DS5 (version A) /155

Exercice 1 /39

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. a) Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

- **1 pt : (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements + FPT**
- **1 pt : pour tout $i \in [\![0, 2]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3} \neq 0$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([X = 1]\big) \ = \ \frac{1}{2}$**

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- **1 pt : $[X = n] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n$**
- **1 pt : (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements + FPT**
- **1 pt : indépendance des événements F_1, F_2, ..., F_{n-1} et P_n pour $\mathbb{P}_{A_0}$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([X = n]\big) \ = \ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$**

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

- **1 pt : $X(\Omega) = \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$ donc la famille $\big([X = n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements**
- **1 pt : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n]\big) \ = \ 1$**
- **1 pt : reconnaissance d'une somme géométrique de raison $1/2$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([X = 0]\big) = \frac{1}{3}$**

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

- **1 pt : La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum n \, \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente**
- **1 pt : reconnaissance d'une série géométrique dérivée première de raison $1/2$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X) = 1$**

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance.
En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{4}{3}$.

- **1 pt : La v.a.r.** $X(X-1)$ **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum n(n-1)\, \mathbb{P}([X=n])$ **est absolument convergente**
- **1 pt : reconnaissance d'une série géométrique dérivée seconde de raison** $1/2$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{4}{3}$
- **1 pt :** $X^2 \;=\; X(X-1)+X$ **donc** X^2 **possède une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X^2) = \frac{7}{3}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$ **par la formule de Kœnig-Huygens**

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

- **1 pt : toute explication raisonnable sur la symétrie des rôles de Pile et Face**

5. ***a)*** Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=j]) = \mathbb{P}([Y=j])$.

- **1 pt :** $[X=1]\cap[Y=j] \;=\; P_1\cap\ldots\cap P_{j-1}\cap F_j \;=\; [Y=j]$

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=1]) = \mathbb{P}([X=i])$.

- **1 pt :** $[X=i]\cap[Y=1] \;=\; F_1\cap\ldots\cap F_{i-1}\cap P_i \;=\; [X=i]$

6. Loi de $X+Y$.

a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

- **3 pts : disjonction de cas bien menée**

b) Montrer que $\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) = \dfrac{2}{3}$.

- **1 pt :** $[X+Y=1] \;=\; [X=0]\cup[Y=0]$
- **1 pt : incompatibilité** $[X=0]$ **et** $[Y=0]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) = \dfrac{2}{3}$

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X+Y=n] = \big([X=1]\cap[Y=n-1]\big) \bigcup \big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$$

- **2 pts : inclusion directe**
- **1 pt : inclusion réciproque**

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X+Y=n]) = \frac{2}{3}\, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- **1 pt : incompatibilité des deux évenements (0 pt si non sens à un moment donné)**

7. Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

a) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
1  piece = grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
2  x = 1
3  if piece == 0 then
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', ---, ---)
5      while lancer == 0
6          lancer = ---
7          x = ---
8      end
9  else
10     if piece == 1 then
11         x = ---
12     end
13 end
14 disp(x)
```

- **1 pt :**
```
1  piece = grand(1, 1, 'uin', 0, 2)
```
- **1 pt :**
```
4      lancer == grand(1, 1, 'uin', 0, 1)
```
- **1 pt :**
```
6          lancer = grand(1, 1, 'uin', 0, 1)
```
- **1 pt :**
```
7          x = x + 1
```
- **1 pt :**
```
11         x = 0
```

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

- **1 pt : toute explication raisonnable**

Exercice 2 /24

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle : $f^2 = f \circ f$).

- **1 pt : si f est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale**
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^2$ **est diagonale donc f^2 est diagonalisable**

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Déterminer la matrice A^2 puis établir : $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

- **1 pt :** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : le polynôme** $P(X) = X^4 - 1$ **est un polynôme annulateur de** A
- **1 pt : les valeurs propres possibles de** A **sont** 1 **et** -1

b) Donner une base (u) de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$.

- **1 pt : écriture système**
- **1 pt : résolution système :** $x = y = z$
- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$
- **1 pt :** $((1, 1, 1))$ **est une base de** $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{id})$.

- **1 pt : écriture système**
- **1 pt : résolution système :** $x = y = z = 0$
- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}(A) = \{1\}$
- **1 pt :** $\dim(E_1(g)) = 1 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

3. a) Résoudre l'équation $A^2\, X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id})$.

- **1 pt : résolution du système :** $y = x + z$
- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0), (0, 1, 1)\right)$
- **1 pt :** $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ **est une base de** $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id})$

b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- **2 pts :** (u, v, w) **est libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(((u, v, w))) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

- **1 pt :** $g^2(u) = u$ **donc** $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(g^2(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $g^2(v) = -v$ **donc** $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(g^2(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $g^2(w) = -w$ **donc** $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(g^2(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- **0 pt :** $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(g^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** g^2 **est diagonalisable. La réciproque de la question 1 est donc fausse.**

Exercice 3 /35

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$. On a donc, en particulier : $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2.

- **1 pt : $t \mapsto (1-t^2)^n$ continue sur le segment $[0,1]$, donc u_n bien défini**
- **1 pt : $u_1 = \frac{2}{3}$**
- **1 pt : $u_2 = \frac{8}{15}$**

2. *a)* Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

- **1 pt : $u_{n+1} - u_n = -\displaystyle\int_0^1 t^2\,(1-t^2)^n \, dt$**
- **1 pt : $t^2\,(1-t^2)^n \geqslant 0$ bien expliqué**
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$**

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$: $u_n \geqslant 0$**
- **1 pt : (u_n) est décroissante et minorée par 0**

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

a) On rappelle : $\forall \sigma > 0, \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \, dt = 1$.

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$, puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$.

- **1 pt : choix de $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ pour que $\dfrac{1}{2\,\sigma^2} = n$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$**
- **1 pt : par parité et comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2} \, dt$ est convergente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$**

b) Montrer que, pour tout réel t, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$.

- **1 pt : la fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : le graphe de la fonction exponentielle est au dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 + x$**
- **1 pt : $-t^2 \in \mathbb{R}$, on obtient donc l'inégalité souhaitée**

c) En déduire : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$. Puis donner la limite de la suite (u_n).

- **1 pt : $0 \leqslant (1-t^2)^n \leqslant \mathrm{e}^{-n\,t^2}$**
- **1 pt : les intégrales en présence sont convergentes**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$**
- **1 pt : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2} \, dt$**
- **1 pt : par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$**

4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, dt$ puis montrer : $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}$
- **1 pt :** $1 \;\geqslant\; (1-t^2)^n \;\geqslant\; (1-t)^n$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant 1)$
- **1 pt : la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ **est une série de Riemann d'exposant** 1 **donc diverge**
- **1 pt : Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **est divergente**

5. *a)* Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} \;=\; (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

- **1 pt : Cette IPP est valide car les fonctions** u **et** v **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0,1]$
- **2 pts :** $u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$

b) En déduire l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

c) On admet l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, \mathrm{e}^{-n}$. En écrivant $u_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)\,(2n)!}$, montrer :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

- **1 pt :** $4^n\,(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi\, 4^n\, n^{2n+1}\, \mathbf{e}^{-2n}$
- **1 pt :** $(2n+1)\,(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} 4\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}\; 4^n\, n^{2n+1}\, \mathbf{e}^{-2n}$

6. Informatique.
On admet que, si `t` est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 n = input('entrez une valeur pour n : ')
2 x = 1:n
3 m = 2 * n + 1
4 y = 1:m
5 v = ..........
6 w = ..........
7 u = .......... * v^2 / w
8 disp(u)
```

- **1 pt :** `5 v = prod(x)`
- **1 pt :** `6 w = prod(y)`
- **1 pt :** `7 u = (4^n) * v^2 / w`

Problème /57

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\ dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. *a)* Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

- **1 pt : La fonction $g : t \mapsto \ln\left(1+t^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt :** $g(t) \geqslant 0$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$)**
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x < 0$)**

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

- **1 pt : g est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt :** $f(x) \ = G(x) - G(0)$
- **1 pt : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ln\left(1+x^2\right)$**

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

- **1 pt :** $f'(x) = g(x) = \ln\left(1+x^2\right) \geqslant 0$
- **1 pt : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**

2. *a)* Montrer que f est impaire.

- **1 pt : On effectue le changement de variable $u = -t$, qui est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x**
- **1 pt :** $f(-x) = -f(x)$

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- **1 pt : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt :** $f''(x) \ = \ \dfrac{1}{1+x^2} \times 2x$
- **1 pt : La fonction f est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$. La fonction f change de concavité en 0, seul point d'inflexion de la courbe représentative de f**

3. *a)* Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

- **1 pt :** $\dfrac{t^2}{1+t^2} \ = \ 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) \ = \ x \ \left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt$$

- **1 pt : Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : Calcul bien présenté et détaillé**

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est une intégrale convergente.

