DS4 (version B)

I. EXERCICE (HEC 2005)

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\,\mathrm{Id}$

A. Étude du cas n = 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \big(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{2}\big)$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

- **1 pt :** $A^2 = 4\ I$
- **1 pt :** $f^2 = 4\ f$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$ **car** $\det(A) = 0$
- **2 pts :** $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ **par théorème du rang**

2. On note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u.
En déduire la dimension de F et donner une base de F. On notera v le vecteur de cette base.

- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\big((\sqrt{2}-2, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}-2)\big)$
- **2 pts : ces deux vecteurs sont colinéaires car**
  - **1 pt :** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\ (\sqrt{2}-2) = \sqrt{2}$
  - **1 pt :** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\ \sqrt{2} = -(\sqrt{2}+2)$
- **1 pt :** (u) **est une base de** $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id})$ **(libre + générateur), et dimension** 1
- **1 pt : théorème du rang écrit correctement donc** $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) = 1$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\big((\sqrt{2}+2, \sqrt{2})\big)$

b) Montrer : $G = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$.

- **1 pt :** $u \in \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$
- **2 pts :** $G \supset \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$ **(mieux si fait à l'aide des dimensions)**

3. *a)* Justifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

- **1 pt : libre**
- **1 pt : de bon cardinal**

b) Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

- **1 pt : valeur propre** -2
- **1 pt : valeur propre** 2
- **1 pt :** $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

4. ***a)*** Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

- **1 pt :** $f \circ \frac{1}{4} f = \mathrm{id} = \frac{1}{4} f \circ f$
- **1 pt :** $f^{-1} = \frac{1}{4} f$

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f.

- **1 pt :** $P(X) = X^2 - 4X$ **est un polynôme annulateur**
- **1 pt : ainsi** 2 **et** -2 **sont les deux seules valeurs propres possibles de** f

c) Vérifier que $2\,\mathrm{Id}$ et $-2\,\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(*)$.

- **1 pt : vérification** $2\mathrm{id}$
- **1 pt : vérification** $-2\mathrm{id}$

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\,\mathrm{Id}$ et on note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

5. Soit x un élément de E. Montrer que $(f\,(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $(f\,(x) + 2x) \in F$.
En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

- **2 pts :** $(f\,(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ **(dont 1 pt pour justification** $f \circ f = 4\mathrm{id}$**)**
- **1 pt :** $(f\,(x) + 2x) \in F$
- **2 pts :** $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ **(dont 1 pour exprimer ce que signifie** $w \in G$**)**
- **1 pt :** $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset F$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ **par l'absurde**
- **1 pt : de même pour** $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$

6. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

a) Exprimer $(f - 2\,\mathrm{Id})\,(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

- **1 pt :** $(f - 2\,\mathrm{Id})(x) = -4x$
- **1 pt :** $x = (f - 2\mathrm{id})(-\frac{1}{4}x)$
- **1 pt : conclusion**

b) Montrer que f est diagonalisable.

- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id})) = \dim(\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}))$
- **1 pt : théorème du rang** $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) = n - \dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id}))$
- **1 pt : conclusion** $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) + \dim(\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id})) = n$

Problème

Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité.
Les cumulants d'ordre 3 *et* 4 *permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui viennent compléter la description usuelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion) ; ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.*

Dans tout le problème :

- on note $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$;
- sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$;
- pour tout variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire $\mathrm{e}^{t\,X}$ admet une espérance, on pose :
$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln\big(M_X(t)\big);$$
(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants* de X)
- lorsque, pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle *cumulant d'ordre p de X*, noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée $p^{\text{ème}}$ de K_X en 0 :
$$Q_p(X) \;=\; K_X^{(p)}(0)$$

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes à valeurs entières ;
- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}([S=-1]) \;=\; \mathbb{P}([S=+1]) \;=\; \frac{1}{2}$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : X finie donc $\mathbf{e}^{t\,X}$ finie. Elle admet donc des moments à tout ordre (notamment espérance).**
- **1 pt : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \mathbf{e}^{t\,k}\, \mathbb{P}([X=k])$ par th de transfert**
- **1 pt : la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme finie**

b) Justifier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p)$.

