DS6 (version B) /177

Exercice /27

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), *on admet* que ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$.
On pose : $A = X\,{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.

a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

- **1 pt :** $A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$
- **1 pt : La matrice A est une matrice symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable**

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}_n$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$; donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

- **3 pts :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(X)$
  - $\times$ **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$
  - $\times$ **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(x_1 \cdot X, x_2 \cdot X, \dots, x_n \cdot X)$
  - $\times$ **1 pt : X est un vecteur non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que : $x_i \neq 0$.**
- **1 pt :** (X) **base de** $\mathrm{Im}(f)$
- **1 pt :** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1$
- **1 pt : par théorème du rang** $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = n - 1$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(f) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + \cdots + x_n\,y_n = 0\}$
  - $\times$ **1 pt : écriture du système**
  - $\times$ **1 pt : comme X est un vecteur non nul, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que : $x_{i_0} \neq 0$. On effectue alors l'opération suivante : $L_{i_0} \leftarrow \dfrac{1}{x_{i_0}}\,L_{i_0}$**

c) Calculer la matrice AX.
Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

- **1 pt :** $A\,X = \alpha \cdot X$
- **1 pt :** $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ **donc** $E_\alpha \supset \mathrm{Vect}\,(X)$
- **0 pt :** $\alpha \neq 0$
- **1 pt :** $\dim(E_0) + \dim(E_\alpha) \geqslant n$

- **1 pt : f est diagonalisable, donc :** $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(f) = \{0, \alpha\}$
- **1 pt :** $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$ **et** $E_\alpha(f) = \mathrm{Vect}\,(X)$

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leqslant p \leqslant n$.
Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note V la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
Soit g l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$.

a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.

- **1 pt :** $\mathcal{G} = (V_1, \ldots, V_p)$ **base de** $G = \mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_p)$
- **1 pt :** $\mathrm{rg}(V) = \dim(\mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_p)) = \dim(G) = \mathrm{Card}(\mathcal{G}) = p$
- **1 pt : par théorème du rang** $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) = 0$ **donc** $\mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$

b) Soit Y une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

- **1 pt :** $(\Rightarrow)$
- **3 pts :** $(\Leftarrow)$
  - × **1 pt :** ${}^tZZ = {}^t(VY)VY = {}^tY{}^tVVY = 0$
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2 = {}^tZZ = 0$
  - × **1 pt :** $\forall i \in [\![1, n]\!],\ z_i = 0$ **donc** $Z = VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

- **1 pt :** $g(Y) = VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad h(Y) = {}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$ **(où h l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p}(h) = {}^tVV$**)** **donc** $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(h)$
- **1 pt : d'après la question *2.a)*,** $\mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$
- **1 pt : L'application h est un endomorphisme injectif en dimension finie. Donc h est bijectif. Ainsi ${}^tVV$ est inversible.**

Problème /150

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \ldots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \ldots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \ldots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.
Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\[2ex] 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}.$$

1. *a)* Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **2 pts**

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to +\infty} f_\lambda(x) = 0$
- **1 pt :** $f_\lambda' : x \mapsto -\dfrac{\lambda}{4x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \lambda\right) \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ **et tableau de variation**

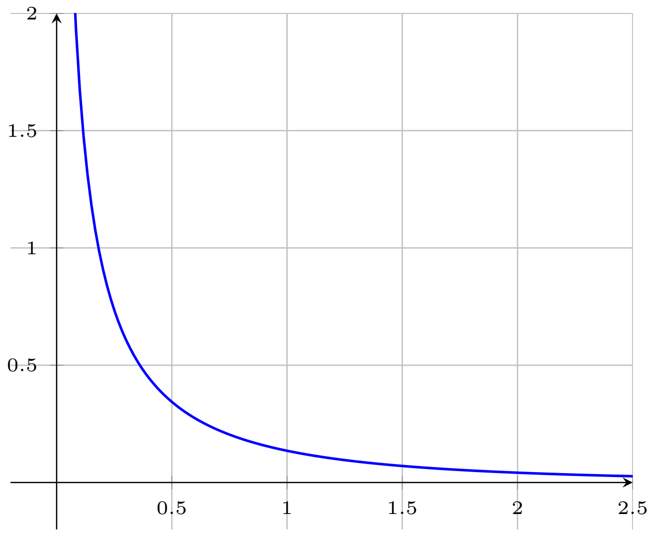
x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f_\lambda'(x)$	$-$
Variations de f_λ	$+\infty$ $\searrow$ 0

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt :** $f_\lambda'' : x \mapsto \left(\dfrac{3\lambda}{8\ x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda^2}{8x^2} + \dfrac{\lambda^2}{4x^2} + \dfrac{\lambda^3}{8\ x\sqrt{x}}\right) \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$
- **1 pt : conclusion**

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

- **3 pts : 1 pt pour l'aspect convexité, 1 pt pour l'aspect décroissance, 1 pt pour propreté**
- **1 pt : bonus pour tentative de tangente**
  (difficile de faire une tangente ici)



2. *a)* Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt :** F **est dérivable sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $F' = f_\lambda$

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ et calculer sa valeur.

