DS6 (version A) /174

Exercice 1 /33

On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

- **1 pt :** (I, J, K) **libre**
- **1 pt :** (I, J, K) **génératrice**
- **1 pt :** $\dim(E) = 3$

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

- **1 pt :** $J^2 = K$ **et** $JK = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
- **1 pt :** $KJ = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ **et** $K^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n : $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.

- **1 pt :** I **et** J **commutent**
- **1 pt : binôme de Newton écrit correctement**
- **1 pt :** $\forall k \geqslant 3,\ J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $J^2 = K$ **et conclusion**
- **1 pt : cas** $n = 0$
- **1 pt : cas** $n = 1$

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

- **1 pt :** L **est triangulaire à cœfficients diagonaux tous non nuls, donc inversible**
- **3 pts :** $L^{-n} = I + (-n)J + \dfrac{(-n)(-n-1)}{2}K$

c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

- **1 pt :** $J = L - I$
- **1 pt :** $K = L^2 - 2L + I$
- **2 pts :** $L^n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}I - n(n-2)L + \dfrac{n(n-1)}{2}L^2$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

- **3 pts :**
  - × **1 pt : présentation correcte pour** $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3)$ **et opérations effectuées sur la** $1^{\text{ère}}$ **colonne**
  - × **1 pt : opérations sur la** $2^{\text{ème}}$ **colonne**
  - × **1 pt : conclusion** $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{1\}$
- **2 pts : par l'absurde,** f **n'est pas diagonalisable**

5. ***a)*** Soit $w = (1, 0, 0)$. Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- **1 pt :** $v = (-1, 1, 2)$
- **1 pt :** $u = (1, 0, -1)$
- **1 pt :** (u, v, w) **libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

- **3 pts :** $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f(v)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En cas de confusion sur les objets, on enlève jusqu'à 2 points

c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

- **1 pt :** f **automorphisme**
- **1 pt :** $f^n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} e - n(n-2) f + \dfrac{n(n-1)}{2} f^2$

Exercice 2 /27

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

- **1 pt : continuité sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : continuité en** 0

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

- **1 pt :** f **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]0, +\infty[$ **par les mêmes arguments qu'en** ***1.***
- **1 pt :** $\forall t \in]0, +\infty[$, $f'(t) = \ln(t) + 1$

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

- 1 pt : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$

- 1 pt : signe de $f'(t)$ + variations de f

- 1 pt : $f(\mathbf{e}^{-1}) = -\mathbf{e}^{-1}$

4. Montrer que f est convexe sur $]0,+\infty[$.

- 2 pts (dont 1 pour caractère $\mathcal{C}^2$ si calcul de f'')

5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.

- 2 pts

b) Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.

- 1 pt : écriture du système

- 1 pt : résolution ($(0,0)$ et $(1,0)$)

c) Tracer l'allure de Γ. On admet : $0,36 \leqslant \mathrm{e}^{-1} < 0,37$.

- 4 pts : 1 pour tangente verticale tracée, 1 pt pour tangente horizontale tracée, 1 pr pour notion de tangente respectée, 1 pt pour aspect convexe)

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles /11

On considère l'application $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout $(x,y) \in\ ]0,+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

- 1 pt : rappeler le caractère $\mathcal{C}^2$

- 1 pt : $\partial_1(F) : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{xy} - \dfrac{\ln(y)}{x^2}$

- 1 pt : $\partial_2(F) : (x,y) \mapsto -\dfrac{\ln(x)}{y^2} + \dfrac{1}{xy}$

7. Montrer que (e,e) est un point critique de F.

- 1 pt

8. Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.
Est-ce que F admet, un extremum local en (e,e) ?

- 1 pt : $\partial^2_{1,1}(F) : (x,y) \mapsto -\dfrac{1}{yx^2} + 2\dfrac{\ln(y)}{x^3}$

- 1 pt : $\partial^2_{1,2}(F) : (x,y) \mapsto -\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{yx^2}$

- 1 pt : $\partial^2_{1,2}(F) = \partial^2_{2,1}(F)$ par le théorème de Schwarz car la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[$

- 1 pt : $\partial^2_{2,2}(F) : (x,y) \mapsto 2\dfrac{\ln(x)}{y^3} - \dfrac{1}{xy^2}$

- 1 pt : $\nabla^2(F)(\mathbf{e},\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-3} & -2\mathbf{e}^{-3} \\ -2\mathbf{e}^{-3} & \mathbf{e}^{-3} \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\mathrm{Sp}(\nabla^2(F)(\mathbf{e},\mathbf{e}) = \{-\mathbf{e}^{-3}, 3\mathbf{e}^{-3}\}$

