DS6 (version A)

Exercice 1

On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

5. ***a)*** Soit $w = (1, 0, 0)$. Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que f est convexe sur $]0,+\infty[$.

5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.

b) Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.

c) Préciser la nature de la branche infinie de Γ.

d) Tracer l'allure de Γ. On admet : $0,36 \leqslant \mathrm{e}^{-1} < 0,37$.

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

7. Montrer que (e,e) est un point critique de F.

8. Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.
Est-ce que F admet, un extremum local en (e,e) ?

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$, où σ est strictement positif.
On rappelle que la fonction $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\,\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y, définie par :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 2\,F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Y) = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.
On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_i$.

a) Montrer que S_n est un estimateur de σ, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ, que l'on notera T_n, construit de façon affine à partir de S_n.

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ.

4. On rappelle qu'en **Scilab**, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i, j, 'nor', m, s)` simule dans un tableau à `i` lignes et `j` colonnes, `i` $\times$ `j` variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance `m` et de variance `s`^{2}.
Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
X = ------ // simulations de X1, ..., Xn
Y = ------ // simulations de Y1, ..., Yn
S = ------
T = ------
```

Problème

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$$

3. ***a)*** soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$?

b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. ***a)*** Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

5. ***a)*** Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2.

6. ***a)*** Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\, dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\, dx$$

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\, \mathrm{e}^{-a}$.

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N.
On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$.

11. Soit $x \in \,]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

$$[N = n] \cap [Z \leqslant x] = \begin{cases} [a < X_1 \leqslant x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x])$.

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \mathrm{e}^{a-x}$.

12. ***a)*** Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.