \\
&= p^2\,(n-1)\,\frac{2n+2}{6} \\
&= p^2\,(n-1)\,\frac{n+1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) = \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}.}$$

□

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

Démonstration.

- D'une part, pour $n = 1$, on obtient :

$$\frac{(1^2-1)\,p^2}{3} = 0$$

- D'autre part, d'après la question , lorsque $n = 1$, alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
  - × On en déduit que la v.a.r. $Y(Y-1)$ admet une espérance, car c'est une v.a.r. finie.
  - × De plus, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) = 0 \times (0-1) \times \mathbb{P}([Y=0]) + 1 \times 0 \times \mathbb{P}([Y=1]) = 0$$

$$\boxed{\text{L'expression de la question précédente reste donc valable pour } n = 1.}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que, dans le cas $n = 1$, la v.a.r. $Y(Y-1)$ est constante égale à 0.
Démontrons le.
Soit $\omega \in \Omega$.
Comme $n = 1$, alors : $Y(\Omega) \subset \{0, 1\}$. Deux cas se présentent alors :

- si $Y(\omega) = 0$, alors :

$$\big(Y(Y-1)\big)(\omega) \ = \ Y(\omega)\big(Y(\omega)-1\big) \ = \ 0 \times (-1) \ = \ 0$$

- si $Y(\omega) = 1$, alors :

$$\big(Y(Y-1)\big)(\omega) \ = \ Y(\omega)\big(Y(\omega)-1\big) \ = \ 1 \times 0 \ = \ 0$$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\big(Y(Y-1)\big)(\omega) = 0$. Ainsi la v.a.r. $Y(Y-1)$ est constante égale à 0. □

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une variance car c'est une v.a.r. finie.
- De plus, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) \ = \ E\left(Y^2\right) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2$$

Or :

$$Y^2 \ = \ Y(Y-1) + Y$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}\big(Y(Y-1)+Y\big) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \\ &= \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) + \mathbb{E}(Y) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) + \mathbb{E}(Y) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2}$$

Commentaire

Rappelons qu'il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. On peut même trouver des questions simples en bout de sujet comme ici. Il est donc important de commencer son épreuve par une brève lecture de sujet pour les repérer.

□

Exercice 4 (adapté d'un oral HEC)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique (notée $\mathscr{B}$) de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on pose : $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer : $2f - f^2 = \text{id}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Ainsi :

$$2\,A - A^2 \;=\; \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; I_3$$

- En revenant à la définition de A, cette égalité se réécrit :

$$\begin{array}{rcll} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\text{id}) & = & 2\,\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^2 & \\ & = & 2\,\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2)\big) & \textit{(par propriété de } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\ & = & \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(2\,f - f^2\big) & \textit{(par linéarité de } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \end{array}$$

Finalement, par bijectivité de l'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)$, on en déduit :

$$\text{id} \;=\; 2\,f - f^2$$

$$\boxed{\text{On a bien : } 2\,f - f^2 \;=\; \text{id}.}$$

Commentaire

L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{array}{rcl} f & \longleftrightarrow & A \\ f \circ f & \longleftrightarrow & A \times A \end{array}$$

Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme. □

2. Montrer que l'endomorphisme f est un automorphisme.
Quel est l'automorphisme réciproque de f ?

Démonstration.
D'après la question précédente : $2\,f - f^2 \ = \ \mathrm{id}$. On en déduit :

$$f \circ (2\,\mathrm{id} - f) \ = \ \mathrm{id} \quad \text{ et } \quad (2\,\mathrm{id} - f) \circ f \ = \ \mathrm{id}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } f \text{ est bijectif de bijection réciproque } f^{-1} = 2\,\mathrm{id} - f.}$$

□

3. Montrer que f admet l'unique valeur propre 1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, on a : $f^2 - 2\,f + \mathrm{id} \ = \ 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
  On en déduit que le polynôme $Q(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f. Ainsi :
  $$\mathrm{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{1\}$$
  $$\boxed{\text{Le réel 1 est donc l'unique valeur propre possible de } f.}$$