- **1 pt : La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Elle est donc continue sur $]0,+\infty[$.**
- **1 pt : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ converge et vaut $e^{-\lambda}$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\ dx$ converge et vaut $1-e^{-\lambda}$**

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt : La fonction f_λ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) \geqslant 0$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ est convergente et vaut 1**

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

- **1 pt : si $x \leqslant 0$, $F_\lambda(x) = 0$**
- **2 pts : si $x > 0$, $F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$**
  - × **1 pt : f_λ est nulle en dehors de $]0,+\infty[$**
  - × **1 pt : utilisation de la question *2.a)***

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

- **1 pt : $Y(\Omega) \subset\ ]0,+\infty[$ (égalité acceptée)**
- **1 pt : cas $x \leqslant 0$**
- **3 pts : cas $x > 0$**
  - × **1 pt : $x \mapsto x^2$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$**
  - × **1 pt : $\dfrac{x^2}{\lambda^2} > 0$**
  - × **1 pt : $x > 0$**
- **1 pt : conclusion**

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

- **1 pt : La v.a.r. Y^r admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_Y(t)\ dt$.**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t^r f_Y(t)\ dt$**
- **1 pt : $t \mapsto t^r f_Y(t)$ continue par morceaux sur $[0,+\infty[$**
- **1 pt : $t^r f_Y(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$**
- **1 pt : $\forall t \in [1,+\infty[,\ t^r e^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$**
- **1 pt : convergence de l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$**
- **1 pt : pour la conclusion (critère de négligeabilité sur $[1,+\infty[$ et existence de $\displaystyle\int_0^1 \dots$)**

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\,\mathbb{E}\left(Y^r\right)$.

- **1 pt : IPP posée correctement (avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, B]$)**
- **1 pt : pour le calcul**
- **1 pt : pour la conclusion**

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(Y^r\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^r\right)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

- **1 pt : par récurrence immédiate : $\forall r \geqslant 2$, $\mathbb{E}(Y^r) = r!\ \mathbb{E}(Y)$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(Y) = 1$**
- **1 pt : $X^r = \dfrac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2}{\lambda^2}$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{20}{\lambda^4}$**

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question ***3***.

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes. On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\, f_Z(x-y)\ dy$$

4. a) En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \left\{\begin{array}{ccc} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x \leqslant 0 \end{array}\right.$.

- **1 pt : $S_2(\Omega) \subset \left]0, +\infty\right[$ (égalité acceptée)**
- **1 pt : montrer que l'on est dans le cadre d'application du théorème fourni (Y_1 et Y_2 v.a.r. à densité indépendantes à densités bornées)**
- **1 pt : cas $x \leqslant 0$**
- **2 pts : cas $x > 0$**
  - × **1 pt : $f(y)\, f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ y \in [0, x]$**
  - × **1 pt : reste du calcul**

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x \leqslant 0 \end{array}\right.$$

- **1 pt : initialisation**

- **4 pts : hérédité**
  - × **1 pt : cadre d'application du théorème**
  - × **1 pt : cas $x \leqslant 0$**
  - × **2 pts : cas $x > 0$**
    - **- 1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y) f(x-y)\ dy = \int_0^x g_n(y) f(x-y)\ dy$
    - **- 1 pt : reste du calcul**

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité.
Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?
Calculer alors leurs valeurs respectives.

- **1 pt : D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\ dx$ converge absolument.**
- **1 pt : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{x}\ g_n(x) \geqslant 0$. Il suffit donc de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\ g_n(x)\ dx$ est convergente.**
- **1 pt : $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ g_n(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$**
- **2 pts : critère d'équivalence pour la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\ g_n(x)\ dx$**
  - × **1 pt :** $\dfrac{1}{x}\ g_n(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-n}}$
  - × **1 pt : reste**

  conclusion : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\ g_n(x)\ dx$ *converge ssi* $n \geqslant 2$
- **2 pts : critère de négligeabilité pour la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ g_n(x)\ dx$**
  - × **1 pt :** $\dfrac{1}{x}\ g_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
  - × **1 pt : reste**
- **1 pt : existence de $\mathbb{V}(\dfrac{1}{S_n})$ (ssi $n \geqslant 3$)**
- **1 pt : calcul de $\mathbb{E}(\dfrac{1}{S_n}) = \dfrac{1}{n-1}$**
- **1 pt : calcul de $\mathbb{E}(\dfrac{1}{S_n^2}) = \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$**
- **1 pt : calcul de $\mathbb{V}(\dfrac{1}{S_n}) = \dfrac{1}{(n-2)(n-1)^2}$**

5. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

- **2 pts :** $H(\lambda) = n\ln(\lambda) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right) \lambda - n\ln(2) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k)$
- **1 pt :** H **dérivable sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** $H' : \lambda \mapsto \dfrac{n}{\lambda} - \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$
- **1 pt : tableau de variations** $\left(\lambda_0 = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}\right)$

λ	0		λ_0		$+\infty$
Signe de $H'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
Variations de H	$-\infty$	↗	$H(\lambda_0)$	↘	$-\infty$

6. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

- **1 pt**

b) Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{E}\left(a_n\lambda_n^*\right) = \lambda$. On note alors : $\hat{\lambda}_n = a_n\lambda_n^*$.

- **1 pt :** $\lambda_n^* = \dfrac{n\lambda}{S_n}$
- **1 pt : raisonnement par équivalence** $\mathbb{E}(an\ \lambda_n^*) = \lambda \ \Leftrightarrow\ a_n = \dfrac{n-1}{n}$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}\left(\hat{\lambda}_n\right)$.

- **1 pt :** $\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = \dfrac{\lambda^2}{n-1}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = 0$

Partie III : Loi à 2 paramètres.

7. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$.

- **1 pt :** $f_{(\lambda,\alpha)}$ **est continue sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** 0
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{(\lambda,\alpha)}(x) \geqslant 0$

- **3 pts :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ **convergente et vaut** 1
  - × **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ **est convergente et vaut** $\mathrm{e}^{-\lambda}$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\int_{0}^{1} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ **est convergente et vaut** $1-\mathrm{e}^{-\lambda}$

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

- **1 pt :** $W(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$
- **2 pts :** $F_{(\lambda,\alpha)} : x \mapsto \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} & \textbf{si } x>0 \\ 0 & \textbf{si } x \leqslant 0 \end{cases}$
  - × **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
  - × **1 pt : cas** $x > 0$

c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

- **1 pt :** $U(\Omega) \subset \,]0,1[$
- **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
- **1 pt : cas** $x \geqslant 1$
- **3 pts : cas** $x \in \,]0,1[$
  - × **1 pt :** W **à valeurs strictement positives**
  - × **1 pt :** $\ln$ **strictement croissante sur** $]0,+\infty[$ **et** $x \mapsto x^{\alpha}$ **aussi**
  - × **1 pt :** $\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$

d) Écrire une fonction **Scilab** permettant de simuler W.

- **3 pts :**

```
funcion w = simuWB(lambda, alpha)
    u = rand()
    w = (-(1 / lambda) * log(1-u)) ^(1 / alpha)
endfunction
```

- **1 pt : explications**

8. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K la fonction de répartition de K.
On pose pour tout x réel $R(x) = -\ln\left(1-F_K(x)\right)$ et $r(x) = R'(x)$, où R' est la dérivée de R.

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés *(i)* et *(ii)* suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

- **1 pt :** $R : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \leqslant 0 \\ \lambda x^2 & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$

- **1 pt : R dérivable en 0**
- **1 pt : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $r(x) = R'(x) = 2\,\lambda\,x$ et r strictement croissante sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : r continue sur $[0,+\infty[$**
- **1 pt : $Z(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$**
- **3 pts : $F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}x^2\right) & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$**
  - $\times$ **1 pt : cas $x \leqslant 0$**
  - $\times$ **2 pts : cas $x > 0$**

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** sont vérifiées. Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclusion ?

- **2 pts : $F_K : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}(r(x))^2\right) & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$**
  - $\times$ **0 pt : cas $x \leqslant 0$**
  - $\times$ **2 pts : cas $x > 0$**
- **1 pt : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $R(x) = \dfrac{1}{4\,\lambda}\ \big(r(x)\big)^2$**
- **1 pt : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $R(x) > 0$**
- **1 pt : $\dfrac{R'(x)}{2\sqrt{R(x)}} = \sqrt{\lambda}$**
- **1 pt : en intégrant on obtient : $\sqrt{R(x)} - \sqrt{R(A)} = \sqrt{\lambda}\ x - \sqrt{\lambda}\ A$**
- **1 pt : R continue en 0**
- **1 pt : $F_K : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$**
- **1 pt : conclusion**

Dans les questions ***9.*** et ***10.***, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

9. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\ \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

a) Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \ldots, z_n$ des réels quelconques.
En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - t\,y_k)^2$, établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\,z_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)$$

- **1 pt : expression $Q(t) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\Big)t^2 - 2\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k z_k\Big)t + \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^2$**
- **1 pt : $Q(t) \geqslant 0$ car somme de carrés**

- **1 pt :** $\Delta \leqslant 0$
- **1 pt : conclusion**

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt :** φ **dérivable sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** $\varphi' : x \mapsto \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \dfrac{1}{x^2}$
- **1 pt : on applique alors la question *8.a)* avec :** $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\left\{\begin{array}{l} y_k = \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}} \\ z_k = (w_k)^{\frac{x}{2}} \end{array}\right.$
- **1 pt :** y_i **non tous nuls**
- **1 pt : faire apparaître** $\varphi'(x)$ **et conclure**

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1,n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (w_k)$.
Montrer que $1 \leqslant n_0 \leqslant n-1$.