- **3 pts : par récurrence (ou avec les mains) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X^{(p)}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} k^p\, \mathbf{e}^{k\,t}\, \mathbb{P}([X=k])$**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
- **1 pt : $M_X^{(p)}(0) \;=\; \sum\limits_{k=-n}^{n} k^p\, \mathbf{e}^{k\times 0}\, \mathbb{P}([X=k]) \;=\; \sum\limits_{k=-n}^{n} k^p\, \mathbb{P}([X=k]) \;=\; \mathbb{E}(X^p)$**

c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n,n]\!]$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X.
On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} G_X(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k-n])\, x^k \\ G_Y(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([Y = k-n])\, x^k \end{array} \right.$$

(i) Vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité : $G_X(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{nt}\, M_X(t)$.

- 1 pt : décalage d'indice $(k - n \to k)$

- 1 pt : gestion des exponentielles

(ii) Justifier la relation : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(\mathrm{e}^t) = G_Y(\mathrm{e}^t)$.

- 1 pt : $G_X\left(\mathbf{e}^t\right) = \mathbf{e}^{n\,t}\, M_X(t) = \mathbf{e}^{n\,t}\, M_Y(t) = G_Y\left(\mathbf{e}^t\right)$

(iii) En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X.

- 1 pt : $G_X(x) = G_Y(x)$ **car** $G_X\left(\mathbf{e}^{\ln(x)}\right) = G_Y\left(\mathbf{e}^{\ln(x)}\right)$

- 1 pt : $(G_X - G_Y)(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} \big(\mathbb{P}([X = k-n]) - \mathbb{P}([Y = k-n])\big)\, x^k$

- 1 pt : $G_Y - G_X$ **est un polynôme à une infinité de racines donc nul**

- 1 pt : tous les coefficients de $G_Y - G_X$ **sont nuls**

2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.
On suppose que les variables aléatoires X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = S\, X_2$.

a) (i) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2.

- 1 pt : $Y_2(\Omega) = (S\, X_2)(\Omega) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\} = [\![-2, 2]\!]$

(ii) Calculer les probabilités $\mathbb{P}([Y_2 = y])$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2.

- 2 pts : $\mathbb{P}([Y_2 = -2]) = \dfrac{1}{8}$

× **1 pt :** $[Y_2 = -2] \ = \ [S\, X_2 = -2] \ = \ [S = -1] \cap [X_2 = 2]$

× **1 pt : indépendance de** S **et** X_2

- 1 pt : de même $[Y_2 = -1] \ = \ [S = -1] \cap [X_2 = 1]$ **donc par indépendance :** $\mathbb{P}([Y_2 = -1]) = \dfrac{1}{4}$

- 1 pt : de même $[Y_2 = 1] = [S = 1] \cap [X_2 = 1]$ **et** $[Y_2 = 2] = [S = 1] \cap [X_2 = 2]$

- 1 pt : ainsi $\mathbb{P}([Y_2 = 1]) = \dfrac{1}{4}$ **et** $\mathbb{P}([Y_2 = 2]) = \dfrac{1}{8}$

- 1 pt : enfin $\mathbb{P}([Y_2 = 0]) \ = \ \mathbb{P}([X_2 = 0]) \ = \ \dbinom{2}{0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \ = \ \dfrac{1}{4}$

b) Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S+1)$ suit la même loi que Y_2.

