
DS4 (version B)

Exercice (HEC 2005)

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On note E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et id l'application identité de E .

L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation (*) : $f \circ f = 4 \text{id}$.

A. Étude du cas $n = 2$

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit u le vecteur de \mathbb{R}^2 défini par $u = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2})$.

1. Montrer que f vérifie l'équation (*), puis préciser le noyau et l'image de f .

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$f \circ f = \text{id} \Leftrightarrow A \times A = I_2$$

Or :

$$\begin{aligned} A \times A &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 I_2 \end{aligned}$$

La deuxième proposition étant vérifiée, il en est de même de la première : $f \circ f = \text{id}$.

- Remarquons alors :

$$\det(A) = \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

Ainsi, f est bijective car sa matrice représentative dans la base \mathcal{B} est inversible.

On en déduit que f est injective et que $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$.

$$\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{rcc} \dim(\mathbb{R}^2) & = & \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \\ \parallel & & \parallel \\ 2 & & 0 \end{array}$$

Ainsi : $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Comme $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, on en conclut : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Commentaire

Dans la démonstration précédente, on fait preuve de recul pour ne pas avoir à déterminer, par calcul, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Procédant ainsi, on gagne du temps et donc des points. Cependant, il était possible (mais déconseillé !) de procéder à une démonstration calculatoire.

Exposons cette solution.

- Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 et $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

$$\begin{aligned}
 w \in \text{Ker}(f) &\iff f(w) = 0 \\
 &\iff A W = 0 \\
 &\iff \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x + y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = y = 0 \end{cases} \\
 &\hspace{10em} (\text{par remontées successives})
 \end{aligned}$$

$\text{Ker}(f) = \{(x, y) \mid x = 0 \text{ ET } y = 0\} = \{(0, 0)\}$

- Déterminons maintenant $\text{Im}(f)$. Notons $E_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1)$ et $E_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_2)$.

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

Or :

$$\times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1)) = A E_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi : } f(e_1) = \sqrt{2} e_1 + \sqrt{2} e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$\times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_2)) = A E_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi : } f(e_2) = \sqrt{2} e_1 - \sqrt{2} e_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}((\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})) = \text{Vect}((1, 1), (1, -1))$

Ici aussi, on pouvait procéder plus rapidement.

- Par ailleurs les égalités :

$$\times f(e_1) = \sqrt{2} e_1 + \sqrt{2} e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\times f(e_2) = \sqrt{2} e_1 - \sqrt{2} e_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

peuvent être obtenues par simple lecture de la matrice A .

En effet, par définition, cette matrice est la concaténation de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1))$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_2))$.

2. On note $F = \text{Ker}(f - 2\text{id})$ et $G = \text{Im}(f - 2\text{id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u .

En déduire la dimension de F et donner une base de F . On notera v le vecteur de cette base.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\times (f - 2\text{id})(e_1) = (\sqrt{2} - 2) e_1 + \sqrt{2} e_2 = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2}) = u$$

$$\times (f - 2\text{id})(e_2) = \sqrt{2} e_1 - (\sqrt{2} + 2) e_2 = (\sqrt{2}, -(\sqrt{2} + 2)) = z$$

• Ces deux vecteurs sont colinéaires.

Plus précisément : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} u = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, -(\sqrt{2} + 2)) = z$.

En effet :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} (\sqrt{2} - 2) = \sqrt{2}$$

$$\text{et } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2} - 2} = \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2} + 2)} = \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{2 - 4} = -(\sqrt{2} + 2)$$

$$\text{Im}(f - 2\text{id}) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}\left(u, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} u\right) = \text{Vect}(u)$$

• La famille (u) est :

× génératrice de $\text{Im}(f - 2\text{id})$,

× libre car constituée d'un vecteur non nul.

C'est donc une base de $\text{Im}(f - 2\text{id})$.

$$\dim(\text{Im}(f - 2\text{id})) = 1$$

• Par le théorème du rang :

$$\begin{array}{rcc} \dim(\mathbb{R}^2) & = & \dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) + \dim(\text{Im}(f - 2\text{id})) \\ \parallel & & \parallel \\ 2 & & 1 \end{array}$$

$$\dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) = 1$$

- Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

$$\begin{aligned}
 w \in \text{Ker}(f - 2\text{id}) & \iff (f - 2\text{id})(w) = 0 \\
 & \iff (A - 2I) W = 0 \\
 & \iff \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \iff \begin{cases} (\sqrt{2}-2)x + \sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x - (\sqrt{2}+2)y = 0 \end{cases} \\
 \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \begin{cases} -2x + (2\sqrt{2}+2)y = 0 \\ \sqrt{2}x - (\sqrt{2}+2)y = 0 \end{cases} \\
 & \text{(pour se débarrasser d'un } \sqrt{2}\text{)} \\
 \stackrel{L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 + L_1}{\iff} & \begin{cases} -2x + (2\sqrt{2}+2)y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 & \iff \{ x = (\sqrt{2}+1)y \}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(f - 2\text{id}) &= \{(x, y) \mid x = (\sqrt{2}+1)y\} \\
 &= \{((\sqrt{2}+1)y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y \cdot (\sqrt{2}+1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}
 \end{aligned}$$

$\text{Ker}(f - 2\text{id}) = \text{Vect}((\sqrt{2}+1, 1)) = \text{Vect}((\sqrt{2}+2, \sqrt{2}))$

Dans la suite, on note $v = (\sqrt{2}+2, \sqrt{2})$. □

b) Montrer : $G = \text{Ker}(f + 2\text{id})$.

Démonstration.

- Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

$$\begin{aligned}
 w \in \text{Ker}(f + 2\text{id}) & \iff (f + 2\text{id})(w) = 0 \\
 & \iff (A + 2I) W = 0 \\
 & \iff \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \iff \begin{cases} (\sqrt{2}+2)x + \sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x + (-\sqrt{2}+2)y = 0 \end{cases} \\
 \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \begin{cases} 2x + (2\sqrt{2}-2)y = 0 \\ \sqrt{2}x + (-\sqrt{2}+2)y = 0 \end{cases} \\
 & \text{(pour se débarrasser d'un } \sqrt{2}\text{)} \\
 \stackrel{L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 - L_1}{\iff} & \begin{cases} 2x + (2\sqrt{2}-2)y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 & \iff \{ x = (1 - \sqrt{2})y \}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f + 2\text{id}) &= \{(x, y) \mid x = (1 - \sqrt{2}) y\} \\ &= \{((1 - \sqrt{2}) y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \cdot (1 - \sqrt{2}, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\text{Ker}(f + 2\text{id}) = \text{Vect}((1 - \sqrt{2}, 1)) = \text{Vect}((\sqrt{2} - 2, \sqrt{2})) = \text{Vect}(u)$$

Commentaire

On pouvait raisonner autrement.

- Dans un premier temps, on démontre que $G = \text{Vect}(u) \subset \text{Ker}(f + 2\text{id})$.
Pour ce faire, il suffit de démontrer : $u \in \text{Ker}(f + 2\text{id})(u)$. Or :

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f + 2\text{id})(u) &\Leftrightarrow (f + 2\text{id})(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow (A + 2I)U = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est bien vérifiée car :

$$\begin{aligned} \times (\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 2) + \sqrt{2} \sqrt{2} &= 2 - 4 + 2 = 0 \\ \times \sqrt{2} (\sqrt{2} - 2) + (-\sqrt{2} + 2) \sqrt{2} &= 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit : $u \in \text{Ker}(f + 2\text{id})$ et donc : $G = \text{Vect}(u) \subset \text{Ker}(f + 2\text{id})$.

- Pour conclure sur l'égalité de ces deux espaces vectoriels, il suffit de démontrer qu'ils sont de même dimension.

Supposons par l'absurde que $\dim(\text{Ker}(f + 2\text{id})) = 2$.

Comme $\text{Ker}(f + 2\text{id}) \subset \mathbb{R}^2$, on en conclut : $\text{Ker}(f + 2\text{id}) = \mathbb{R}^2$.

Ainsi : $\forall w \in \mathbb{R}^2$, $(f + 2\text{id})(w) = 0$. Autrement dit : $f + 2\text{id} = 0$ ou encore $f = -2\text{id}$.

Ceci est impossible car $A \neq -2I$.

Ainsi, $\dim(\text{Ker}(f + 2\text{id})) = 1$.

(on note que $\dim(\text{Ker}(f + 2\text{id})) = 0$ est exclu puisque $\text{Ker}(f + 2\text{id}) \supset \text{Vect}(u)$).

- On retiendra en particulier (c'est une propriété importante !) que si $g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(g)) = n &\Leftrightarrow \text{Ker}(g) = E \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow g = 0_{\mathcal{L}(E)} \end{aligned}$$

□

3. a) Justifier que (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 .

Démonstration.

- On a vu dans la question précédente que $\text{Ker}(f + 2\text{id}) = \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0$.
On en déduit que u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2 .
- De même, d'après la question 2.a), v est un vecteur propre associé à la valeur propre 2 .
- Les vecteurs u et v sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. On en déduit que la famille $\mathcal{F} = (u, v)$ est libre.
Or : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

Ainsi, (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 .

Commentaire

- Il faut savoir lire les questions de l'énoncé. Il est ici demander de « Justifier » que (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 . On introduit donc une nuance par rapport à question classique qui commencerait par « Démontrer ». Lorsque le terme « justifier » apparaît dans une question c'est :
 - × soit que l'on s'attend à une justification en français d'une propriété mathématique (*Justifier que les v.a.r. sont indépendantes*),
 - × soit que l'on s'attend à ce que le candidat cite un théorème permettant de ne pas avoir à mener une démonstration plus lourde. C'est le cas ici.
- Évidemment, il était aussi possible de démontrer que la famille (u, v) était libre en repassant à la définition. Mais, comme expliqué dans cette remarque, ce n'est pas l'esprit de l'énoncé.

b) Montrer que f est diagonalisable; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Démonstration.

- D'après ce qui précède, l'endomorphisme f possède deux valeurs propres distinctes (-2 et 2). Or $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. On en déduit que f est diagonalisable.
- Par ailleurs, la famille $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de \mathbb{R}^2 constituée de vecteurs propres. La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est alors :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} + 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

car :

- × $u = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 2) e_1 + \sqrt{2} e_2$,
- × $v = (\sqrt{2} + 2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2} + 2) e_1 + \sqrt{2} e_2$.

Commentaire

Dans la base $\mathcal{B}' = (u, v)$, la matrice représentative de f est : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Ce n'est qu'une réécriture différente du fait que : $f(u) = -2 u$ et $f(v) = 2 v$.

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation (*).

4. a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f .

Démonstration.

L'endomorphisme f vérifiant (*), on en déduit :

$$f \circ \left(\frac{1}{4} f \right) = \left(\frac{1}{4} f \right) \circ f = \text{id}$$

Ainsi, f est une application bijective et $f^{-1} = \frac{1}{4} f$.

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f .

Démonstration.

- D'après la relation (*) : $f^2 - 4 \text{id} = 0$.
 On en déduit que $P(X) = X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$ est un polynôme annulateur de f .
- Ainsi : $\text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } P\} = \{-2, 2\}$.

Les réels -2 et 2 sont les deux seuls valeurs propres possibles de l'endomorphisme f .

Commentaire

On parle de valeurs propres **possibles**.
 C'est une autre manière de dire « Exhiber un polynôme annulateur de f ».

c) Vérifier que 2id et -2id satisfont l'équation (*).

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(2 \text{id}) \circ (2 \text{id}) = 4 \text{id}^2 = 4 \text{id}$$

- Ensuite :

$$(-2 \text{id}) \circ (-2 \text{id}) = 4 \text{id}^2 = 4 \text{id}$$

Les endomorphismes -2id et 2id satisfont (*).

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2 \text{id}$ et $f \neq -2 \text{id}$ et on note $F = \text{Ker}(f - 2 \text{id})$ et $G = \text{Im}(f - 2 \text{id})$.

5. Soit x un élément de E . Montrer que $(f(x) - 2x) \in \text{Ker}(f + 2 \text{id})$ et que $(f(x) + 2x) \in F$.
 En déduire que $G \subset \text{Ker}(f + 2 \text{id})$ et que $\text{Im}(f + 2 \text{id}) \subset F$.
 Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f .

Démonstration.