- 1 pt : conclure que (e,e) n'est pas un extremum local

Exercice 3 /30

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, où σ est strictement positif.
On rappelle que la fonction $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

- **1 pt : les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$ sont convergentes**
- **1 pt : changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$**
- **1 pt : fin du calcul (relation de Chasles) et argument de parité de f_X**

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y, définie par :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 2\,F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **1 pt : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$**
- **1 pt : cas $x \in\,]-\infty, 0[$**
- **2 pts : cas $x \in [0, +\infty[$**

b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

- **2 pts : F_Y continue sur $\mathbb{R}$**
  - × **1 pt : continuité sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$**
  - × **1 pt : continuité en 0**
- **1 pt : F_Y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0**
- **2 pts : $f_Y : \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$**

c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Y) = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

- **1 pt : La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_Y(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f_Y(t)\, dt$.**
- **1 pt : f_Y est nulle en dehors de $[0, +\infty[$**
- **1 pt : $t \mapsto t\, f_Y(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$**
- **2 pts : calcul**

3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.
On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_i$.

a) Démontrer que S_n admet une espérance et la calculer.

- **1 pt : La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. Elle admet donc un biais.**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(S_n) = \sigma \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$
  - × **1 pt : linéarité de l'espérance**
  - × **1 pt : reste du calcul**

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{\pi - 2}{\pi}\, \sigma^2$
- **1 pt : La v.a.r. S_n admet une variance en tant que combinaison de v.a.r. qui en admettent une**
- **2 pts :** $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{\pi - 2}{n\,\pi}\, \sigma^2$
  - × **1 pt : indépendance de X_1, …, X_n**
  - × **1 pt : reste du calcul**

4. On rappelle qu'en **Scilab**, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i, j, 'nor', m, s)` simule dans un tableau à `i` lignes et `j` colonnes, `i` × `j` variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance `m` et de variance `s`^{2}.
Compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
sigma = input('entrez la valeur de sigma : ')
X = ------ // simulations de X1, ..., Xn
Y = ------ // simulations de Y1, ..., Yn
S = ------
T = ------
```

- **4 pts : 1 pt par ligne**