- **1 pt : en notant $T_2 = X_2 - (S+1)$, on a $T_2(\Omega) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\}$**
- **1 pt : FPT sur le SCE** $([S=-1], [S=1])$
  $\mathbb{P}([T_2 = k]) = \mathbb{P}([T_2 = k] \cap [S=-1]) + \mathbb{P}([T_2 = k] \cap [S=1])$
- **1 pt :** $= \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_2 = k]) + \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_2 = k+2])$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([T_2 = k]) = \mathbb{P}([Y_2 = k])$ **par calcul pour chaque** $k \in [\![-2, 2]\!]$

3. Le script **Scilab** suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```
1 n = 10
2 X = grand(n,2,'bin',2,0.5)
3 B = grand(n,2,'bin',1,0.5)
4 S = 2 ⋆ B - ones(n,2)
5 Z1 = [S(1:n,1) .⋆ X(1:n,1) , X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)]
6 Z2 = [S(1:n,1) .⋆ X(1:n,1) , X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)]
```

a) Que contiennent les variables `X` et `S` après l'exécution des quatre premières instructions ?

- **1 pt : `S` et `X` dont des matrices à `n` lignes et 2 colonnes,**
- **1 pt : la première colonne de `X` contient une observation $(c_1, \dots, c_n)$ d'un `n`-échantillon $(C_1, \dots, C_n)$ de X, et la deuxième colonne de `X` contient une observation $(c'_1, \dots, c'_n)$ d'un `n`-échantillon $(c'_1, \dots, C'_n)$ de `X`.**
- **1 pt : introduction de la v.a.r. $2B-1$ qui suit la même loi que la v.a.r. S**
- **1pt : où la première colonne contient une observation $(s_1, \dots, s_n)$ d'un `n`-échantillon $(S_1, \dots, S_n)$ de la v.a.r. S et la deuxième colonne contient une observation $(s'_1, \dots, s'_n)$ du `n`-échantillon $(S'_1, \dots, S'_n)$ de la v.a.r. S**
- **1 pt : `(BONUS)` qualité des explications**

b) Expliquer pourquoi, après l'exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices `Z1` et `Z2` contient une simulation de la variable aléatoire Y_2.

- **1 pt : l'instruction `S(1:n,1) .⋆ X(1:n,1)` matrice colonne à `n` lignes contenant une observation du `n`-échantillon $(S_1\, C_1, \dots, S_n\ C_n)$ de la v.a.r. SC qui suit la même loi que $Y2$**
- **1 pt : l'instruction `X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)` matrice colonne à `n` lignes contenant une observation du `n`-échantillon $(C_1 - S_1 - 1, \dots, C_n - S_n - 1)$ de la v.a.r. $C-(S+1)$ qui suit la même loi que $Y2$**
- **1 pt : la première colonne de `Z2` est identique à celle de `Z1`**
- **1 pt : la deuxième colonne de `Z2` contient une observation d'un nouvel `n`-échantillon $(C'_1 - S'_1 - 1, \dots, C'_n - S'_n - 1)$ de la v.a.r. $C-(S+1)$ qui suit la même loi que $Y2$**

c) On modifie la première ligne du script précédent en affectant à `n` une valeur beaucoup plus grande que 10 (par exemple, 100000) et en lui adjoignant les deux instructions 7 et 8 suivantes :

```
7 p1 = length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))) / n
8 p2 = length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))) / n
```

Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour `p1` et `p2` après l'exécution des huit lignes du nouveau script ?

Dans le langage **Scilab**, la fonction `length` fournit la « longueur » d'un vecteur ou d'une matrice et la fonction `find` calcule les positions des coefficients d'une matrice pour lesquels une propriété est vraie, comme l'illustre le script suivant :