- Démontrons que $(f(x) - 2x) \in \text{Ker}(f + 2 \text{id})$.

$$\begin{aligned} (f + 2 \text{id})(f(x) - 2x) &= f(f(x) - 2x) + 2 \text{id}(f(x) - 2x) \\ &= (f \circ f)(x) - 2 \cancel{f(x)} + 2 (\cancel{f(x)} - 2x) \quad (\text{par linéarité de } f) \\ &= (4 \text{id})(x) - 4x \quad (\text{car } f \circ f = 4 \text{id}) \\ &= 4x - 4x = 0 \end{aligned}$$

$(f(x) - 2x) \in \text{Ker}(f + 2 \text{id})$

- Démontrons que $(f(x) + 2x) \in \text{Ker}(f - 2 \text{id})$.

$$\begin{aligned} (f - 2 \text{id})(f(x) + 2x) &= f(f(x) + 2x) - 2 \text{id}(f(x) + 2x) \\ &= (f \circ f)(x) + 2 \cancel{f(x)} - 2 (\cancel{f(x)} + 2x) \quad (\text{par linéarité de } f) \\ &= (4 \text{id})(x) - 4x \quad (\text{car } f \circ f = 4 \text{id}) \\ &= 4x - 4x = 0 \end{aligned}$$

$(f(x) + 2x) \in \text{Ker}(f - 2 \text{id})$

- Démontrons maintenant que $G = \text{Im}(f - 2 \text{id}) \subset \text{Ker}(f + 2 \text{id})$.

Soit $y \in \text{Im}(f - 2 \text{id})$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = (f - 2 \text{id})(x) = f(x) - 2x$.
 D'après ce qui précède, $y \in \text{Ker}(f + 2 \text{id})$.

$$\boxed{G \subset \text{Ker}(f + 2 \text{id})}$$

- De même, on démontre que $\text{Im}(f + 2 \text{id}) \subset F = \text{Ker}(f - 2 \text{id})$.

Soit $y \in \text{Im}(f + 2 \text{id})$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = (f + 2 \text{id})(x) = f(x) + 2x$.
 D'après ce qui précède, $y \in \text{Ker}(f - 2 \text{id})$.

$$\boxed{\text{Im}(f + 2 \text{id}) \subset F}$$

- Pour démontrer que -2 est valeur propre de f , il suffit de démontrer qu'il existe $y \neq 0$ tel que $y \in \text{Ker}(f + 2 \text{id})$ (y est un vecteur propre associé à la valeur propre -2).

Supposons par l'absurde : $\text{Ker}(f + 2 \text{id}) = \{0\}$.

D'après ce qui précède : $\text{Im}(f - 2 \text{id}) \subset \text{Ker}(f + 2 \text{id}) = \{0\}$. On en déduit que $\text{Im}(f - 2 \text{id}) = \{0\}$.
 Or, par le théorème du rang :

$$\begin{array}{rcc} \dim(\mathbb{R}^n) & = & \dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) + \dim(\text{Im}(f - 2\text{id})) \\ \parallel & & \parallel \\ n & & 0 \end{array}$$

Ainsi : $\dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) = n$. Comme $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, on en conclut : $\text{Ker}(f - 2\text{id}) = \mathbb{R}^n$.

Ceci démontre : $\forall x \in \mathbb{R}^n, (f - 2\text{id})(x) = 0$ ou encore : $f - 2\text{id} = 0$, soit : $f = 2 \text{id}$.

Impossible car, par hypothèse de l'énoncé, $f \neq 2 \text{id}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \text{Ker}(f + 2 \text{id}) \neq \{0\}. \text{ Ce qui démontre que } -2 \text{ est valeur propre de } f.}$$

- On démontre alors que 2 est valeur propre de f .
 Pour ce faire, en procédant par l'absurde, on démontre :

$$\text{Ker}(f - 2 \text{id}) \neq \{0\}$$

(sinon on aurait $f = -2 \text{id}$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } 2 \text{ est valeur propre de } f.}$$

□

6. Soit x un vecteur de $\text{Ker}(f + 2 \text{id})$.

- a) Exprimer $(f - 2 \text{id})(x)$ en fonction de x uniquement.
 En déduire que x appartient à G , puis que $G = \text{Ker}(f + 2 \text{id})$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $(f - 2 \text{id})(x) = f(x) - 2 \text{id}(x) = f(x) - 2x$.
- Or, comme $x \in \text{Ker}(f + 2 \text{id})$ alors : $(f + 2 \text{id})(x) = 0$. On en déduit :

$$f(x) + 2x = 0 \quad \text{ou encore} \quad f(x) = -2x$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } (f - 2 \text{id})(x) = f(x) - 2x = -2x - 2x = -4x.}$$

- On en déduit :

$$x = -\frac{1}{4} (f - 2 \text{id})(x) = (f - 2 \text{id}) \left(-\frac{1}{4} x \right)$$

la dernière égalité étant obtenue par linéarité de l'application $f - 2 \text{id}$.

Ainsi, $x \in \text{Im}(f - 2 \text{id})$.

- On vient de démontrer que tout x élément de $\text{Ker}(f + 2 \text{id})$ est élément de $\text{Im}(f - 2 \text{id})$.
Autrement dit : $\text{Ker}(f + 2 \text{id}) \subset \text{Im}(f - 2 \text{id})$.
Or, d'après la question 5., $\text{Im}(f - 2 \text{id}) \subset \text{Ker}(f + 2 \text{id})$.

$\text{Im}(f - 2 \text{id}) = \text{Ker}(f + 2 \text{id})$

□

b) Montrer que f est diagonalisable.

Démonstration.

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^n) &= \dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) + \dim(\text{Im}(f - 2\text{id})) \\ &\qquad\qquad\qquad \parallel \\ &\qquad\qquad\qquad \dim(\text{Ker}(f + 2\text{id})) \end{aligned}$$

car $\text{Im}(f - 2\text{id}) = \text{Ker}(f + 2\text{id})$ d'après la question précédente.

- D'après la question 5., on sait que -2 et 2 sont valeurs propres de f . Ce sont les seules valeurs propres d'après la question 4.b). On vient de démontrer :

$$\dim(E_2(f)) + \dim(E_{-2}(f)) = \dim(\mathbb{R}^n)$$

Ceci démontre que f est diagonalisable.

□

Problème

Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité.

Les cumulants d'ordre 3 et 4 permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui viennent compléter la description usuelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion); ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.

Dans tout le problème :

- on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur (Ω, \mathcal{A}) ;
- sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$;
- pour toute variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, on pose :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln(M_X(t));$$

(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants* de X)

- lorsque, pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction K_X est de classe \mathcal{C}^p sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle *cumulant d'ordre p de X* , noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée $p^{\text{ème}}$ de K_X en 0 :

$$Q_p(X) = K_X^{(p)}(0).$$

Commentaire

- La fonction génératrice des moments d'une v.a.r. X est un objet classique en probabilités. Comme son nom l'indique, cette fonction permet de retrouver les moments de X (sous réserve d'existence). Plus précisément, si la v.a.r. X admet un moment d'ordre n , alors :

$$\mathbb{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0)$$

- On ne confondra pas cette fonction avec une autre fonction classique en probabilités : la fonction génératrice (des probabilités). Cette dernière n'est définie que pour des v.a.r. X à valeurs entières et positives par la formule :

$$\forall s \in [0, 1], \quad G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}([X = k])$$

Cette fonction caractérise quant à elle, non pas les moments de X , mais sa loi.
 Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

- L'énoncé propose de démontrer quelques propriétés de la fonction génératrice des moments pour des v.a.r. particulières. Par exemple, dans le cas d'une v.a.r. X à valeurs dans $\llbracket -n, n \rrbracket$:

$$\times \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p),$$

$$\times \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t).$$

(lien entre la fonction génératrice et la fonction génératrice des moments)

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes à valeurs entières ;
- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([S = -1]) = \mathbb{P}([S = +1]) = \frac{1}{2}.$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-n, n]$.

- a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

La v.a.r. X est une v.a.r. finie. Ainsi, la v.a.r. e^{tX} est également une v.a.r. finie. Elle admet donc des moments à tout ordre, en particulier une espérance.

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le réel $M_X(t)$ est bien défini.

Commentaire

On rappelle que, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset [-n, n] = \{k \mid k \in [-n, n]\}$.
On en déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(e^{tX})(\Omega) = e^{tX(\Omega)} = \{e^{tk} \mid k \in [-n, n]\}$$

On retrouve bien que la v.a.r. e^{tX} est finie.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme X est une v.a.r. discrète, par théorème de transfert :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=-n}^n e^{tk} \mathbb{P}([X = k])$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_X(t) = \sum_{k=-n}^n e^{tk} \mathbb{P}([X = k])$$

- La fonction M_X est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} en tant que somme finie $M_X = f_{-n} + \dots + f_n$ où pour tout $k \in [-n, n]$, la fonction $f_k : t \mapsto e^{tk} \mathbb{P}([X = k])$ de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

La fonction M_X est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Commentaire

Soit $k \in [-n, n]$.

Il faut noter que l'expression $\mathbb{P}([X = k])$ est une constante par rapport à t . Ainsi, pour étudier la régularité de la fonction $t \mapsto e^{tk} \mathbb{P}([X = k])$ on peut se contenter d'étudier la régularité de la fonction $t \mapsto e^{tk}$ (qui est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}). □

b) Justifier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction M_X est de classe \mathcal{C}^∞ , donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $M_X^{(p)}$ existe.

- Commençons par déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $M_X^{(p)}$.
 Démontrons par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$

où $\mathcal{P}(p) : \forall t \in \mathbb{R}, M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^n k^p e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$.

► **Initialisation :**

D'après la question précédente :

$$M_X : t \mapsto \sum_{k=-n}^n e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$M_X^{(1)}(t) = M_X'(t) = \sum_{k=-n}^n k e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité :** soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(p)$ et démontrons $\mathcal{P}(p+1)$ (i.e. $\forall t \in \mathbb{R}, M_X^{(p+1)}(t) = \sum_{k=-n}^n k^{p+1} e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$).

Par hypothèse de récurrence :

$$M_X^{(p)} : t \mapsto \sum_{k=-n}^n k^p e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$M_X^{(p+1)}(t) = \left(M_X^{(p)}\right)'(t) = \sum_{k=-n}^n k^p \left(k e^{kt}\right) \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=-n}^n k^{p+1} e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$$

D'où $\mathcal{P}(p+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall t \in \mathbb{R}, M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^n k^p e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On en déduit :

$$M_X^{(p)}(0) = \sum_{k=-n}^n k^p e^{k \times 0} \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=-n}^n k^p \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{E}(X^p)$$

où la dernière égalité est obtenue par théorème de transfert.

Finalement, pour tout $p \in \mathbb{N}^* : M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p)$.

Commentaire

L'obtention de l'expression de $M_X^{(p)}$ s'effectue au brouillon :

1) on commence par déterminer les premières dérivées successives de la fonction M_X :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X'(t) = \sum_{k=-n}^n k e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X''(t) = \sum_{k=-n}^n k (k e^{kt}) \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=-n}^n k^2 e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X^{(3)}(t) = \sum_{k=-n}^n k^2 (k e^{kt}) \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=-n}^n k^3 e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$$

2) on en déduit une formule générale :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^n k^p e^{kt} \mathbb{P}([X = k])$$

□

c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[-n, n]$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X .

On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} G_X(x) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k - n]) x^k \\ G_Y(x) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([Y = k - n]) x^k \end{cases}$$

(i) Vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité : $G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t)$.

Démonstration.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G_X(e^t) &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k - n]) (e^t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k - n]) e^{kt} \\ &= \sum_{k=0-n}^{2n-n} \mathbb{P}([X = k]) e^{(k+n)t} \quad (\text{par décalage d'indice}) \\ &= \sum_{k=-n}^n (\mathbb{P}([X = k]) e^{kt} e^{nt}) \\ &= e^{nt} \sum_{k=-n}^n \mathbb{P}([X = k]) e^{kt} \\ &= e^{nt} M_X(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t)}$$

□

(ii) Justifier la relation : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = G_Y(e^t)$.

Démonstration.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G_X(e^t) &= e^{nt} M_X(t) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= e^{nt} M_Y(t) && \text{(car, d'après l'énoncé : } M_X = M_Y) \\ &= G_Y(e^t) && \text{(avec le même raisonnement qu'en question précédente)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = G_Y(e^t)}$$

□

(iii) En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X .

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket$ et $Y(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket$.
- Ensuite, d'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = G_Y(e^t)$$

Ainsi, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{array}{ccc} G_X(e^{\ln(x)}) & = & G_Y(e^{\ln(x)}) \\ \parallel & & \parallel \\ G_X(x) & & G_Y(x) \end{array}$$

- Soit $x \in]0, +\infty[$, on en déduit : $(G_X - G_Y)(x) = 0$.

Or :

$$\begin{aligned} (G_X - G_Y)(x) &= G_X(x) - G_Y(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k - n]) x^k - \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([Y = k - n]) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (\mathbb{P}([X = k - n]) x^k - \mathbb{P}([Y = k - n]) x^k) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (\mathbb{P}([X = k - n]) - \mathbb{P}([Y = k - n])) x^k \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $G_X - G_Y$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, *i.e.* :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k - n]) - \mathbb{P}([Y = k - n]) = 0$$

D'où :

$$\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) - \mathbb{P}([Y = k]) = 0$$

Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([Y = k])$$

□
Finalement, les v.a.r. X et Y suivent la même loi.