```
X = grand(1, n, 'nor', 0, sigma)
Y = abs(X)
S = (1/n) * sum(Y)
T = sqrt(%pi / 2) * S
```

Problème /85

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

- **4 pts (1 pour la densité, 1 pour la fonction de répartition, 1 pour l'espérance et la variance)**

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$$

- **2 pts : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ convergente**
  - × **1 pt : f_X densité**
  - × **1 pt : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$**
- **2 pts : $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ convergente**
  - × **1 pt : X admet une espérance**
  - × **1 pt : $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}$**

3. ***a)*** soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$?

- **1 pt : $V(\Omega) = [0, +\infty[$**
- **1 pt : si $x < 0$, alors $F_V(x) = 0$**
- **3 pts : cas $x \geqslant 0$**
  - × **1 pt : stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$**
  - × **1 pt : $1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \in [0, 1[$**
  - × **1 pt : la fdr caractérise la loi**

b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

- **3 pts : 1 pour la structure de fonction, 1 pour `rand()`, 1 pour `v`**

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. *a)* Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

- **1 pt :** $[T_n \leqslant x] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$
- **1 pt :** X_1, **...,** X_n **indépendantes**
- **1 pt :** X_1, **...,** X_n **ont même loi**
- **1 pt : résultat** $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = (1 - \mathrm{e}^{-x})^n$

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

- **1 pt :** $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \leqslant 0$, $F_{T_n}(x) = 0$
- **0 pt : cas** $x > 0$ **d'après** ***4.a)***
- **2 pts : continuité de** F_{T_n} **sur** $\mathbb{R}$ **(1 pour la composition, 1 pour le reste)**
- **1 pt :** F_{T_n} **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** 0
- **3 pts : montrer que** $f_{T_n} = f_n$ **(1 pour le cas** $x < 0$**, 1 pour le cas** $x > 0$**, 1 pour le choix en** 0**)**
  -1 si la dérivation ne se fait pas sur des intervalles ouverts

5. *a)* Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

- **1 pt : convergence absolue**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x\, f_n(x)\, dx$ **car** f_n **est nulle en dehors de** $[0, +\infty[$
- **1 pt : continuité par morceaux de** $x \mapsto x\, f_n(x)$ **sur** $[0, +\infty[$
- **1 pt :** $x\, f_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
- **1 pt : positivité de** f_n **et** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
- **1 pt : convergence de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ **(évidemment, 0 si** $\displaystyle\int_0^{+\infty}$**)**
- **1 pt : D'après le critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\, f_n(x)\, dx$ **est convergente.**
  De plus, la fonction $x \mapsto x\, f_n(x)$ **est continue par morceaux sur le segment** $[0, 1]$**.**
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\, f_n(x)\, dx$ **est donc bien définie.**

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(T_1) = 1$
- **2 pts :** $\mathbb{E}(T_2) = \dfrac{3}{2}$
  -1 si la convergence des intégrales impropres en $+\infty$ **n'est pas évoquée**

6. *a)* Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

- **1 pt :** f_n **dérivable sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $f'_n(x) = n\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x})^{n-2}(n\mathrm{e}^{-x} - 1)$
- **1 pt : montrer que** $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$

b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$$

- **1 pt : se placer sur un segment**
- **1 pt : Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$.**
- **1 pt : convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$**
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A\, f_{n+1}(A) = 0$**

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

- **1 pt : existence de $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{E}(T_{n+1})$**
- **3 pts : $\mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1}{n+1}$**
  - × **1 pt : f_n nulle en dehors de $[0, +\infty[$**
  - × **1 pour l'utilisation de *6.b)***
  - × **1 pour f_{n+1} est une densité)**
- **1 pt : télescopage**
- **1 pt : $\mathbb{E}(T_1) = 1$**

Partie III : Loi du premier dépassement /35

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

- **1 pt : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\Big) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\Big)$ par théorème de la limite monotone**
- **2 pts : $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\Big) = (1 - \mathbf{e}^{-a})^n$**
  - × **1 pt : $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes**
  - × **1 pt : $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi $\mathcal{E}(1)$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \mathbf{e}^{-a})^n = 0$**
- **1 pt : conclusion $\mathbb{P}([N = 0]) = 0$**

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\, \mathrm{e}^{-a}$.

- **1 pt : $[N = n] = \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a]\Big) \cap [X_n > a]$**
- **2 pts : $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathbf{e}^{-a})^{n-1} \mathbf{e}^{-a}$**
  - × **1 pt : indépendance des X_k**
  - × **1 pt : les X_k suivent la même loi $\mathcal{E}(1)$**

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N.

- 1 pt : reconnaître $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\mathrm{e}^{-a}\right)$

- 1 pt : $\mathbb{E}(N) = \mathrm{e}^a$

- 1 pt : $\mathbb{V}(N) = \mathrm{e}^a(\mathrm{e}^a - 1)$

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$.

- 1 pt : formule des proba totales sur le SCE $([N=0], [N \neq 0])$

- 1 pt : utilisation de la définition de Z

- 1 pt : $[X_N \leqslant a] = \varnothing$

- 1 pt : conclusion

11. Soit $x \in \,]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

$$[N = n] \cap [Z \leqslant x] = \begin{cases} [a < X_1 \leqslant x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x])$.

- 1 pt : cas $n = 1$: $[N = 1] \cap [Z \leqslant x] = [a < X_1 \leqslant x]$

- 2 pts : cas $n = 2$: $[N = n] \cap [Z \leqslant x] = [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x]$ (dont 1 pour $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a] = [T_{n-1} \leqslant a]$)

- 1 pt : cas $n = 1$: $\mathbb{P}([N = 1] \cap [Z \leqslant x]) = \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x})$

- 3 pts : cas $n = 2$: $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x]) = \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x})(1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}$ (1 pour T_{n-1} et X_n sont indépendantes grâce au lemme des coalitions, 1 pour utilisation de *4.a)*, 1 pour X_n suit la même loi que X_1)

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \mathrm{e}^{a-x}$.

- 1 pt : formule des proba totales sur le SCE $([N = n])_{n \geqslant 1}$ (0 si le SCE est mal écrit)

- 1 pt : utilisation *11.a)*

- 1 pt : reste du calcul

12. ***a)*** Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

- 2 pts : cas $x < 0$ (1 pour $[Z - a \leqslant x] \subset [Z \leqslant a]$, 1 pour utilisation *10.*)

- 1 pt : cas $x \geqslant 0$

- 1 pt : reconnaître $Z - a \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$ existent

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z) = 1 + a$

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z) = 1$