DS5 (version A)

Exercice 1

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. ***a)*** Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance.
En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

5. ***a)*** Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

6. Loi de $X + Y$.

a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

b) Montrer que $\mathbb{P}\big([X + Y = 1] \big) = \frac{2}{3}$.

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X + Y = n] = \big([X = 1] \cap [Y = n - 1] \big) \bigcup \big([Y = 1] \cap [X = n - 1] \big)$$

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
x = 1
if piece == 0 then
    lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
    while lancer == 0
        lancer = ---
        x = ---
    end
else
    if piece == 1 then
        x = ---
    end
end
disp(x)
```

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 2

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle : $f^2 = f \circ f$).

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Déterminer la matrice A^2 puis établir : $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

b) Donner une base (u) de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{id})$.

d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

3. a) Résoudre l'équation $A^2\, X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id})$.

b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$. On a donc, en particulier : $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2.

2. ***a)*** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

a) On rappelle : $\forall \sigma > 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \, dt = 1$.

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$, puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$.

b) Montrer que, pour tout réel t, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$.

c) En déduire : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$. Puis donner la limite de la suite (u_n).

4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, dt$ puis montrer : $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

5. ***a)*** Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} \;=\; (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

b) En déduire l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}$.

c) On admet l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, \mathrm{e}^{-n}$. En écrivant $u_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)\,(2n)!}$, montrer :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

6. Informatique.
On admet que, si `t` est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
x = 1:n
m = 2 ⋆ n + 1
y = 1:m
v = ...........
w = ...........
u = ........... ⋆ v^2 / w
disp(u)
```

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\, dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. ***a)*** Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2. ***a)*** Montrer que f est impaire.

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3. ***a)*** Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) \ = \ x\ \big(\ln(1+x^2) - 2\big) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est une intégrale convergente.

b) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\ \ln(x)$$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$).

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
V = log(1 + U .^2)
f = -----
disp(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \, dt$.

7. ***a)*** La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

8. ***a)*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9. ***a)*** Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

10. ***a)*** Montrer que :

$$0 \;\leqslant\; \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \;\leqslant\; \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n, non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \;=\; \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

e) Modifier le script présenté à la question ***6)*** pour donner un valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.