□

2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
 On suppose que les variables aléatoires X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = S X_2$.
 a) (i) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2 .

Démonstration.

- Comme $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$, on a : $X_2(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket = \{0, 1, 2\}$.
- De plus : $S(\Omega) = \{-1, 1\}$.

On en déduit : $Y_2(\Omega) = (S X_2)(\Omega) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \llbracket -2, 2 \rrbracket$.

□

- (ii) Calculer les probabilités $\mathbb{P}([Y_2 = y])$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2 .

Démonstration.

- Tout d'abord, on a l'égalité entre événements :

$$[Y_2 = -2] = [S X_2 = -2] = [S = -1] \cap [X_2 = 2]$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_2 = -2]) &= \mathbb{P}([S = -1] \cap [X_2 = 2]) \\ &= \mathbb{P}([S = -1]) \mathbb{P}([X_2 = 2]) \quad (\text{car } S \text{ et } X_2 \text{ sont} \\ &\quad \text{indépendantes}) \\ &= \frac{1}{2} \times \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}([Y_2 = -2]) = \frac{1}{8}$

- Ensuite :

$$[Y_2 = -1] = [S = -1] \cap [X_2 = 1]$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_2 = -1]) &= \mathbb{P}([S = -1] \cap [X_2 = 1]) \\ &= \mathbb{P}([S = -1]) \mathbb{P}([X_2 = 1]) \quad (\text{car } S \text{ et } X_2 \text{ sont} \\ &\quad \text{indépendantes}) \\ &= \frac{1}{2} \times \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}([Y_2 = -1]) = \frac{1}{4}$

- De même :

$$[Y_2 = 1] = [S = 1] \cap [X_2 = 1] \quad \text{et} \quad [Y_2 = 2] = [S = 1] \cap [X_2 = 2]$$

$$\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Y_2 = 1]) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y_2 = 2]) = \frac{1}{8}.$$

- Enfin : $[Y_2 = 0] = [X_2 = 0]$. Ainsi :

$$\mathbb{P}([Y_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_2 = 0]) = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}([Y_2 = 0]) = \frac{1}{4}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que la famille $([Y_2 = k])_{k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket}$ est un système complet d'événements. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_2 = 0]) &= 1 - \left(\mathbb{P}([Y_2 = -2]) + \mathbb{P}([Y_2 = -1]) + \mathbb{P}([Y_2 = 1]) + \mathbb{P}([Y_2 = 2]) \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

- b)** Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S + 1)$ suit la même loi que Y_2 .

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $S(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a : $(S + 1)(\Omega) = \{0, 2\}$.
De plus $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. D'où, en notant $T_2 = X_2 - (S + 1) : T_2(\Omega) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$$T_2(\Omega) \subset \llbracket -2, 2 \rrbracket \quad (\text{on rappelle : } Y_2(\Omega) \subset \llbracket -2, 2 \rrbracket \text{ d'après } \mathbf{2.a)(i)})$$

- Soit $k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket$.

La famille $([S = -1], [S = 1])$ forme un système complet d'événements.

Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}([T_2 = k]) \\ &= \mathbb{P}([T_2 = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([T_2 = k] \cap [S = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_2 - (S + 1) = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 - (S + 1) = k] \cap [S = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_2 - (-1 + 1) = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 - (1 + 1) = k] \cap [S = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 = k + 2] \cap [S = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_2 = k]) \mathbb{P}([S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 = k + 2]) \mathbb{P}([S = 1]) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = k]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = k + 2]) \end{aligned}$$

(car X_2 et S sont indépendantes)

- On obtient ainsi :

$$\mathbb{P}([T_2 = -2]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = -2]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 0]) = \frac{1}{2} \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \mathbb{P}([Y_2 = -2])$$

$$\mathbb{P}([T_2 = -1]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = -1]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{2} \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}([Y_2 = -1])$$

$$\mathbb{P}([T_2 = 0]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 0]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}([Y_2 = 0])$$

$$\mathbb{P}([T_2 = 1]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 1]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}([Y_2 = 1])$$

$$\mathbb{P}([T_2 = 2]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 2]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 4]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} = \frac{1}{8} = \mathbb{P}([Y_2 = 2])$$

On en déduit que $T_2 = X_2 - (S + 1)$ et Y_2 suivent la même loi.

Commentaire

- Lors d'une rédaction classique de détermination de la loi d'une somme, après obtention de la relation :

$$\mathbb{P}([T_2 = k]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = k]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = k + 2])$$

on cherche à déterminer si les événements $[X_2 = k]$ et/ou $[X_2 = k + 2]$ sont l'événement impossible.

- Ici, cela varie suivant les valeurs de k . C'est pour cela qu'on effectue le calcul direct des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = k])$ après l'obtention de la formule précédente. □

3. Le script **Scilab** suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```

1  n = 10
2  X = grand(n,2,'bin',2,0.5)
3  B = grand(n,2,'bin',1,0.5)
4  S = 2 * B - ones(n,2)
5  Z1 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)]
6  Z2 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)]
    
```

- a) Que contiennent les variables **X** et **S** après l'exécution des quatre premières instructions ?

Démonstration.

- L'instruction `X = grand(n,2,'bin',2,0.5)` permet de stocker dans la variable **X** une matrice à **n** lignes et 2 colonnes où chaque colonne contient une observation d'un **n**-échantillon de loi $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire un **n**-échantillon de la v.a.r. X_2 . Plus précisément, la première colonne de **X** contient une observation (c_1, \dots, c_n) d'un **n**-échantillon (C_1, \dots, C_n) de X_2 , et la deuxième colonne de **X** contient une observation (c'_1, \dots, c'_n) d'un **n**-échantillon (c'_1, \dots, c'_n) de X_2 . (les v.a.r. C_i et C'_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. X)

- L'instruction `B = grand(n,2,'bin',1,0.5)` permet de stocker dans la variable `B` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes où la première colonne contient une observation (b_1, \dots, b_n) d'un `n`-échantillon (B_1, \dots, B_n) de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, et la deuxième colonne contient une observation (b'_1, \dots, b'_n) d'un `n`-échantillon (B'_1, \dots, B'_n) de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

(les v.a.r. B_i et B'_i sont indépendantes et ont même loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$)

- On commence par rappeler que l'instruction `ones(n,2)` permet d'obtenir une matrice à `n` lignes et 2 colonnes dont tous les coefficients sont égaux à 1. On en déduit que l'instruction `S = 2 * B - ones(n,2)` permet de stocker dans la variable `S` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes.

La première colonne contient l'observation $(s_1, \dots, s_n) = (2b_1 - 1, \dots, 2b_n - 1)$ du `n`-échantillon $(2B_1 - 1, \dots, 2B_n - 1)$.

La deuxième colonne contient l'observation $(s'_1, \dots, s'_n) = (2b'_1 - 1, \dots, 2b'_n - 1)$ du `n`-échantillon $(2B'_1 - 1, \dots, 2B'_n - 1)$.

- Les v.a.r. $2B_i - 1$ et $2B'_i - 1$ sont indépendantes et de même loi. Déterminons cette loi : on note B une v.a.r. de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et on cherche la loi de $V = 2B - 1$.

× Tout d'abord, comme $B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, on a : $B(\Omega) = \{0, 1\}$.

On en déduit : $V(\Omega) = \{2 \times 0 - 1, 2 \times 1 - 1\} = \{-1, 1\}$.

× De plus :

$$[V = 1] = [2B - 1 = 1] = [2B = 2] = [B = 1]$$

D'où : $\mathbb{P}([V = 1]) = \mathbb{P}([B = 1]) = \frac{1}{2}$

× Enfin, comme la famille $([V = -1], [V = 1])$ est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}([V = -1]) = 1 - \mathbb{P}([V = 1]) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que la v.a.r. $V = 2B - 1$ suit la même loi que la v.a.r. S .

- La variable `S` contient donc une matrice à `n` lignes et 2 colonnes, où la première colonne contient une observation (s_1, \dots, s_n) d'un `n`-échantillon (S_1, \dots, S_n) de la v.a.r. S , et la deuxième colonne contient une observation (s'_1, \dots, s'_n) du `n`-échantillon (S'_1, \dots, S'_n) de la v.a.r. S . (les v.a.r. S_i et S'_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. S)

Commentaire

- Comme souvent dans les sujets HEC, l'une des difficultés provient de la prise d'initiatives nécessaire pour répondre à une question.
- Dans cette question par exemple, déterminer la loi de la v.a.r. $V = 2B - 1$ n'est pas difficile. C'est prendre l'initiative de déterminer cette loi qui constitue la difficulté. □

- b) Expliquer pourquoi, après l'exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices Z1 et Z2 contient une simulation de la variable aléatoire Y_2 .

Démonstration.

- L'instruction $Z1 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)]$ permet de stocker dans la variable Z1 une matrice à n lignes et 2 colonnes.
 Le contenu de la première colonne est donné par la commande $S(1:n,1) .* X(1:n,1)$ et celui de la deuxième colonne par $X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)$.
- L'instruction $S(1:n,1) .* X(1:n,1)$ permet d'obtenir une matrice colonne à n lignes contenant l'observation $(d_1, \dots, d_n) = (s_1 \times c_1, \dots, s_n \times c_n)$ du n -échantillon $(S_1 C_1, \dots, S_n C_n)$.
 Or, les S_i suivent la même loi que S et les C_i suivent la même loi que X_2 . Ainsi, les $S_i C_i$ suivent la même loi que Y_2 .
 La première colonne de Z1 contient donc une observation (d_1, \dots, d_n) d'un n -échantillon (D_1, \dots, D_n) de Y_2 .
(les v.a.r. D_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. Y_2)
- L'instruction $X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)$ permet d'obtenir une matrice colonne à n lignes contenant l'observation $(d'_1, \dots, d'_n) = (c_1 - s_1 - 1, \dots, c_n - s_n - 1)$ du n -échantillon $(C_1 - S_1 - 1, \dots, C_n - S_n - 1)$.
 Or, les S_i suivent la même loi que S et les C_i suivent la même loi que X_2 . Ainsi, les $C_i - S_i - 1$ suivent la même loi que $X_2 - S - 1$. De plus, d'après la question 2.b), la v.a.r. $X_2 - S - 1$ suit la même loi que Y_2 .
 La deuxième colonne de Z1 contient donc une observation (d'_1, \dots, d'_n) d'un n -échantillon (D'_1, \dots, D'_n) de Y_2 .
(les v.a.r. D'_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. Y_2)
- De même, l'instruction $Z2 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)]$ permet de stocker dans la variable Z2 une matrice à n lignes et 2 colonnes.
 Le contenu de la première colonne est donné par la commande $S(1:n,1) .* X(1:n,1)$ et celui de la deuxième colonne par $X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)$.
- La première colonne de Z2 est identique à celle de Z1, donc la première colonne de Z2 contient l'observation (d_1, \dots, d_n) du n -échantillon (D_1, \dots, D_n) de Y_2 .
- L'instruction $X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)$ permet d'obtenir une matrice colonne à n lignes contenant l'observation $(d''_1, \dots, d''_n) = (c'_1 - s'_1 - 1, \dots, c'_n - s'_n - 1)$ du n -échantillon $(C'_1 - S'_1 - 1, \dots, C'_n - S'_n - 1)$.
 Or, les S'_i suivent la même loi que S et les C'_i suivent la même loi que X_2 . Ainsi, les $C'_i - S'_i - 1$ suivent la même loi que $X_2 - S - 1$, donc que Y_2 .
 La deuxième colonne de Z2 contient donc une observation (d''_1, \dots, d''_n) d'un n -échantillon (D''_1, \dots, D''_n) de Y_2 .
(les v.a.r. D''_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. Y_2)

Finalemnt, chacun des coefficients des matrices Z1 et Z2 contient une simulation de la v.a.r. Y_2 .

Commentaire

On aurait pu utiliser davantage les commandes Scilab. En effet, l'appel classique permettant d'extraire la première colonne de la matrice S est plutôt $S(:, 1)$ (que $S(1:n, 1)$). □

- c) On modifie la première ligne du script précédent en affectant à n une valeur beaucoup plus grande que 10 (par exemple, 100000) et en lui adjoignant les deux instructions 7 et 8 suivantes :

```

7 p1 = length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))) / n
8 p2 = length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))) / n
```

Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour $p1$ et $p2$ après l'exécution des huit lignes du nouveau script ?

Dans le langage **Scilab**, la fonction `length` fournit la « longueur » d'un vecteur ou d'une matrice et la fonction `find` calcule les positions des coefficients d'une matrice pour lesquels une propriété est vraie, comme l'illustre le script suivant :

```

--> A = [1 ; 2 ; 0 ; 4]
--> B = [2 ; 2 ; 4 ; 3]
--> length(A)
ans = 4.
--> length([A , B])
ans = 8.
--> find(A < B)
ans = 1. 3. // car 1 < 2 et 0 < 4, alors que 2 ≥ 2 et 4 ≥ 3
```

Démonstration.

- Commençons par commenter l'instruction :