```
--> A = [1 ; 2 ; 0 ; 4]
--> B = [2 ; 2 ; 4 ; 3]
--> length(A)
   ans = 4.
--> length([A , B])
   ans = 8.
--> find(A < B)
   ans = 1. 3. // car 1 < 2 et 0 < 4, alors que 2 ⩾ 2 et 4 ⩾ 3
```

- **2 pts : la variable `p1` contient une valeur approchée de** $\mathbb{P}([S\,X_2 = X_2 - S - 1])$
- **2 pts : la variable `p2` contient une valeur approchée de** $\mathbb{P}([S\,X_2 = X_2' - S - 1])$ **où la v.a.r.** X_2' **suit même loi que** X_2

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = S\,X_n$.

a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- **1 pt : la v.a.r.** $\mathrm{e}^{t\,X_n}$ **est une v.a.r. finie ; elle admet donc des moments à tout ordre**
- **1 pt : par th de transfert** $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X_n}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,t}\ \mathbb{P}([X_n = k])$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \left(\mathrm{e}^t\right)^k\ 1^{n-k} = \dfrac{1}{2^n}\left(\mathrm{e}^t + 1\right)^n$ **(d'après la formule du binôme de Newton)**

b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R},\ M_{Y_n}(t) = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ \big((1+\mathrm{e}^t)^n + (1+\mathrm{e}^{-t})^n\big)$.

- **1 pt : la v.a.r.** $\mathrm{e}^{t\,Y_n}$ **est une v.a.r. finie ; elle admet donc des moments à tout ordre**
- **1 pt : FPT sur** $([S=-1]\,,[S=1])$ **donne** $\mathbb{P}([Y_n = k]) = \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = -k]) + \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = k])$
- **1 pt : cas** $k = 0$**,** $\mathbb{P}([Y_n = 0]) = \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = 0]) + \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = 0]) = \mathbb{P}([X_n = 0]) = \dbinom{n}{0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-0}$
- **1 pt : cas** $k \in [\![-n, 0[\![$**, alors** $\mathbb{P}([Y_n = k]) \ = \ \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = -k]) + \cancel{\dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}(\varnothing)} \ = \ \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = -k])$
- **1 pt : cas** $k \in]\!]0, n]\!]$**,** $\mathbb{P}([Y_n = k]) \ = \ \cancel{\dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}(\varnothing)} + \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = k]) \ = \ \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = k])$
- **1 pt :** $M_{Y_n}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{k\,t}\ \mathbb{P}([Y_n = k]) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=-n}^{-1}\left(\mathrm{e}^{k\,t}\ \mathbb{P}([X_n = -k])\right) + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{k\,t}\ \mathbb{P}([X_n = k])\right)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=-n}^{-1} \mathrm{e}^{k\,t}\ \mathbb{P}([X_n = -k]) = \dfrac{1}{2^n}\left((\mathrm{e}^{-t}+1)^n - 1\right)$
  (décalage d'indice et binôme de Newton)
- **1 pt : de même** $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{k\,t}\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{1}{2^n}\left((\mathrm{e}^t+1)^n - 1\right)$
- **0 pt : conclusion**

c) En utilisant l'égalité $(1+\mathrm{e}^{-t})^n = \mathrm{e}^{-nt}\,(1+\mathrm{e}^{t})^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

- **1 pt : démo** $(1+\mathbf{e}^{-t})^n = \mathbf{e}^{-nt}\,(1+\mathbf{e}^{t})^n$
- **1 pt : si** H_n **existe** $M_{X_n-H_n}(t) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\,(X_n-H_n)}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\,X_n}\ \mathbf{e}^{-t\,H_n}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\,X_n}\right)\ \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{-t\,H_n}\right)$ **(car, par lemme des coalitions, les v.a.r.** $\mathbf{e}^{t\,X_n}$ **et** $\mathbf{e}^{-t\,H_n}$ **sont indépendantes)**
- **1 pt :** $M_{Y_n}(t) = \dfrac{1}{2^n}\ (1+\mathbf{e}^{t})^n \times \dfrac{1}{2}\ \left(1+\mathbf{e}^{-nt}\right)$
- **1 pt :** $M_{X_n-H_n}(t) = M_{Y_n}(t) \Leftrightarrow \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{-t\,H_n}\right) = \mathbf{e}^{-0\,t}\ \dfrac{1}{2} + \mathbf{e}^{-nt}\ \dfrac{1}{2}$
- **1 pt : la v.a.r.** H_n **telle que** $H_n(\Omega) = \{0, n\}$ **et** $\mathbb{P}([H_n = 0]) = \mathbb{P}([H_n = n]) = \dfrac{1}{2}$ **permet de conclure**