Commentaire

- Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ défini sur un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de f alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\,Q$ est toujours un polynôme annulateur de f puisque :
  $$(\alpha\,Q)(f) \ = \ \alpha\,Q(f) \ = \ 0_{\mathscr{L}(E)}$$
  Cela suffit à démontrer que f possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur de f puisque :
  $$R(f) \ = \ (f - 5\,\mathrm{id}) \circ Q(f) \ = \ 0_{\mathscr{L}(E)}$$
  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'un endomorphisme.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de f. Si c'était le cas, f aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\ Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre de f.

- Démontrons que 1 est valeur propre de f.
  $$A - I \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
  Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes égales ($C_2 = C_1$).
  On en déduit que 1 est valeur propre de A.
  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Sp}(A) = \{1\} \text{ et } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{1\}.}$$

Commentaire

On obtient en particulier que le réel 0 n'est pas valeur propre de A.
On retrouve ainsi le fait que l'endomorphisme f est bijectif.

- Démontrons que f n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que f est diagonalisable. Il en est alors de même de la matrice A.
  Il existe alors :
  × $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,
  × $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

  telles que : $A = PDP^{-1}$. Or $\text{Sp}(A) = \{1\}$. Donc :

$$A \ = \ P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \ = \ P\, I_3\, P^{-1} \ = \ PP^{-1} \ = \ I_3$$

  ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

4. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Quelle est sa dimension ?

Démonstration.

- Déterminons $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id})$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_1(f) & \Longleftrightarrow & (f - \text{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A - I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_1(f) & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y+z\} \\ & = & \{(-y+z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{y\cdot(-1,1,0)+z\cdot(1,0,1) \mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((-1,1,0),(1,0,1)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_1(f) = \mathrm{Vect}\left((-1,1,0),(1,0,1)\right).}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille $\big((-1,1,0),(1,0,1)\big)$ contient seulement 2 vecteurs. Cette famille est donc finie, de cardinal 2 (ce qu'on note $\mathrm{Card}\,\big((-1,1,0),(1,0,1)\big) = 2$).
- L'ensemble $\mathrm{Vect}\left((-1,1,0),(1,0,1)\right)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $(-1,1,0)$ et $(1,0,1)$. C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base d'un espace vectoriel, tout vecteur de cet espace vectoriel se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\mathrm{Card}\,\big(\mathrm{Vect}\left((-1,1,0),(1,0,1)\right)\big)}$ et $\cancel{\dim\big((-1,1,0),(1,0,1)\big)}$ n'ont aucun sens !
- Par ailleurs, il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si u et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont deux représentations différentes du même triplet u, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{x\cdot e_1 + y\cdot e_2 + z\cdot e_3}_{\in\,\mathbb{R}^3} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}}_{\in\,\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\left((-1,1,0),(1,0,1)\right)}_{\subsetneq\, E_1(f)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right)}_{\subsetneq\, E_1(A)}$$

- La famille $\mathcal{F}_1 = \big((-1,1,0),(1,0,1)\big)$ est :
  - × génératrice de $E_1(f)$,
  - × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  On en conclut que $\mathcal{F}_1$ est une base de $E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_1(f)\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{F}_1\big) = 2.}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$. Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 1$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Si l'on choisit $x \neq 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il y a alors plusieurs possibilités :

  × choisir $y = -x$ et donc $z = 0$.
  En prenant par exemple $x = 1$, on obtient : $E_1(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

  × choisir $y = 0$ et donc $z = x$.
  En prenant par exemple $x = 1$, on obtient : $E_1(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  On en conclut finalement : $E_1(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) = \dim\big(E_1(A)\big) + \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\text{rg}(A - I_3)}$$

  (par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

  Ainsi : $\dim\big(E_1(A)\big) = 3 - 1 = 2$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

□