```

7 p1 = length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))) / n
```

- × L'instruction `find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))` permet d'obtenir une matrice ligne contenant les positions des coefficients des matrices $Z1(1:n,1)$ et $Z1(1:n,2)$ égaux. Autrement dit, on obtient une matrice ligne contenant les indices i tels que $d_i = d'_i$.
(on rappelle que (d_1, \dots, d_n) est une observation d'un n -échantillon (D_1, \dots, D_n) de $S X_2$ et (d'_1, \dots, d'_n) est une observation d'un n -échantillon (D'_1, \dots, D'_n) de $X_2 - S - 1$)
- × L'instruction `length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2)))` permet d'obtenir la longueur de la matrice précédente. Ainsi, on obtient le nombre de fois où $d_i = d'_i$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- × Enfin, on divise ce nombre par la taille n de l'observation.
 Or, par loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\frac{\text{nombre de fois où } d_i = d'_i}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([S X_2 = X_2 - S - 1])$$

La variable $p1$ contient une valeur approchée de $\mathbb{P}([S X_2 = X_2 - S - 1])$.

- Commentons ensuite l'instruction :

```

8 p2 = length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))) / n
```

- × L'instruction `find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))` permet d'obtenir une matrice ligne contenant les positions des coefficients des matrices $Z1(2:n,1)$ et $Z1(2:n,2)$ égaux. Autrement dit, on obtient une matrice ligne contenant les indices i tels que $d_i = d''_i$.
(on rappelle que (d_1, \dots, d_n) est une observation d'un n -échantillon (D_1, \dots, D_n) de $S X_2$ et (d''_1, \dots, d''_n) est une observation d'un n -échantillon (D''_1, \dots, D''_n) de $X'_2 - S - 1$, où la v.a.r. X'_2 suit la même loi que X_2)
- × L'instruction `length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2)))` permet d'obtenir la longueur de la matrice précédente. Ainsi, on obtient le nombre de fois où $d_i = d''_i$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- × Enfin, on divise ce nombre par la taille n de l'observation.
 Or, par loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\frac{\text{nombre de fois où } d_i = d'_i}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([S X_2 = X'_2 - S - 1])$$

La variable `p2` contient une valeur approchée de $\mathbb{P}([S X_2 = X'_2 - S - 1])$
 où la v.a.r. X'_2 suit la même loi que X_2 .

Commentaire

- Le programme proposé par l'énoncé n'est ici rien d'autre qu'une illustration de l'idée naturelle pour obtenir une approximation de $\mathbb{P}([S X_2 = X_2 - S - 1])$:
 - × simuler un grand nombre de fois ($n = 100000$) les v.a.r. $S X_2$ et $X_2 - S - 1$.
 Formellement, on souhaite obtenir une observation (d_1, \dots, d_n) d'un n -échantillon (D_1, \dots, D_n) de la v.a.r. $S X_2$, et une observation (d'_1, \dots, d'_n) d'un n -échantillon (D'_1, \dots, D'_n) de la v.a.r. $X_2 - S - 1$.
 - × de compter le nombre de fois où $d_i = d'_i$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- L'objectif de cette question **Scilab** est de revenir sur un point important en probabilités :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \quad \neq \quad X = Y$$

(mais bien sûr, si $X = Y$, alors X et Y ont même loi)

- On peut avoir la confirmation du point précédent en exécutant le programme **Scilab**.
 On obtient :