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et $\mathcal{D}_X$ le domaine de définition de la fonction K_X.

a) Donner la valeur de $K_X(0)$.

- **1 pt : la v.a.r.** $\mathbf{e}^{0\,X} = 1$ **est finie. Elle admet donc une espérance et** $M_X(0)$ **est bien défini**
- **1 pt :** $M_X(0) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{0\,X}\right) = \mathbb{E}(1) = 1$ **et** $K_X(0) = \ln\left(M_X(0)\right) = \ln(1) = 0$

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = a\,X + b$. Justifier pour tout réel t pour lequel $a\,t$ appartient à $\mathcal{D}_X$, l'égalité :

$$K_Y(t) \ = \ b\,t + K_X(a\,t)$$

- **1 pt : comme** $a\,t \in \mathcal{D}_X$**, alors** $K_X(a\,t)$ **est bien défini, donc** $M_X(a\,t)$ **également et :** $M_X(a\,t) > 0$
- **1 pt :** $M_X(a\,t) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{a\,t}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\,(a\,X)}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\,(a\,X+b)-b\,t}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\,Y}\ \mathbf{e}^{-b\,t}\right) = \mathbf{e}^{-b\,t}\ \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\,Y}\right)$
- **1 pt :** $K_Y(t) = \ln\left(M_Y(t)\right) = \ln\left(\mathbf{e}^{b\,t}\ M_X(a\,t)\right) = b\,t + \ln\left(M_X(a\,t)\right) = b\,t + K_X(a\,t)$

c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi.
Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variables aléatoire X ?

- **1 pt : pour tout** $t \in \mathcal{D}_X$**, on a :** $-t \in \mathcal{D}_X$ **car comme** X **et** $-X$ **ont même loi, les v.a.r.** $\mathbf{e}^{t\,X}$ **et** $\mathbf{e}^{-t\,X}$ **ont même loi**
- **1 pt : d'après la question précédente (appliquée à** $a = -1$ **et** $b = 0$**)** $K_{-X}(t) = 0 \times t + K_X(-t) = K_X(-t)$
- **1 pt :** $M_{-X}(t) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\,(-X)}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\,X}\right) = M_X(t)$ **et donc** $K_X(t) = K_{-X}(t) = K_X(-t)$
- **1 pt : par récurrence immédiate :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathcal{D}_X$, $K_X^{(n)}(t) = (-1)^n\, K_X^{(n)}(-t)$
- **1 pt :** $K_X^{(2p+1)}(0) = -K^{(2p+1)}(0) \ \Leftrightarrow\ 2\,K_X^{(2p+1)}(0) = 0 \ \Leftrightarrow\ K_X^{(2p+1)}(0) = 0$ **et donc** $\forall p \in \mathbb{N}$, $Q^{(2p+1)}(X) = 0$

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y.

a) Monter que pour tout réel t appartenant à la fois à $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$, on a : $K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$.

- **1 pt : si $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$ les quantités $K_X(t)$ et $K_Y(t)$ sont bien définies. En particulier, $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ sont bien définies, $M_X(t) > 0$ et $M_Y(t) > 0$**
- **1 pt : et enfin la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,(X+Y)} = \mathrm{e}^{t\,X} \times \mathrm{e}^{t\,Y}$ admet une espérance par indépendance (lemme des coalitions)**
- **1 pt :** $M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\ \mathrm{e}^{t\,Y}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right)\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,Y}\right) = M_X(t)\ M_Y(t)$
- **1 pt : $K_{X+Y}(t)$ est bien définie et** $K_{X+Y}(t) = \ln\big(M_{X+Y}(t)\big) = \ln\big(M_X(t)\,M_Y(t)\big) = \ln\big(M_X(t)\big) + \ln\big(M_Y(t)\big) = K_X(t) + K_Y(t)$

b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X, Y et $X+Y$.

- **1 pt :** $\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y,\quad K_{X+Y}^{(p)}(t) = K_X^{(p)}(t) + K_X^{(p)}(t)$
- **1 pt : $0 \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$ donc** $Q_p(X+Y) = K_{X+Y}^{(p)}(0) = K_X^{(p)}(0) + K_Y^{(p)}(0) = Q_p(X) + Q_p(Y)$

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que la fonction M_U est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_U(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

- **1 pt : par théorème de transfert, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,U}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\ dx$ est absolument convergente et cela revient à démonter convergence car ...**