- **1 pt :** $n_0 \leqslant n-1$
- **1 pt :** $n_0 \geqslant 1$

d) Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt : découpage** $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x = n_0(w_{k_0})^x + \sum\limits_{k\notin I_0} (w_k)^x$
- **1 pt :** $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0(w_{k_0})^x} = 1 + \dfrac{1}{n_0} \sum\limits_{k\notin I_0} \left(\dfrac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0(w_{k_0})^x} = 1$

e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(on distinguera les deux cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$).

- **3 pts : cas** $w_{k_0} = 1$
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} n_0 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} n_0$
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x = \sum\limits_{k\notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x$
  - × **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x = 0$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$
- **2 pts : cas** $w_{k_0} \neq 1$
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} n_0 \ln(w_{k_0})(w_{k_0})^x$
  - × **1 pt :** $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\cancel{n_0}\cancel{(w_{k_0})^x} \ln(w_{k_0})}{\cancel{n_0}\cancel{(w_{k_0})^x}} = \ln(w_{k_0}) \underset{x\to+\infty\to\ln}{\longrightarrow} (w_0)$

f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ admet une unique solution.

- **2 pts : théorème de la bijection**
  - × **1 pt : hypothèses**
  - × **1 pt :** $\varphi(]0,+\infty[) =]-\infty, \ln(w_0)[$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty$
- **3 pts :** $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \in]-\infty, \ln(w_{k_0})[$
  - × **1 pt : pour tout** $k \notin I_0$ **:** $w_k < w_{k_0}$**, donc** $\ln(w_k) < \ln(w_{k_0})$
  - × **1 pt : pour tout** $k \in I_0$ **:** $w_k = w_{k_0}$
  - × **1 pt : conclusion (** $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \leqslant \ln(w_0)$ **)**

10. On note $(W_1, \dots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question ***7.*** dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, \dots, w_n)$.
On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.
Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

- **1 pt :** $G : (\lambda, \alpha) \mapsto n\ln(\lambda) + n\ln(\alpha) + (\alpha - 1)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)\Big) - \lambda\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha\Big)$
- **1 pt :** G **de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\partial_1(G)(\lambda, \alpha) = \dfrac{n}{\lambda} - \sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha$
- **1 pt :** $\partial_2(G)(\lambda, \alpha) = \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha$
- **2 pts :** (λ, α) **point critique de** $G \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - n \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} = 0 \end{cases}$
- **1 pt : faire apparaître** $\varphi(\alpha) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ **et** $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ **point critique de** G **où** $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}}$

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$.

- **0,5 pt :** $\partial_{1,1}^2(G)(\lambda, \alpha) = -\dfrac{n}{\lambda^2}$
- **0,5 pt :** $\partial_{1,2}^2(G)(\lambda, \alpha) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha$
- **0,5 pt :** $\partial_{2,1}^2(G)(\lambda, \alpha)$ **(théorème de Schwarz)**
- **0,5 pt :** $\partial_{2,2}^2(G)(\lambda, \alpha) = -\dfrac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2(w_k)^\alpha$

- **1 pt :** $\det(H - \mu\, I_2) = \mu^2 - \Big(\partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) + \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})\Big)\, \mu + \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})\ \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) - \Big(\partial^2_{1,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})\Big)^2 = Q(\mu)$
- **1 pt :** H **symétrique donc admet** 2 **valeurs propres** μ_1 **et** μ_2
- **1 pt :** $Q(X) = (X - \mu_1)(X - \mu_2)$
- **1 pt : obtention du système** $\left\{ \begin{array}{rcl} \mu_1 + \mu_2 & = & \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) + \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) \qquad (*) \\ \mu_1\, \mu_2 & = & \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})\ \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) - \Big(\partial^2_{1,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})\Big)^2 \qquad (**) \end{array} \right.$
- **2 pts :** $\mu_1\, \mu_2 > 0$
  - × **1 pt : application de *8.a)***
  - × **1 pt :** $\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}} \right)^2 > 0$
- **1 pt :** $\mu_1 < 0$ **et** $\mu_2 < 0$