```
p1 =
    0.1261
p2 =
    0.2179
```

On constate qu'on a $p1 \neq 1$ et $p2 \neq 1$. Ainsi, ici :

- × les v.a.r. $S X_2$ et $X_2 - S - 1$ ont même loi,
- × mais $\mathbb{P}([S X_2 = X_2 - S - 1]) \neq 1$. Cela démontre en particulier : $S X_2 \neq X_2 - S - 1$. □

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
 On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = S X_n$.
a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur \mathbb{R} et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
 La v.a.r. X_n est une v.a.r. finie. Ainsi, la v.a.r. $e^{t X_n}$ est également une v.a.r. finie. Elle admet donc des moments à tout ordre, en particulier une espérance.

On en déduit que la fonction M_{X_n} est définie sur \mathbb{R} .

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 M_{X_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tX_n}) \\
 &= \sum_{k=0}^n e^{kt} \mathbb{P}([X_n = k]) && \text{(par théorème de transfert)} \\
 & && (X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket) \\
 &= \sum_{k=0}^n e^{kt} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} && \text{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kt} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^t)^k 1^{n-k} \\
 &= \frac{1}{2^n} (e^t + 1)^n && \text{(d'après la formule du binôme de Newton)}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, M_{X_n}(t) = \frac{1}{2^n} (1 + e^t)^n}$$

□

- b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}, M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} ((1 + e^t)^n + (1 + e^{-t})^n)$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

La v.a.r. Y_n est une v.a.r. finie (car les v.a.r. X_n et S le sont). Ainsi, la v.a.r. e^{tY_n} est également une v.a.r. finie. Elle admet donc des moments à tout ordre, en particulier une espérance.

On en déduit que la fonction M_{Y_n} est définie sur \mathbb{R} .

- Déterminons la loi de Y_n .

× Tout d'abord, comme $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $S(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a : $Y_n(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket$.

× Soit $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$.

La famille $([S = -1], [S = 1])$ forme un système complet d'événements.

Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y_n = k]) &= \mathbb{P}([S = -1] \cap [Y_n = k]) + \mathbb{P}([S = 1] \cap [Y_n = k]) \\
 &= \mathbb{P}([S = -1] \cap [S X_n = k]) + \mathbb{P}([S = 1] \cap [S X_n = k]) \\
 &= \mathbb{P}([S = -1] \cap [-X_n = k]) + \mathbb{P}([S = 1] \cap [X_n = k]) \\
 &= \mathbb{P}([S = -1]) \mathbb{P}([X_n = -k]) + \mathbb{P}([S = 1]) \mathbb{P}([X_n = k]) && \text{(car les v.a.r. } S \text{ et } X_n \\
 & && \text{sont indépendantes)} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = -k]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = k])
 \end{aligned}$$

Trois cas se présentent alors :

- si $k \in \llbracket -n, 0 \rrbracket$, alors $[X_n = k] = \emptyset$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = -k]) + \frac{1}{2} \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = -k])$$

- si $k = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_n = 0]) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = 0]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ &= \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

- si $k \in]0, n[$, alors $[X_n = -k] = \emptyset$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) = \frac{1}{2} \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = k])$$

• Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tY_n}) \\ &= \sum_{k=-n}^n e^{kt} \mathbb{P}([Y_n = k]) \\ &= \sum_{k=-n}^{-1} (e^{kt} \mathbb{P}([Y_n = k])) + e^{0t} \mathbb{P}([Y_n = 0]) + \sum_{k=1}^n (e^{kt} \mathbb{P}([Y_n = k])) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{-1} (e^{kt} \mathbb{P}([X_n = -k])) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (e^{kt} \mathbb{P}([X_n = k])) \end{aligned}$$

× Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{-1} e^{kt} \mathbb{P}([X_n = -k]) &= \sum_{j=1}^n e^{-jt} \mathbb{P}([X_n = j]) && \text{(par changement d'indice } j = -k) \\ &= \sum_{j=1}^n e^{-jt} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (e^{-t})^j 1^{n-j} \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} (e^{-t})^j 1^{n-j} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2^n} ((e^{-t} + 1)^n - 1) && \text{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

× De même :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{kt} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \sum_{k=1}^n e^{kt} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (e^t)^k 1^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} (e^t)^k 1^{n-k} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2^n} ((e^t + 1)^n - 1) && \text{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 M_{Y_n}(t) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} ((1 + e^{-t})^n - 1) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} ((1 + e^t)^n - 1) \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} (1 + e^{-t})^n - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} (1 + e^t)^n - \frac{1}{2^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} ((1 + e^{-t})^n + (1 + e^t)^n) - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} ((1 + e^{-t})^n + (1 + e^t)^n) - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} ((1 + e^t)^n + (1 + e^{-t})^n)} \quad \square$$

- c) En utilisant l'égalité $(1 + e^{-t})^n = e^{-nt} (1 + e^t)^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrons l'égalité : $(1 + e^{-t})^n = e^{-nt} (1 + e^t)^n$.

$$\begin{aligned}
 e^{-nt} (1 + e^t)^n &= (e^{-t})^n (1 + e^t)^n \\
 &= (e^{-t}(1 + e^t))^n \\
 &= (e^{-t} + 1)^n
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, (1 + e^{-t})^n = e^{-nt} (1 + e^t)^n}$$

- Il s'agit de démontrer que les v.a.r. Y_n et $X_n - H_n$ ont même loi. On peut déjà remarquer : $Y(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket$. Or, en question 1.c), on a démontré que, si deux v.a.r. X et Y vérifient :

$$\times X(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket,$$

$$\times Y(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket,$$

$$\times M_X = M_Y,$$

alors X et Y ont même loi.

Pour répondre à cette question, il suffit donc de trouver une v.a.r. H_n indépendante de X_n telle que :

$$(X_n - H_n)(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket \quad \text{et} \quad M_{Y_n} = M_{X_n - H_n}$$

Pour déterminer une telle v.a.r. H_n , on commencera par supposer qu'elle existe pour en déduire des propriétés sur sa loi, puis on choisira une v.a.r. vérifiant ces propriétés, et enfin on établira que l'on est bien dans le cadre d'application de la question 1.c).

- Supposons qu'il existe une telle v.a.r. H_n . Alors, soit $t \in \mathbb{R}$:

× d'une part :

$$\begin{aligned}
 M_{X_n - H_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{t(X_n - H_n)}) \\
 &= \mathbb{E}(e^{tX_n} e^{-tH_n}) \\
 &= \mathbb{E}(e^{tX_n}) \mathbb{E}(e^{-tH_n}) \quad (\text{car, par lemme des coalitions, les v.a.r. } e^{tX_n} \text{ et } e^{-tH_n} \text{ sont indépendantes}) \\
 &= M_{X_n}(t) \mathbb{E}(e^{-tH_n}) \\
 &= \frac{1}{2^n} (1 + e^t)^n \mathbb{E}(e^{-tH_n}) \quad (\text{d'après la question 4.a})
 \end{aligned}$$

× d'autre part :

$$\begin{aligned}
 M_{Y_n}(t) &= \frac{1}{2^{n+1}} \left((1 + e^t)^n + (1 + e^{-t})^n \right) && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \left((1 + e^t)^n + e^{-nt} (1 + e^t)^n \right) && \text{(d'après l'indication de l'énoncé)} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} (1 + e^t)^n (1 + e^{-nt}) \\
 &= \frac{1}{2^n} (1 + e^t)^n \times \frac{1}{2} (1 + e^{-nt})
 \end{aligned}$$

Ainsi, si H_n vérifie les propriétés souhaitées :

$$\begin{aligned}
 M_{X_n - H_n}(t) = M_{Y_n}(t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} (1 + e^t)^n \mathbb{E}(e^{-tH_n}) = \frac{1}{2^n} (1 + e^t)^n \times \frac{1}{2} (1 + e^{-nt}) \\
 &\Leftrightarrow \mathbb{E}(e^{-tH_n}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-nt}) \\
 &\Leftrightarrow \mathbb{E}(e^{-tH_n}) = e^{-0t} \frac{1}{2} + e^{-nt} \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

- On semble faire apparaître ici le théorème de transfert. On choisit donc une v.a.r. H_n qui vérifie cette égalité. On choisit alors une v.a.r. H_n , indépendante de X_n telle que :
 - × $H_n(\Omega) = \{0, n\}$,
 - × $\mathbb{P}([H_n = 0]) = \mathbb{P}([H_n = n]) = \frac{1}{2}$.
- Vérifions qu'avec cette v.a.r. H_n , nous sommes dans le cadre d'application de la question 1.c).
 - × Tout d'abord, comme $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $H_n(\Omega) = \{0, n\}$, alors : $(X_n - H_n)(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket$.
 - × Ensuite, la v.a.r. e^{-tH_n} admet une espérance en tant que v.a.r. finie (car H_n est une v.a.r. finie). Ainsi, par théorème de transfert, soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(e^{-tH_n}) = e^{-0t} \mathbb{P}([H_n = 0]) + e^{-nt} \mathbb{P}([H_n = n]) = \frac{1}{2} + e^{-nt} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + e^{-nt})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 M_{Y_n}(t) &= \frac{1}{2^n} (1 + e^t)^n \times \frac{1}{2} (1 + e^{-nt}) \\
 &= M_{X_n}(t) \times \mathbb{E}(e^{-tH_n}) \\
 &= \mathbb{E}(e^{tX_n}) \mathbb{E}(e^{-tH_n}) \\
 &= \mathbb{E}(e^{tX_n} e^{-tH_n}) && \text{(car les v.a.r. } e^{tX_n} \text{ et } e^{-tH_n} \text{ sont indépendantes)} \\
 &= M_{X_n - H_n}(t)
 \end{aligned}$$

D'où : $M_{Y_n} = M_{X_n - H_n}$

D'après 1.c), on en déduit que les v.a.r. Y_n et $X_n - H_n$ suivent la même loi.

Commentaire

Les termes « en utilisant ... » de cette question font hésiter quant à la nécessité de démontrer l'égalité énoncée. Dans le doute, on le démontre. □

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et \mathcal{D}_X le domaine de définition de la fonction K_X .

a) Donner la valeur de $K_X(0)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, la v.a.r. $e^{0X} = 1$ (v.a.r. constante égale à 1) est une v.a.r. finie. Elle admet donc une espérance. Donc $M_X(0)$ est bien défini. De plus :

$$M_X(0) = \mathbb{E}(e^{0X}) = \mathbb{E}(1) = 1$$

- Ainsi, $K_X(0)$ est bien défini et :

$$K_X(0) = \ln(M_X(0)) = \ln(1) = 0$$

$K_X(0) = 0$

□

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX + b$. Justifier pour tout réel t pour lequel at appartient à \mathcal{D}_X , l'égalité :

$$K_Y(t) = bt + K_X(at)$$

Démonstration.

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $at \in \mathcal{D}_X$.

- Comme $at \in \mathcal{D}_X$, alors $K_X(at)$ est bien défini, donc $M_X(at)$ également et : $M_X(at) > 0$.
- De plus :

$$M_X(at) = \mathbb{E}(e^{at}) = \mathbb{E}(e^{t(aX)}) = \mathbb{E}(e^{t(aX+b)-bt}) = \mathbb{E}(e^{tY} e^{-bt}) = e^{-bt} \mathbb{E}(e^{tY})$$

Or, par définition de $M_Y(t)$ (si cette quantité existe) : $M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY})$.

D'après le calcul précédent, on en déduit que le réel $M_Y(t)$ est bien défini et :

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

- Comme : $M_X(at) > 0$ et $e^{bt} > 0$, alors : $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at) > 0$.
 On en déduit que $K_Y(t)$ est bien défini. Et enfin :

$$K_Y(t) = \ln(M_Y(t)) = \ln(e^{bt} M_X(at)) = bt + \ln(M_X(at)) = bt + K_X(at)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $at \in \mathcal{D}_X$: $K_Y(t) = bt + K_X(at)$.

Commentaire

On notera que la difficulté de cette question ne réside pas dans la démonstration de la relation entre $K_Y(t)$ et $K_X(at)$ mais bien dans la démonstration de l'existence de tous les objets manipulés.

□

- c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi.
Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variables aléatoire X ?

Démonstration.

- Soit $t \in \mathcal{D}_X$.

Les v.a.r. X et $-X$ ont même loi. On en déduit que les v.a.r. e^{tX} et e^{-tX} ont même loi.

Or, comme $t \in \mathcal{D}_X$, $K_X(t)$ existe, donc e^{tX} admet une espérance ($M_X(t)$) et : $M_X(t) > 0$.

On en déduit que la v.a.r. e^{-tX} admet une espérance ($M_{-X}(t) = M_X(-t)$) et : $M_X(-t) > 0$.

D'où : $-t \in \mathcal{D}_X$.

On en déduit que, pour tout $t \in \mathcal{D}_X$, on a : $-t \in \mathcal{D}_X$.

- Soit $t \in \mathcal{D}_X$, alors $-t \in \mathcal{D}_X$.

- Ainsi, d'après la question précédente (appliquée à $a = -1$ et $b = 0$) :

$$K_{-X}(t) = 0 \times t + K_X(-t) = K_X(-t)$$

- De plus, comme X et $-X$ ont même loi (on rappelle que $M_X(t)$ et $M_{-X}(t)$ sont bien définis car $t \in \mathcal{D}_X$ et $-t \in \mathcal{D}_X$) :

$$M_{-X}(t) = \mathbb{E}(e^{t(-X)}) = \mathbb{E}(e^{tX}) = M_X(t)$$

Ainsi : $K_{-X}(t) = \ln(M_{-X}(t)) = \ln(M_X(t)) = K_X(t)$.

On en déduit : $K_X(t) = K_{-X}(t) = K_X(-t)$.

Ainsi, si les v.a.r. X et $-X$ suivent la même loi : $\forall t \in \mathcal{D}_X, K_X(t) = K_X(-t)$.

- Supposons maintenant que la fonction K_X est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{D}_X . Soit $p \in \mathbb{N}$:

× tout d'abord : $Q_{2p+1}(X) = K_X^{(2p+1)}(0)$,

× ensuite : $\forall t \in \mathcal{D}_X, K_X(t) = K_X(-t)$.

Alors, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathcal{D}_X, K_X^{(n)}(t) = (-1)^n K_X^{(n)}(-t)$.

En particulier, pour tout $t \in \mathcal{D}_X$:

$$K_X^{(2p+1)}(t) = (-1)^{2p+1} K_X^{(2p+1)}(-t) = -K_X^{(2p+1)}(-t)$$

Comme $0 \in \mathcal{D}_X$ (d'après **5.a**), on en déduit :

$$K_X^{(2p+1)}(0) = -K_X^{(2p+1)}(0) \Leftrightarrow 2K_X^{(2p+1)}(0) = 0 \Leftrightarrow K_X^{(2p+1)}(0) = 0$$

Ainsi, si X et $-X$ suivent la même loi, sous réserve d'existence : $\forall p \in \mathbb{N}, Q_{2p+1}(X) = 0$.

Commentaire

- Remarquons que si K_X n'est pas dérivable sur \mathcal{D}_X alors on ne peut rien dire des cumulants de X , puisque ces derniers n'existent pas.
- Dans le programme ECE, on trouve la propriété :

Les v.a.r. X et Y ont même loi \Leftrightarrow Les v.a.r. X et Y ont même fonction de répartition

- On peut alors démontrer que si X et Y sont des v.a.r. discrètes (resp. à densité), on a :

- Les v.a.r. X et Y ont même loi
- Les v.a.r. X et Y admettent un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$

Cette dernière propriété est aussi vérifiée pour les v.a.r. quelconques mais n'est pas explicitement écrite dans ce cas précis. Toutefois, on peut considérer qu'on y a accès puisque le programme précise : « on admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques ».

- Enfin, on utilise dans cette question la propriété :

X et Y ont même loi $\Rightarrow f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi

où f est une fonction (ici $x \mapsto e^{tx}$).

Cette propriété est facile à démontrer dans le cas de v.a.r. discrètes ou à densité. On l'admettra pour le cas de v.a.r. quelconques. □

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et \mathcal{D}_X et \mathcal{D}_Y les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y .

a) Monter que pour tout réel t appartenant à la fois à \mathcal{D}_X et \mathcal{D}_Y , on a : $K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$.

Démonstration.

Soit $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$.

