
DS6 (version B)

Exercice

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice tM de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M .

On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.

On note \mathcal{B}_n la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et \mathcal{B}_p la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), on admet que ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes x_1, x_2, \dots, x_n dans la base \mathcal{B}_n .
On pose : $A = X{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.

a) Exprimer A et α en fonction de x_1, x_2, \dots, x_n . Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base \mathcal{B}_n .

Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$; donner une base de $\text{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\text{Ker}(f)$.

c) Calculer la matrice AX .

Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leq p \leq n$.

Soit (V_1, V_2, \dots, V_p) une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, V_1, V_2, \dots, V_p .

Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases \mathcal{B}_p et \mathcal{B}_n .

a) Justifier que le rang de V est égal à p . Déterminer $\text{Ker}(g)$.

b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

c) En déduire que la matrice tVV est inversible.

Problème

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité U_1, \dots, U_p sont indépendantes si pour tout p -uplet (u_1, \dots, u_p) de réels, les événements $[U_1 \leq u_1], \dots, [U_p \leq u_p]$ sont indépendants.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.

Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

1.
 - a) Montrer que la fonction f_λ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .
 - b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur \mathbb{R}_+^* et préciser les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x)$.
 - c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur \mathbb{R}_+^* .
 - d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
2.
 - a) Vérifier que la fonction $x \mapsto -e^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur \mathbb{R}_+^* .
 - b) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx$ et calculer sa valeur.
 - c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur \mathbb{R}_+^* .
3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.
 - a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.
 - b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
 - c) Établir pour tout r de \mathbb{N}^* , l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.
 - d) Montrer que pour tout r de \mathbb{N}^* , on a : $\mathbb{E}(Y^{r+1}) = (r+1)\mathbb{E}(Y^r)$.
 - e) En déduire pour tout r de \mathbb{N}^* , $\mathbb{E}(Y^r)$ et $\mathbb{E}(X^r)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Partie II : Estimation ponctuelle de λ .

Pour n entier de \mathbb{N}^* , on note (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question 3. On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum_{j=1}^k Y_j$ et g_k une densité de S_k .

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n sont indépendantes et que pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes. On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y) f_Z(x-y) dy$$

4. a) En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

c) On admet que pour tout n de \mathbb{N}^* , $\frac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité.

Pour quelles valeurs de n , l'espérance $\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?
 Calculer alors leurs valeurs respectives.

5. On note (x_1, \dots, x_n) un n -uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n -échantillon (X_1, \dots, X_n) . On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par :

$$H(\lambda) = \ln \left(\prod_{k=1}^n f_\lambda(x_k) \right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

6. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

b) Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{E}(a_n \lambda_n^*) = \lambda$. On note alors : $\hat{\lambda}_n = a_n \lambda_n^*$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(\hat{\lambda}_n)$.

Partie III : Loi à 2 paramètres.

7. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur \mathbb{R} .
 Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$.
- b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W . Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.
- c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
- d) Écrire une fonction **Scilab** permettant de simuler W .

8. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur \mathbb{R}_- , continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* . On note F_K la fonction de répartition de K .

On pose pour tout x réel $R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et $r(x) = R'(x)$, où R' est la dérivée de R .

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.

Établir les propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées.

Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclusion ?

Dans les questions 9. et 10., l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note w_1, \dots, w_n des réels strictement positifs et non tous égaux.

9. Soit φ la fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^n (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

a) Soit y_1, \dots, y_n des réels non tous nuls et z_1, \dots, z_n des réels quelconques.

En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur \mathbb{R} par $Q(t) = \sum_{k=1}^n (z_k - t y_k)^2$,

établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^n y_k z_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n z_k^2 \right)$$

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant $w_{k_0} = \max_{1 \leq k \leq n} (w_k)$.

Montrer que $1 \leq n_0 \leq n - 1$.

d) Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0} , lorsque x tend vers $+\infty$.

e) Calculer en fonction de w_{k_0} , la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 (on distinguera les deux cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$).

f) En déduire que sur \mathbb{R}_+^* l'équation $\varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k)$ admet une unique solution.

10. On note (W_1, \dots, W_n) un n -échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question **7**. dont une réalisation est le n -uplet (w_1, \dots, w_n) .

On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.

Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans \mathbb{R} définie par $G(\lambda, \alpha) = \ln \left(\prod_{k=1}^n f_{(\lambda, \alpha)}(w_k) \right)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$.