- **1 pt : la fonction f_u est nulle en dehors de $[0,1]$, donc** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\ dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\ dx$
- **1 pt : la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\ dx$ est bien définie**
- **1 pt : si $t = 0$, alors d'après la question *5.a)* : $M_U(0) = 1$.**
- **1 pt : si $t \neq 0$,** $M_U(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,U}\right) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\ dx = \left[\ \frac{1}{t}\ \mathrm{e}^{t\,x}\ \right]_0^1 = \frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^t - 1\right)$

b) Calculer la dérivée de la fonction M_U en tout point $t \neq 0$.

- **1 pt : M_U dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par quotient ...**
- **1 pt :** $M_U'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t \times t - (\mathrm{e}^t - 1) \times 1}{t^2} = \dfrac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2}$

c) Trouver la limite du quotient $\dfrac{M_U(t) - 1}{t}$ lorsque t tend vers 0.

- **1 pt :** $\dfrac{M_U(t) - 1}{t} = \dfrac{\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} - 1}{t} = \dfrac{\frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t}}{t} = \dfrac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2}$
- **1 pt :** $\dfrac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \dfrac{1}{\cancel{t^2}}\ \dfrac{\cancel{t^2}}{2} = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{1}{2}$

d) Montrer que la fonction M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- 1 pt : d'après question précédente la fonction M_U est dérivable en 0 et $M'_U(0) = \dfrac{1}{2}$

- 1 pt : la fonction M_U est dérivable et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

- 2 pts : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ à l'aide de développements limités et équivalents

8. Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

a) Exprimer K_X en fonction de M_U, où la variable aléatoire U a été définie dans la question ***7.***

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

b) Justifier que la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et établir l'égalité : $Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$.

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

a) Déterminer les fonctions M_T et K_T.

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

b) En déduire les cumulants de T.

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

a) Justifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\, dx$.

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

b) Montrer que la fonction M_Z est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_Z(t) = \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

- 1 pt :

- 1 pt :

- 1 pt :

c) En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

- 1 pt :

- **1 pt :**
- **1 pt :**

11. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.

a) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une variable aléatoire W.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

b) Déterminer la fonction K_{W_n}.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = K_W(t)$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

Partie III. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.
On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, on a : $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$.
De plus, on pose : $\mu_4(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^4\right)$.

12. Justifier les égalités : $Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$ et $Q_2(X) = \mathbb{V}(X)$.

13. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose : $S = X_1 - X_2$.

a) Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :

$$\mathbb{E}(S^4) \;=\; 2\,\mu_4(X) + 6\left(\mathbb{V}(X)\right)^2$$

b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe $\mathcal{C}^4$ sur I et que pour tout $t \in I$, on a :

$$M_S^{(4)}(t) \;=\; K_S^{(4)}(t)\,M_S(t) + 3\,K_S^{(3)}(t)\,M_S'(t) + 3\,K_S''(t)\,M_S''(t) + K_S'(t)\,M_S^{(3)}(t)$$

c) En déduire l'égalité : $\mathbb{E}(S^4) \;=\; Q_4(S) + 3\left(\mathbb{V}(S)\right)^2$.

14. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation : $Q_4(X) \;=\; \mu_4(X) - 3\left(\mathbb{V}(X)\right)^2$.