- Comme $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$, les quantités $K_X(t)$ et $K_Y(t)$ sont bien définies. En particulier, $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ sont bien définies et : $M_X(t) > 0$ et $M_Y(t) > 0$. Ainsi, les v.a.r. e^{tX} et e^{tY} :

× admettent une espérance,

× sont indépendantes par lemme des coalitions, car X et Y sont indépendantes.

On en déduit que la v.a.r. $e^{tX} \times e^{tY} = e^{t(X+Y)}$ admet une espérance.

Ainsi, la quantité $M_{X+Y}(t)$ est bien définie.

Commentaire

- On utilise ici le fait que si deux v.a.r. U et V sont indépendantes et admettent une espérance alors, la v.a.r. produit UV admet une espérance donnée par : $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U) \mathbb{E}(V)$. L'hypothèse d'indépendance est ici cruciale pour démontrer l'existence de l'espérance du produit et pour obtenir sa valeur.

Commentaire

- Dans le cas général, la v.a.r. produit UV admet une espérance si les v.a.r. U et V admettent **un moment d'ordre 2**.

- On peut se demander d'où provient cette hypothèse liée aux moments d'ordre 2. Elle est issue d'un théorème de domination. Détaillons ce point.

Remarquons tout d'abord : $(U - V)^2 \geq 0$.

On en déduit : $U^2 - 2UV + V^2 \geq 0$.

Et, en réordonnant : $UV \leq \frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}V^2$. Ou encore :

$$0 \leq |UV| \leq \frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}V^2$$

Comme U et V admettent un moment d'ordre 2, la v.a.r. $\frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}V^2$ admet une espérance comme combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.

Ainsi, par théorème de domination (présenté seulement dans le programme ECS), la v.a.r. $|UV|$ admet une espérance. Il en est de même de la v.a.r. UV .

- De plus :

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(e^{t(X+Y)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX} e^{tY}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX}) \mathbb{E}(e^{tY}) \quad (\text{car les v.a.r. } e^{tX} \text{ et } e^{tY} \text{ sont} \\ &\quad \text{indépendantes}) \\ &= M_X(t) M_Y(t) \end{aligned}$$

- Enfin, comme $M_X(t) > 0$ et $M_Y(t) > 0$, alors : $M_{X+Y}(t) > 0$. Donc $K_{X+Y}(t)$ est bien définie. On obtient :

$$K_{X+Y}(t) = \ln(M_{X+Y}(t)) = \ln(M_X(t) M_Y(t)) = \ln(M_X(t)) + \ln(M_Y(t)) = K_X(t) + K_Y(t)$$

$$\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y, K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$$

□

- b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X , Y et $X + Y$.

Démonstration.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Si K_X est de classe \mathcal{C}^p sur \mathcal{D}_X et K_Y est de classe \mathcal{C}^p sur \mathcal{D}_Y , alors, d'après la question précédente, K_{X+Y} est de classe \mathcal{C}^p sur $\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$ et :

$$\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y, K_{X+Y}^{(p)}(t) = K_X^{(p)}(t) + K_Y^{(p)}(t)$$

Or $0 \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$. Donc :

$$Q_p(X + Y) = K_{X+Y}^{(p)}(0) = K_X^{(p)}(0) + K_Y^{(p)}(0) = Q_p(X) + Q_p(Y)$$

Finalemment, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si $Q_p(X)$ et $Q_p(Y)$ sont bien définis, alors :

$$Q_p(X + Y) = Q_p(X) + Q_p(Y).$$

□

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

a) Montrer que la fonction M_U est définie sur \mathbb{R} et donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}, M_U(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

Le réel $M_U(t)$ existe si et seulement si la v.a.r. e^{tU} admet une espérance.

Par théorème de transfert, la v.a.r. e^{tU} admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_U(x) dx \text{ est absolument convergente.}$$

Les fonctions $x \mapsto e^{tx}$ et f_U étant à valeurs positives sur \mathbb{R} (f_U est une densité de probabilité), cela revient à démontrer que cette intégrale est convergente.

- De plus, la fonction f_u est nulle en dehors de $[0, 1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_U(x) dx = \int_0^1 e^{tx} f_U(x) dx$$

- La fonction $x \mapsto e^{tx} f_U(x)$ est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 e^{tx} f_U(x) dx$ est bien définie.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la v.a.r. e^{tU} admet une espérance.

La fonction M_U est donc définie sur \mathbb{R} .

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $t = 0$, alors d'après la question **5.a)** : $M_U(0) = 1$.

× si $t \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} M_U(t) &= \mathbb{E}(e^{tU}) \\ &= \int_0^1 e^{tx} f_U(x) dx \quad (\text{après les points précédents}) \\ &= \int_0^1 e^{tx} dx \\ &= \left[\frac{1}{t} e^{tx} \right]_0^1 \quad (\text{car } t \neq 0) \\ &= \frac{1}{t} (e^t - 1) \end{aligned}$$

Finalement : $M_U : t \mapsto \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

□

b) Calculer la dérivée de la fonction M_U en tout point $t \neq 0$.

Démonstration.

- La fonction M_U est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient $M_U = \frac{f_1}{f_2}$ où :
 - × $f_1 : t \mapsto e^t - 1$ est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$,
 - × $f_2 : t \mapsto t$:
 - ▶ est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
 - ▶ ne s'annule pas sur ces intervalles.
- Soit $t \in] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$M'_U(t) = \frac{e^t \times t - (e^t - 1) \times 1}{t^2}$$

$$\forall t \in] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[, M'_U(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}$$

□

c) Trouver la limite du quotient $\frac{M_U(t) - 1}{t}$ lorsque t tend vers 0.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{\frac{e^t - 1}{t} - 1}{t} = \frac{\frac{e^t - 1 - t}{t}}{t} = \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$$

- Déterminons, si elle existe, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$.
 - × Tout d'abord : $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$. Ainsi : $e^t - 1 - t = \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$. D'où :

$$e^t - 1 - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$$

- × On en déduit :

$$\frac{e^t - 1 - t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{1}{2}.$$

□

d) Montrer que la fonction M_U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{M_U(t) - M_U(0)}{t - 0} = \frac{1}{2}$.

$$\text{On en déduit que la fonction } M_U \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } M'_U(0) = \frac{1}{2}.$$

- De plus, d'après la question 7.b), la fonction M_U est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

$$\text{On en déduit que la fonction } M_U \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

- La fonction M_U est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la dérivabilité sur ces intervalles (question 7.b).
- On cherche enfin à montrer que la fonction M_U est de classe \mathcal{C}^1 en 0, c'est-à-dire que la fonction M'_U est continue en 0. On rappelle :

$$M'_U : t \mapsto \begin{cases} \frac{t e^t - e^t + 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On cherche donc à montrer : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t e^t - e^t + 1}{t^2} = \frac{1}{2}$.

× On sait déjà : $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$. Ainsi :

$$t e^t = t \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) = t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} t e^t - e^t + 1 &= \cancel{t} + t^2 + \frac{t^3}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^3) - \left(\cancel{1} + \cancel{t} + \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) + \cancel{1} \\ &= \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \quad (\text{car } t^3 = o_{t \rightarrow 0}(t^2)) \end{aligned}$$

Ainsi : $t e^t - e^t + 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$.

× On obtient :

$$M'_U(t) = \frac{t e^t - e^t + 1}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cancel{t^2} \frac{1}{2}}{\cancel{t^2}} = \frac{1}{2}$$

On en déduit : $\lim_{t \rightarrow 0} M'_U(t) = \frac{1}{2} = M'_U(0)$.

La fonction M'_U est donc continue en 0.

Finalement, la fonction M_U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Commentaire

- On pouvait également déterminer le DL à l'ordre 2 « $t e^t - e^t + 1 = \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$ » en appliquant la formule de Taylor-Young à la fonction $t \mapsto t e^t - e^{t^2} + 1$ (qui est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}).
- L'utilisation de la formule de Taylor-Young serait un peu plus cohérente au regard du programme d'ECE. On ne privilégie cependant pas cette méthode ici puisqu'elle est bien plus chronophage que celle présentée. □

8. Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

a) Exprimer K_X en fonction de M_U , où la variable aléatoire U a été définie dans la question 7.

Démonstration.

- Montrons que la fonction K_U est bien définie, i.e. : $\forall t \in \mathbb{R}, M_U(t) > 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :

× si $t \in]-\infty, 0[$:

$$\begin{aligned} M_U(t) > 0 &\Leftrightarrow \frac{e^t - 1}{t} > 0 \\ &\Leftrightarrow e^t - 1 < 0 \quad (\text{car } t < 0) \\ &\Leftrightarrow e^t < 1 \\ &\Leftrightarrow t < 0 \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi.

× si $t = 0$, alors : $M_U(0) = 1 > 0$.

× si $t \in]0, +\infty[$, alors, avec un raisonnement similaire au cas $t \in]-\infty, 0[$, on obtient également : $M_U(t) > 0$.

La fonction K_U est bien définie sur \mathbb{R} .

Commentaire

- L'esprit du sujet est ici de faire l'étude des fonctions M_X et K_X dans le cas particulier de certaines lois usuelles. C'est pourquoi on exploite l'expression explicite de M_U pour démontrer l'existence de K_U .
- On pourrait en fait démontrer dans un cadre très général que si $M_X(t)$ est bien définie, alors, comme la v.a.r. e^{tX} est à valeurs **strictement** positives : $M_X(t) > 0$. On démontrera cette implication dans la partie III qui, elle traite du cas général.

- De plus, rappelons :

$$U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \Leftrightarrow Y = (\beta - \alpha)U + \alpha \hookrightarrow \mathcal{U}([\alpha, \beta])$$

Ainsi, en notant $Y = (\beta - \alpha)U + \alpha$, on obtient que les v.a.r. Y et X ont même loi.

- Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $(\beta - \alpha)t \in \mathbb{R}$. On en déduit, d'après la question 5.b), que $K_Y(t)$ existe et :

$$K_Y(t) = \alpha t + K_U((\beta - \alpha)t) = \alpha t + \ln \left(M_U((\beta - \alpha)t) \right)$$

(on rappelle que, comme la fonction K_Y est bien définie sur \mathbb{R} , la fonction M_Y aussi et : $\forall t \in \mathbb{R}, M_Y(t) > 0$)

- Enfin, comme les v.a.r. X et Y ont même loi, alors les v.a.r. e^{tX} et e^{tY} ont même loi. Or, comme la fonction M_Y est bien définie sur \mathbb{R} , la v.a.r. e^{tY} admet une espérance strictement positive. Ainsi, la v.a.r. e^{tX} admet la même espérance strictement positive, i.e. la fonction M_X est définie sur \mathbb{R} et : $\forall t \in \mathbb{R}, M_X(t) = M_Y(t) > 0$.

On en déduit que la fonction K_X est définie sur \mathbb{R} et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, K_X(t) = \alpha t + \ln \left(M_U((\beta - \alpha)t) \right).$$

□

b) Justifier que la fonction K_X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et établir l'égalité : $Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$.

Démonstration.

• Tout d'abord, la fonction $\widetilde{M}_U : t \mapsto M_u((\beta - \alpha)t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (on rappelle que M_U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} d'après **7.d**).

De plus, comme $M_U(]-\infty, +\infty[) \subset]0, +\infty[$ (démontré dans la question précédente), pour tout $t \in \mathbb{R} : :$

$$\widetilde{M}_U(t) = M_U((\beta - \alpha)t) > 0$$

• Ensuite, la fonction $t \mapsto \ln \left(M_u((\beta - \alpha)t) \right)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} car la composée $\ln \circ \widetilde{M}_U$ de :

× $\widetilde{M}_U : t \mapsto M_U((\beta - \alpha)t)$ qui :

- est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ,

- vérifie : $\widetilde{M}_U(]-\infty, +\infty[) \subset]0, +\infty[$

× \ln qui est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que la fonction K_X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

• Par définition de $Q_1(X)$, on a : $Q_1(X) = K'_X(0)$.

Or, d'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R} :$

$$K'_X(t) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha) M'_U((\beta - \alpha)t)}{M_U((\beta - \alpha)t)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} Q_1(X) &= K'_X(0) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha) M'_U(0)}{M_U(0)} \\ &= \alpha + \frac{(\beta - \alpha) \frac{1}{2}}{1} && \text{(d'après 7.a) et 7.d)} \\ &= \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

Finalement, comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\alpha, \beta]) : \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} = Q_1(X)$. □

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

a) Déterminer les fonctions M_T et K_T .

Démonstration.

• Soit $t \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, la quantité $M_T(t)$ est bien définie si la v.a.r. e^{tT} admet une espérance.

Or, par théorème de transfert, la v.a.r. e^{tT} admet une espérance si et seulement si la série

$\sum_{n \geq 0} e^{tn} \mathbb{P}([T = n])$ est absolument convergente.

Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N e^{kt} \mathbb{P}([T = k]) &= \sum_{k=0}^N e^{kt} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\text{car } T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^N \frac{(e^t)^k \lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^N \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ en $x = \lambda e^t$. Cette série est convergente et :

$$\sum_{k=0}^N \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = \exp(\lambda e^t)$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} e^{tn} \mathbb{P}([T = n])$ converge. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la v.a.r. e^{tT} admet une espérance.

On en déduit que la fonction M_T est définie sur \mathbb{R} .

- De plus, soit $t \in \mathbb{R}$:

$$M_T(t) = \mathbb{E}(e^{tT}) = e^{-\lambda} \exp(\lambda e^t) = \exp(-\lambda + \lambda e^t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

$$M_T : t \mapsto \exp(\lambda(e^t - 1))$$

- On a bien, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $M_T(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)) > 0$.

La fonction K_T est donc définie sur \mathbb{R} .

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$K_T(t) = \ln(M_T(t)) = \ln(\exp(\lambda(e^t - 1))) = \lambda(e^t - 1)$$

$$K_T : t \mapsto \lambda(e^t - 1)$$

□

b) En déduire les cumulants de T .

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction K_T est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} en tant que transformée affine de la fonction \exp de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Ainsi, la v.a.r. T admet des cumulants à tout ordre.

- Ensuite, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $K_T'(t) = \lambda e^t$.

On en déduit, par récurrence immédiate, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $K_T^{(n)}(t) = \lambda e^{nt}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Q_n(X) = K_T^{(n)}(0) = \lambda$.