- **1 pt : La fonction** $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ **est continue sur** $[0, +\infty[$ **donc** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ **est impropre en** $+\infty$
- **1 pt :** $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$
- **1 pt :** $\forall t \in [1, +\infty[,\ \dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$
- **1 pt : L'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ **est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en** $+\infty$**, d'exposant** 2 $(2 > 1)$
- **1 pt : par critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ **est convergente et donc** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ **l'est aussi**

b) En déduire que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x \ln(1+x^2)$.

- **1 pt : division par** $x \ \ln(1+x^2) \neq 0$
- **1 pt : l'intégrale impropre** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ **est convergente donc** $\displaystyle\int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ **admet une limite finie lorsque** x **tend vers** $+\infty$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$ **et** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x\ln(1+x^2)} = 0$

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2x \ \ln(x)$$

- **1 pt :** $1 + x^2 \ = \ x^2 \ \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
- **1 pt :** $1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{2 \ \ln(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

- **1 pt : changement de variable** $X = -x$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{X \to -\infty} \frac{f(X)}{2X \ \ln(-X)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{2x \ \ln(x)} = 1$ **donc** $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} 2x \ \ln(-x)$

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $f' = g$ **et** g **est de classe** $\mathcal{C}^2$

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

- **1 pt :** $f^{(3)}(x) = \dfrac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$ **(**$f'(x) = \ln\left(1+x^2\right)$**,** $f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ **déjà démontré dans les questions précédentes)**
- **1 pt :** $f(0) = \displaystyle\int_0^0 \ln\left(1+t^2\right)\, dt = 0$**,** $f'(0) = \ln(1) = 0$**,** $f''(0) = 0$**,** $f^{(3)}(0) = \dfrac{2}{1} = 2$

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$).

- **1 pt :** $f(x) \; = \; 2\,\dfrac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = \dfrac{1}{3}\, x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
V = log(1 + U .^2)
f = -----
disp(f)
```

- **1 pt :**

```
f = mean(V)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n\, dt$.

7. a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

- **1 pt : Si** $n = 0$ **alors :** $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt \; = \; \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 dt \; = \; \int_0^1 1\, dt \; = \; 1$

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

- **1 pt :** $u_1 \; = \; \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\, dt \; = \; f(1)$

8. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- **1 pt :** $\ln(1+t^2) \leqslant 1$
- **1 pt :** $\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} \; \leqslant \; \left(\ln(1+t^2)\right)^n$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant 1)$ **:** $u_{n+1} \leqslant u_n$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

- **1 pt :** $0 \leqslant \; \left(\ln(1+t^2)\right)^n$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant 1)$ **:** $0 \leqslant u_n$
- **1 pt : la suite** (u_n) **est décroissante et minorée donc elle converge vers un réel** $\ell \geqslant 0$

9. a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

- **1 pt :** $0 \ \leqslant \ \big(\ln(1+t^2)\big)^n \ \leqslant \ \big(\ln(2)\big)^n$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant 1)$ **:** $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

- **1 pt : la série** $\sum \ \big(\ln(2)\big)^n$ **est convergente en tant que série géométrique de raison** $\ln(2) \in [0,1[$
- **1 pt : par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série** $\sum \ u_n$ **est convergente**
- **1 pt : en particulier,** (u_n) **est convergente de limite nulle convergente**

10. a) Montrer que :

$$0 \ \leqslant \ \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \ \leqslant \ \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

- **2 pts :** $0 \ \leqslant \ \dfrac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \ \leqslant \ \dfrac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)}$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant 1)$

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1-\ln(2)} = 0$ **et théorème d'encadrement**

c) Justifier que, pour tout entier naturel n, non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1-\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

- **1 pt : linéarité de l'intégration**
- **1 pt : somme géométrique de raison** $q = \ln(1+t^2)$ **avec** $q \neq 1$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \ = \ \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt - \int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt = 0$ **cf question 10.b)**

e) Modifier le script présenté à la question ***6)*** pour donner un valeur approchée de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

- **2 pts :**

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
W = 1 / (1 - log(1 + U .^2) )
res = mean(W)
disp(res)
```