□

10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

a) Justifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$.

Démonstration.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$ est convergente si et seulement si :
 - l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^0 \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$ est convergente.
 - et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$ est convergente.
- Démontrons tout d'abord la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$.

La fonction $h_t : x \mapsto \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} h_t(x) dx$ est impropre seulement en $+\infty$.

– Tout d'abord, la fonction h_t est continue sur le **segment** $[0, 1]$.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 h_t(x) dx$ est bien définie.

– Par ailleurs :

$$\times \forall x \in [1, +\infty[, \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \geq 0.$$

$$\times \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$\times \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 (> 1).

Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} h_t(x) dx$ est convergente.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} h_t(x) dx$ est convergente.

- Il reste à démontrer la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$.

La fonction h_t est continue sur $] -\infty, 0]$ donc cette intégrale est impropre seulement en $-\infty$.

En effectuant le changement de variable affine $u = -x$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-tu - \frac{(-u)^2}{2}\right) (-du) \\ &= - \int_0^{+\infty} \exp\left(-tu - \frac{u^2}{2}\right) du = - \int_0^{+\infty} f_{-t}(u) du \end{aligned}$$

En appliquant le résultat précédent en $-t \in \mathbb{R}$, on conclut que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_{-t}(u) du$ est convergente.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^0 h_t(x) dx$ est convergente.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} h_t(x) dx$ est bien convergente.

Commentaire

- Le programme officiel précise que « les changements de variables **non affines** ne seront pratiqués qu'avec des intégrales sur un segment ». Il est donc autorisé, sous réserve de convergence, d'effectuer un changement de variable affine sur une intégrale généralisée (ce qui est fait dans cette question).
- Ici, on pose le changement de variable affine $u = -x$. Il faut s'habituer à effectuer ce changement de variable classique à la volée. Rappelons comment le présenter formellement.

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -x \text{ (et donc } x = -u) \\ \hookrightarrow du = -dx \text{ et } dx = -du \\ \bullet x = -\infty \Rightarrow u = +\infty \\ \bullet x = 0 \Rightarrow u = 0 \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

- La fonction intégrande $h_t : x \mapsto e^{tx - \frac{x^2}{2}}$:
 - × n'admet pas d'équivalent plus simple en $+\infty$,
 - × tend très rapidement vers 0 en $+\infty$.

Du fait de ces deux points, on opte dans la démonstration pour un critère de négligeabilité. De manière informelle, la présence du terme $e^{-\frac{x^2}{2}}$ produit une convergence extrêmement rapide de h_t vers 0 en $+\infty$. L'intégrande h_t apparaît donc suffisamment petite en $+\infty$ pour que l'intégrale sur $[1, +\infty[$ associée soit convergente. Formellement, cette idée est concrétisée en comparant h_t à l'intégrande $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, positive et dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ associée est convergente.

- La démonstration de la propriété $\exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) = o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'est pas forcément un attendu de la question. Prendre l'initiative de la comparaison à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ démontre la bonne compréhension des mécanismes en jeu. Il faut évidemment savoir comment faire cette démonstration dont on donne ci-dessous les détails :

$$\frac{e^{tx - \frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = x^2 e^{tx - \frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{4}}} e^{tx - \frac{x^2}{4}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

En effet :

- × en posant $u = \frac{x^2}{4}$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{4}}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} 4 \frac{u}{e^u} = 0$ (par croissances comparées).
- × $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{tx - \frac{x^2}{2}} = 0$. □

b) Montrer que la fonction M_Z est définie sur \mathbb{R} et donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}, M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Démonstration.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Le réel $M_Z(t)$ existe si et seulement si la v.a.r. e^{tZ} admet une espérance.

Or, par théorème de transfert, la v.a.r. e^{tZ} admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_Z(x) dx$ est absolument convergente.

Les fonctions $x \mapsto e^{tx}$ et f_Z étant à valeurs positives sur \mathbb{R} (f_Z est une densité de probabilité), cela revient à démontrer que cette intégrale est convergente.

D'après la question précédente, cette intégrale est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 Ainsi, M_Z est définie sur \mathbb{R} .

- Remarquons que pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$:

$$e^{tx} f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}t^2} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}$$

- On effectue alors le changement de variable affine $u = x - t$.

$$\begin{cases} u = x - t \text{ (et donc } x = u + t) \\ \hookrightarrow du = dx \text{ et } dx = du \\ \bullet x = -\infty \Rightarrow u = -\infty \\ \bullet x = +\infty \Rightarrow u = +\infty \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_Z(x) dx &= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u) du = e^{\frac{1}{2}t^2} \quad (\text{car } f_Z \text{ est une densité de probabilité}) \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

□

c) En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- On note Y la v.a.r. définie par : $Y = \sigma Z + \mu$ (où Z est toujours une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$). Alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

De plus, d'après la question 5.b), pour tout t tel que $\sigma t \in \mathcal{D}_Z$:

$$K_Y(t) = \mu t + K_Z(\sigma t)$$

- Déterminons donc d'abord K_Z .

× Tout d'abord, remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} > 0$.
 Ainsi, K_Z est définie sur \mathbb{R} , i.e. : $\mathcal{D}_Z = \mathbb{R}$.

× De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$K_Z(t) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}t^2}\right) = \frac{1}{2}t^2$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\sigma t \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_Z$. Ainsi, d'après la question 5.b) :

$$K_Y(t) = \mu t + K_Z(\sigma t) = \mu t + \frac{1}{2} (\sigma t)^2$$

Finalement : $K_Y : t \mapsto \mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2$.

- La fonction K_Y est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale.

Ainsi, la v.a.r. Y admet des cumulants à tout ordre.

- On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
 - × $K'_Y(t) = \mu + \sigma^2 t$ et ainsi : $Q_1(Y) = K'_Y(0) = \mu$.
 - × $K''_Y(t) = \sigma^2$ et ainsi : $Q_2(Y) = K''_Y(0) = \sigma^2$.
 - × pour tout $p \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$, $K_Y^{(p)}(t) = 0$ et ainsi : $Q_p(Y) = K_Y^{(p)}(0) = 0$.

En conclusion : $Q_1(Y) = \mu$, $Q_2(Y) = \sigma^2$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$, $Q_p(Y) = 0$.

□

11. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $W_n = \frac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.

a) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers une variable aléatoire W .

Démonstration.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons X_i une v.a.r. de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On suppose de plus que les v.a.r. X_i sont indépendantes.

Alors, par stabilité des lois de Poisson, la v.a.r. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.

On en déduit que S_n et T_n suivent la même loi. Ainsi, les v.a.r. $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ et $\frac{T_n - n}{\sqrt{n}} = W_n$ ont même loi.

- La suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est constituée de v.a.r. :
 - × indépendantes,
 - × de même loi,
 - × admettant la même espérance 1,
 - × admettant la même variance $1 \neq 0$.

Ainsi, comme $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, la v.a.r. centrée réduite associée à S_n est :

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

- Alors, d'après le théorème central limite :

$$S_n^* \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W \quad \text{où } W \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{S_n^*}(t) = \Phi(t)$.

(la fonction Φ est la fonction de répartition de W)

- Or les v.a.r. $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ et $W_n = \frac{T_n - n}{\sqrt{n}}$ ont même loi, donc même fonction de répartition. On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{W_n}(t) = \Phi(t)$.

On en conclut que la suite de v.a.r. $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers W où $W \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Commentaire

- La forme de la v.a.r. $W_n = \frac{T_n - n}{\sqrt{n}}$ dans le contexte de convergence de v.a.r. doit faire penser **systématiquement** au théorème central limite (TCL).
- De manière générale, si les X_i ont pour espérance m et variance σ^2 , alors :

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}}$$

On voit bien apparaître la division par \sqrt{n} qui est très caractéristique de l'utilisation du TCL.

- Rappelons aussi que si on pose : $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, alors :

$$V_n^* = \sqrt{n} \frac{V_n - m}{\sigma}$$

(on notera : $V_n^* = S_n^*$)

On voit alors apparaître le produit par \sqrt{n} qui est aussi caractéristique du TCL.

- Pour pouvoir justifier de l'application de ce théorème dans cette question, on introduit la v.a.r. S_n qui suit la même loi que T_n et satisfait bien aux hypothèses du TCL. On rappelle, comme remarqué en question **3.c**), que deux v.a.r. qui suivent la même loi ne sont pas forcément égales (on n'a d'ailleurs pas du tout besoin dans cette question de l'égalité $S_n = T_n$). Cependant on peut raisonnablement penser qu'un candidat précisant « $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ » (et non : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$) ne serait pas sanctionné.

□

b) Déterminer la fonction K_{W_n} .

Démonstration.

- Comme $T_n \leftrightarrow \mathcal{P}(n)$, d'après la question **9.a**) :

$$K_{T_n} : t \mapsto n(e^t - 1)$$

- De plus : $W_n = \frac{T_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} T_n - \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} T_n - \sqrt{n}$.

Ainsi, soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{\sqrt{n}} t \in \mathbb{R}$ et, d'après la question **5.b**) :

$$K_{W_n}(t) = -\sqrt{n}t + K_{T_n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}t\right) = -\sqrt{n}t + n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}t} - 1\right)$$

Finalement : $K_{W_n} : t \mapsto -\sqrt{n}t + n\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} - 1\right)$.

□

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_{W_n}(t) = K_W(t)$.

Démonstration.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t}{\sqrt{n}} = 0$. On peut donc appliquer le développement limité précédent en choisissant $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$. On obtient :

$$e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 \right) = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

- On en déduit, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} K_{W_n}(t) &= -\sqrt{n}t + n \left(\cancel{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) - \cancel{x} \right) \\ &= -\sqrt{n}t + n \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \\ &= -\cancel{\sqrt{n}t} + \cancel{\sqrt{n}t} + \frac{t^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \\ &= \frac{t^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2}$.

- Or, comme $W \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, d'après la question 10.c) : $K_W(t) = \frac{t^2}{2}$.

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} = K_W(t)$.

Commentaire

- Soit f une fonction et $(a, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

On rappelle la propriété utilisée dans le deuxième point :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + o_{x \rightarrow x_0}(1)$$

- On peut remarquer que cette question 11. nous fait démontrer, **dans le cas particulier d'une loi de Poisson**, l'implication suivante :

$$W_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, K_{W_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} K_W(t)$$

On peut se poser la question de la généralisation de cette propriété. En effet, il existe un lien entre M_X et F_X , mais cela serait hors de portée du programme ECE. □

Partie III. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe \mathcal{C}^4 sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.

On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on a : $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$.

De plus, on pose : $\mu_4(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^4\right)$.

Commentaire

Dans la définition de μ_4 , on sous-entend que la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))^4$ admet une espérance.

Dans le cours, on démontre les propriétés suivantes :

× si X admet une espérance, il en est de même de $X - \mathbb{E}(X)$ (c'est la v.a.r. centrée associée à X).

Dans ce cas, on a : $\mu_1(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0$.

× si X admet un moment d'ordre 2, il en est de même de $X - \mathbb{E}(X)$.

Dans ce cas, on a : $\mu_2(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \mathbb{V}(X)$.

(la variance est le moment centré d'ordre 2)

De manière générale si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$, il en est de même de $X - \mathbb{E}(X)$.

En effet :

$$(X - \mathbb{E}(X))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\mathbb{E}(X))^{n-k} X^k$$

Ainsi, la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))^n$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire des v.a.r. X^0, X_1, \dots, X^n , qui admettent toutes une espérance.

12. Justifier les égalités : $Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$ et $Q_2(X) = \mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

• La fonction K_X est de classe \mathcal{C}^4 sur I car elle est la composée $K_X = \ln \circ M_X$ où :

× la fonction M_X est :

– est de classe \mathcal{C}^4 sur I ,

– telle que $M_X(I) \subset]0, +\infty[$.

En effet, comme : $\forall t \in I, e^{tX} > 0$, on a : $\forall t \in I, M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) > 0$.

× la fonction \ln est de classe \mathcal{C}^4 sur $]0, +\infty[$.

• Déterminons les dérivées successives de K_X . Soit $t \in I$.

× Tout d'abord : $K_X'(t) = \frac{1}{M_X(t)} \times M_X'(t)$.

$$\begin{aligned} Q_1(X) &= K_X'(0) && \text{(par définition)} \\ &= \frac{1}{M_X(0)} \times M_X'(0) && \text{(d'après le résultat} \\ &&& \text{précédent en } t = 0 \in I) \\ &= \frac{1}{M_X(0)} \times \mathbb{E}(X) && \text{(d'après le résultat} \\ &&& \text{admis dans l'énoncé)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(e^0)} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

$Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$

$$\times \text{ Ensuite : } K_X''(t) = \left(-\frac{1}{(M_X(t))^2} \times M_X'(t) \right) M_X'(t) + \frac{1}{M_X(t)} \times M_X''(t).$$

$$\begin{aligned} Q_1(X) &= K_X''(0) && \text{(par définition)} \\ &= \left(-\frac{1}{(M_X(0))^2} \times M_X'(0) \right) M_X'(0) + \frac{1}{M_X(0)} \times M_X''(0) && \text{(d'après le résultat} \\ &= -\frac{1}{(1)^2} \times \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X) + \frac{1}{1} \times \mathbb{E}(X^2) && \text{précédent en } t = 0 \in I) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{V}(X) && \text{(d'après le résultat} \\ & && \text{admis dans l'énoncé)} \\ & && \text{(d'après la formule} \\ & && \text{de Kœnig-Huygens)} \end{aligned}$$

$$Q_2(X) = \mathbb{V}(X)$$

Commentaire

- On se sert ici du résultat stipulant que toute v.a.r. X qui admet une espérance vérifie :

$$X > 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) > 0 \quad (*)$$

Ce résultat n'est pas officiellement au programme des classes préparatoires commerciales. Seul le résultat plus faible suivant (nommé parfois positivité de l'espérance) figure :

$$X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0 \quad (**)$$

On notera au passage que l'on obtient le même résultat en supposant l'hypothèse plus faible : $\mathbb{P}([X \geq 0]) = 1$.

- Pour démontrer le résultat (*), on peut procéder par l'absurde.

Supposons $X > 0$ et $\text{NON}(\mathbb{E}(X) > 0)$ (autrement dit $\mathbb{E}(X) \leq 0$).

$$\times \text{ Comme } X > 0 \geq 0, \text{ alors, d'après (**): } \mathbb{E}(X) \geq 0.$$

Comme $\mathbb{E}(X) \leq 0$, on en déduit $\mathbb{E}(X) = 0$.

$$\times \text{ D'après l'inégalité de Markov : } \forall a > 0, \mathbb{P}([X > a]) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a} = 0.$$

Une probabilité étant toujours positive, on démontre ainsi : $\forall a > 0, \mathbb{P}([X > a]) = 0$.

$$\times \text{ Démontrons, à l'aide de cette dernière égalité : } \mathbb{P}([X > 0]) = 0.$$

Pour ce faire, on remarque tout d'abord : $[X > 0] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X > \frac{1}{n}]$ (démonstration par double inclusion)

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > 0]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X > \frac{1}{n}]\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N [X > \frac{1}{n}]\right) && \text{(d'après la propriété de} \\ & && \text{la limite monotone)} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left([X > \frac{1}{N}]\right) && \text{(car } ([X > \frac{1}{N}])_{N \in \mathbb{N}^*} \text{ est une} \\ & && \text{suite croissante d'événements)} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} 0 = 0 && \text{(car } \mathbb{P}([X > \frac{1}{N}]) = 0) \end{aligned}$$

Absurde !

□

13. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On pose : $S = X_1 - X_2$.

a) Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :

$$\mathbb{E}(S^4) = 2\mu_4(X) + 6(\mathbb{V}(X))^2$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, les v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi que X , v.a.r. qui admet une espérance. Ainsi $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_2)$ et :

$$\begin{aligned} S &= X_1 - X_2 \\ &= X_1 - X_2 - \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) \\ &= (X_1 - \mathbb{E}(X_1)) - (X_2 - \mathbb{E}(X_2)) \end{aligned}$$

- On en déduit, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} S^4 &= \left((X_1 - \mathbb{E}(X_1)) - (X_2 - \mathbb{E}(X_2)) \right)^4 \\ &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (X_1 - \mathbb{E}(X_1))^{4-k} \left(- (X_2 - \mathbb{E}(X_2)) \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (-1)^k (X_1 - \mathbb{E}(X_1))^{4-k} (X_2 - \mathbb{E}(X_2))^k \end{aligned}$$

Remarquons alors que :

× les v.a.r. $X_1 - \mathbb{E}(X_1)$ et $X_2 - \mathbb{E}(X_2)$ admettent des moments à tout ordre $r \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ car suivent la même loi que $X - \mathbb{E}(X)$ qui admet un moment d'ordre 4.

× d'après le lemme des coalitions, pour tout entier $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$, les v.a.r. $(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^{4-k}$ et $(X_2 - \mathbb{E}(X_2))^k$ sont indépendantes car X_1 et X_2 le sont.

On en déduit que pour tout $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$, la v.a.r. $(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^{4-k} (X_2 - \mathbb{E}(X_2))^k$ admet une espérance. Et par propriété de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^{4-k} (X_2 - \mathbb{E}(X_2))^k \right) = \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^{4-k} \right) \mathbb{E}\left((X_2 - \mathbb{E}(X_2))^k \right)$$

La v.a.r. S^4 admet une espérance comme combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance.

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S^4) &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (-1)^k \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^{4-k} \right) \mathbb{E}\left((X_2 - \mathbb{E}(X_2))^k \right) \\ &= 1 \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^4 \right) \\ &\quad - 4 \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^3 \right) \mathbb{E}\left((X_2 - \mathbb{E}(X_2))^1 \right) \quad (\text{car } X_2 - \mathbb{E}(X_2) \text{ est la} \\ &\quad \text{v.a.r. centrée associée à } X_2) \\ &\quad + 6 \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 \right) \mathbb{E}\left((X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2 \right) \\ &\quad - 4 \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^1 \right) \mathbb{E}\left((X_2 - \mathbb{E}(X_2))^3 \right) \quad (\text{car } X_1 - \mathbb{E}(X_1) \text{ est la} \\ &\quad \text{v.a.r. centrée associée à } X_1) \\ &\quad + 1 \mathbb{E}\left((X_2 - \mathbb{E}(X_2))^4 \right) \\ &= \mu_4(X_1) + 6\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2) + \mu_4(X_2) \end{aligned}$$

Enfin, comme X_1 et X_2 ont même loi que X :

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_2) \quad \text{et} \quad \mu_4(X_1) = \mu_4(X) = \mu_4(X_2)$$

$$\text{Et ainsi : } \mathbb{E}(S^4) = 2\mu_4(X_1) + 6(\mathbb{V}(X))^2.$$

□

b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe \mathcal{C}^4 sur I et que pour tout $t \in I$, on a :

$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t) M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t) M_S'(t) + 3K_S''(t) M_S''(t) + K_S'(t) M_S^{(3)}(t)$$

Démonstration.

Soit $t \in I$ tel que $-t \in I$.

• Comme $-t \in I$, la quantité $M_X(-t)$ est bien définie. On a alors :

$$\begin{array}{ccc} M_X(-t) & = & \mathbb{E}(e^{-tX}) = \mathbb{E}(e^{t(-X)}) = M_{-X}(t) \\ \parallel & & \parallel \\ M_{X_2}(-t) & & M_{-X_2}(t) \quad (\text{car } X \text{ et } X_2 \\ & & \text{ont même loi}) \end{array}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } t \in I \text{ tel que } -t \in I, \text{ on a : } M_{-X_2}(t) = M_{X_2}(-t).$$

• D'autre part :

$$e^{tS} = e^{t(X_1 - X_2)} = e^{tX_1} \times e^{-tX_2}$$

Les v.a.r. e^{tX_1} et e^{-tX_2} :

× admettent toutes les deux une espérance car M_{X_1} est définie en t et M_{X_2} est définie en $-t$ (car on a supposé $-t \in I$).

× sont indépendantes d'après le lemme des coalitions puisque X_1 et X_2 le sont.

On en déduit que la v.a.r. $e^{tX_1} \times e^{-tX_2}$ admet une espérance, donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(e^{tS}) & = & \mathbb{E}(e^{tX_1} \times e^{-tX_2}) = \mathbb{E}(e^{tX_1}) \times \mathbb{E}(e^{-tX_2}) \\ \parallel & & \parallel \\ M_S(t) & & M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(-t) \quad (\text{d'après le} \\ & & \text{point précédent}) \\ & & \parallel \\ & & M_X(t) \times M_X(-t) \quad (\text{car les v.a.r. } X_2 \text{ et } X_1 \\ & & \text{ont même loi que } X) \end{array}$$

$$\text{Ainsi, pour tout intervalle } J \subset I \text{ symétrique par rapport à l'origine, on a :}$$

$$\forall t \in J, M_S(t) = M_X(t) \times M_X(-t).$$

En particulier, la fonction M_S est de classe \mathcal{C}^4 sur tout intervalle $J \subset I$ symétrique par rapport à l'origine, comme produit de fonctions de classe \mathcal{C}^4 sur cet intervalle. On en déduit, comme en question 12, que la fonction K_S est elle aussi de classe \mathcal{C}^4 sur J .

Dans la suite, on note $J \subset I$ un intervalle symétrique par rapport à l'origine. Soit $t \in J$.

• Tout d'abord : $K_S'(t) = \frac{1}{M_S(t)} \times M_S'(t)$.

$$\text{On en déduit : } \forall t \in J, M_S'(t) = K_S'(t) \times M_S(t).$$

- En remarquant : $(M_S)^{(4)}(t) = (M'_S)^{(3)}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & (M_S)^{(4)}(t) \\
 = & (K'_S \times M_S)^{(3)}(t) \\
 = & \left((K'_S \times M_S)' \right)^{(2)}(t) \\
 = & \left(K''_S \times M_S + K'_S \times M'_S \right)^{(2)}(t) \\
 = & \left((K''_S \times M_S + K'_S \times M'_S)' \right)^{(1)}(t) \\
 = & \left((K'''_S \times M_S + K''_S \times M'_S) + (K''_S \times M'_S + K'_S \times M''_S) \right)^{(1)}(t) \\
 = & \left(K'''_S \times M_S + 2 K''_S \times M'_S + K'_S \times M''_S \right)^{(1)}(t) \\
 = & \left((K''''_S \times M_S + K'''_S \times M'_S) + 2 (K''_S \times M'_S + K'_S \times M''_S) + (K''_S \times M''_S + K'_S \times M'''_S) \right)(t) \\
 = & \left(K''''_S \times M_S + 3 K'''_S \times M'_S + 3 K''_S \times M''_S + K'_S \times M'''_S \right)(t) \\
 = & K_S^{(4)}(t) M_S(t) + 3 K_S^{(3)}(t) M'_S(t) + 3 K_S''(t) M''_S(t) + K'_S(t) M_S^{(3)}(t)
 \end{aligned}$$

$$\forall t \in J, M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t) M_S(t) + 3 K_S^{(3)}(t) M'_S(t) + 3 K_S''(t) M''_S(t) + K'_S(t) M_S^{(3)}(t)$$

Commentaire

- Lors de l'étude de $M_S(t)$ (pour $t \in I$) la quantité $M_{X_2}(-t)$ apparaît naturellement. Or, cette quantité existe seulement si $-t \in I$. C'est pourquoi on a décidé dans cette question de restreindre à la démonstration à un intervalle $J \subset I$ symétrique par rapport à l'origine.
- Dans la correction, on a déterminé la dérivée quatrième de M_S en dérivant successivement trois fois la fonction M'_S . On aurait pu utiliser directement la formule de Leibniz qui stipule que si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I , on a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \times g^{(k)}$$

Cette formule n'apparaît pas explicitement dans le programme ECE (mais est bien présente dans le programme ECS de première année). Il est toutefois très classique de la présenter lors de la première année ECE. On pouvait l'utiliser directement ici et écrire :

$$\begin{aligned}
 (M_S)^{(4)}(t) &= (M'_S)^{(3)}(t) = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} K'_S{}^{(3-k)} \times (M_S)^{(k)} \\
 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} K_S^{(4-k)} \times (M_S)^{(k)} \\
 &= K_S^{(4)}(t) M_S(t) + 3 K_S^{(3)}(t) M'_S(t) + 3 K_S''(t) M''_S(t) + K'_S(t) M_S^{(3)}(t)
 \end{aligned}$$

La présence des coefficients 1, 3, 3, 1 dans la formule à démontrer doit mettre sur la piste de l'utilisation d'une formule utilisant les coefficients binomiaux. \square

c) En déduire l'égalité : $\mathbb{E}(S^4) = Q_4(S) + 3(\mathbb{V}(S))^2$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que la fonction M_S est de classe \mathcal{C}^4 sur l'intervalle J (qu'on peut choisir ouvert) qui contient l'origine. On admet donc, comme dans l'énoncé :

$$\forall k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, M_S^{(k)}(0) = \mathbb{E}(S^k)$$

- La v.a.r. S vérifiant les mêmes hypothèses que la v.a.r. X de début de la **Partie III**, on en déduit, que le résultat de la question **12** est vérifié pour la v.a.r. S . Plus précisément :

$$Q_1(S) = \mathbb{E}(S) \quad \text{et} \quad Q_2(S) = \mathbb{V}(S)$$

Remarquons au passage :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(X_1 - X_2) \\ &= \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0 && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi que } X) \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S) &= \mathbb{E}(S^2) - \cancel{(\mathbb{E}(S))^2} && \text{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \\ &= \mathbb{E}(S^2) \end{aligned}$$

- On applique alors l'égalité précédente à $t = 0 \in J$:

$$\begin{aligned} &M_S^{(4)}(0) \\ &= K_S^{(4)}(0) \times M_S(0) + 3K_S^{(3)}(0) \times M_S'(0) + 3K_S''(0) \times M_S''(0) + K_S'(0) \times M_S^{(3)}(0) \\ &= Q_4(S) \times M_S(0) + 3Q_3(S) \times M_S'(0) + 3Q_2(S) \times M_S''(0) + Q_1(S) \times M_S^{(3)}(0) \\ &= Q_4(S) \times \mathbb{E}(e^0) + 3Q_3(S) \times \mathbb{E}(S) + 3Q_2(S) \times \mathbb{E}(S^2) + Q_1(S) \times \mathbb{E}(S^3) \\ &= Q_4(S) + 3Q_3(S) \times \cancel{\mathbb{E}(S)} + 3\mathbb{V}(S) \times \mathbb{E}(S^2) + \cancel{\mathbb{E}(S)} \times \mathbb{E}(S^3) \\ &= Q_4(S) + 3\mathbb{V}(S) \times \mathbb{V}(S) \end{aligned}$$

On a bien : $\mathbb{E}(S^4) = M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3(\mathbb{V}(S))^2$.

□

14. Justifier que le cumulants d'ordre 4 de X est donné par la relation : $Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(\mathbb{V}(X))^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} Q_4(S) &= \mathbb{E}(S^4) - 3(\mathbb{V}(S))^2 && \text{(d'après la question 13.c)} \\ &= \left(2\mu_4(X) + 6(\mathbb{V}(X))^2\right) - 3(\mathbb{V}(S))^2 && \text{(d'après la question 13.a)} \\ &= \left(2\mu_4(X) + 6(\mathbb{V}(X))^2\right) - 3(\mathbb{V}(X_1 - X_2))^2 \\ &= \left(2\mu_4(X) + 6(\mathbb{V}(X))^2\right) - 3(\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2))^2 && \text{(car } X_1 \text{ et } -X_2 \text{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\ &= \left(2\mu_4(X) + 6(\mathbb{V}(X))^2\right) - 3(\mathbb{V}(X_1) + (-1)^2\mathbb{V}(X_2))^2 \\ &= \left(2\mu_4(X) + 6(\mathbb{V}(X))^2\right) - 3(\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X))^2 && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi que } X) \\ &= 2\mu_4(X) + 6(\mathbb{V}(X))^2 - 12(\mathbb{V}(X))^2 = 2\mu_4(X) - 6(\mathbb{V}(X))^2 \end{aligned}$$

- Il reste alors à exprimer $Q_4(S)$ en fonction de $Q_4(X)$.

Rappelons tout d'abord qu'on a démontré en question **13.b)** que pour tout $t \in J$:

$$M_S(t) = M_X(t) M_X(-t)$$

On en conclut :

$$\begin{aligned} K_S(t) &= \ln(M_S(t)) \\ &= \ln(M_X(t) \times M_X(-t)) \\ &= \ln(M_X(t)) + \ln(M_X(-t)) \\ &= K_X(t) + K_X(-t) \end{aligned}$$

Ainsi, par dérivations successives des deux membres de cette égalité :

$$K'_S(t) = K'_X(t) - K'_X(-t)$$

donc
$$\begin{aligned} K''_S(t) &= K''_X(t) - (-K''_X(-t)) \\ &= K''_X(t) + K''_X(-t) \end{aligned}$$

et
$$K^{(3)}_S(t) = K^{(3)}_X(t) - K^{(3)}_X(-t)$$

enfin
$$K^{(4)}_S(t) = K^{(4)}_X(t) + K^{(4)}_X(-t)$$

En particulier, pour $t = 0 \in J$:

$$\begin{array}{rcc} K_S^{(4)}(0) & = & K_X^{(4)}(0) + K_X^{(4)}(0) = 2 K_X^{(4)}(0) \\ \parallel & & \parallel \\ Q_4(S) & & 2 Q_4(X) \end{array}$$

- On en conclut, d'après ce qui précède :

$$2 Q_4(X) = 2 \mu_4(X) - 6 (\mathbb{V}(X))^2$$

Finalement : $Q_4(X) = \mu_4(X) - 3 (\mathbb{V}(X))^2$.
--

□