DS6 (version B)

Exercice (HEC 2016)

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $(q \in \mathbb{N}^*)$, *on admet* que ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$.
On pose : $A = X\,{}^tX$ et $\alpha = {}^tX X$.

a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

Démonstration.

- D'une part :

$$A = X\,{}^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}}$$

- D'autre part :

$$\alpha = {}^tX\,X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\boxed{\alpha = \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est une matrice symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.}}$

□

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}_n$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$; donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé :

$$\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(Y) = AY$$

- On note $\mathscr{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$. Donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow\ i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\right)$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$f(e_i) = A \times e_i = \begin{pmatrix} x_1\, x_i \\ x_2\, x_i \\ \vdots \\ x_n\, x_i \end{pmatrix} = x_i \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i \cdot X$$

Donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(x_1 \cdot X, x_2 \cdot X, \ldots, x_n \cdot X\right)$$

Deux cas se présentent alors :
× si : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$, alors : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.
× si : $\exists i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$, alors : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(X)$.
Or X est un vecteur non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que : $x_i \neq 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(X).}$$

- Donc la famille (X) est :
× génératrice de $\mathrm{Im}(f)$;
× libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (X) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \ + \ \dim(\mathrm{Im}(f)) \ = \ \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \ = \ n$$

Or la famille (X) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \ = \ \mathrm{Card}((X)) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - 1.}$$

- Soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} Y \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(Y) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow\ AY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcccrcl} x_1^2\, y_1 & + & x_1 x_2\, y_2 & + & x_1 x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_1 x_n\, y_n & = & 0 \\ x_1 x_2\, y_1 & + & x_2^2\, y_2 & + & x_2 x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_2 x_n\, y_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_1 x_n\, y_1 & + & x_2 x_n\, y_2 & + & x_3 x_n\, y_3 & + & \cdots & + & x_n^2\, y_n & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On observe alors :

$$Y \in \text{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcccccccccl} x_1(x_1\, y_1 & + & x_2\, y_2 & + & x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_n\, y_n) & = & 0 \\ x_2(x_1\, y_1 & + & x_2\, y_2 & + & x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_n\, y_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_n(x_1\, y_1 & + & x_2\, y_2 & + & x_3\, y_3 & + & \cdots & + & x_n\, y_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

Or, comme X est un vecteur non nul, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que : $x_{i_0} \neq 0$.
On effectue alors l'opération suivante :

$$L_{i_0} \leftarrow \frac{1}{x_{i_0}} L_{i_0}$$

La ligne L_{i_0} devient donc :

$$x_1\, y_1 \ + \ x_2\, y_2 \ + \ x_3\, y_3 \ + \ \cdots \ + \ x_n\, y_n \ = \ 0$$

On effectue ensuite les opérations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - x_1\, L_{i_0} \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - x_2\, L_{i_0} \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - x_3\, L_{i_0} \\ & \vdots & \\ L_n & \leftarrow & L_n - x_n\, L_{i_0} \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$Y \in \text{Ker}(f) \ \Leftrightarrow \ \{x_1\, y_1 \ + \ x_2\, y_2 \ + \ x_3\, y_3 \ + \ \cdots \ + \ x_n\, y_n \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid x_1\, y_1 \ + \ x_2\, y_2 \ + \ x_3\, y_3 \ + \ \cdots \ + \ x_n\, y_n \ = \ 0\}}$$

□

c) Calculer la matrice AX.
Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

Démonstration.

- On calcule :

$$AX = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 + \cdots + x_1x_n^2 \\ x_2x_1^2 + x_2^3 + \cdots + x_2x_n^2 \\ \vdots \\ x_nx_1^2 + x_nx_2^2 + \cdots + x_n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot X$$

$$\boxed{AX = \alpha \cdot X}$$

- En résumé :
  × $f(X) = AX = \alpha \cdot X$,
  × $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

  Donc X est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\alpha \neq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi le sous-espace propre associé à } \alpha \text{ vérifie :} \\ E_\alpha \supset \text{Vect}\,(X).\end{array}}$$

- En notant $E_0 = \text{Ker}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0, on sait que :
  - × 0 et α sont valeurs propres de f,
  - × $\dim(E_0) = n-1$ et $\dim(E_\alpha) \geqslant 1$.

  D'où :
$$\dim(E_0) \ + \ \dim(E_\alpha) \ \geqslant \ n$$
  De plus, f est diagonalisable, donc : $\displaystyle\sum_{\lambda\in\text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) \ = \ \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \ = \ n$.

  On en déduit que :
  - × l'endomorphisme f n'admet pas d'autres valeurs propres que 0 et α (sinon : $\displaystyle\sum_{\lambda\in\text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) > n$)
  - × $\dim(E_0) + \dim(E_\alpha) = n$.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ admet exactement deux valeurs propres : } 0 \text{ et } \alpha.}$$

- D'après ce qui précède :
$$\underbrace{\dim(E_0)}_{= n-1} \ + \ \dim(E_\alpha) \ = \ n$$
  Donc $\dim(E_\alpha) = 1$. On obtient alors :
  - × la famille (X) est une famille libre de E_α, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul,
  - × $\text{Card}((X)) = 1 = \dim(E_\alpha)$.

  La famille (X) est donc une base de E_α.

$$\boxed{\text{Finalement : } E_0 = \text{Ker}(f) \text{ et } E_\alpha = \text{Vect}\,(X).}$$

Commentaire

- En notant $\mathcal{F}$ la concaténation d'une base de $E_0(f) = \text{Ker}(f)$ et $E_\alpha(f)$, on obtient que $\mathcal{F}$ est une base de vecteurs propres de f, on retrouve que f est diagonalisable.
  On a même :
$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
- On pouvait également montrer que 0 et α sont les seules valeurs propres de f en utilisant un polynôme annulateur de cet endomorphisme.
  Détaillons cette méthode.
  - × On remarque :
$$A^2 \ = \ A \times A \ = \ X\,{}^tX \times X\,{}^tX \ = \ X \times {}^tX\,X \times {}^tX \ = \ X\ \alpha\ {}^tX \ = \ \alpha \cdot X\,{}^tX \ = \ \alpha \cdot A$$
    D'où : $A^2 - \alpha \cdot A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
    On en déduit que le polynôme $Q(X) = X^2 - \alpha\, X = X(X-\alpha)$ est un polynôme annulateur de A.
    Ainsi : $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, \alpha\}$.
  - × Comme on sait par ailleurs que 0 et α sont bien valeurs propres de f, on obtient :
$$\text{Sp}(f) = \{0, \alpha\}$$

□

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leqslant p \leqslant n$.
Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note V la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
Soit g l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$.

a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.

Démonstration.

- On note $G = \mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_p)$ et $\mathcal{G} = (V_1, \ldots, V_n)$. La famille $\mathcal{G}$ est :
  - × génératrice de G.
  - × libre d'après l'énoncé.

  La famille $\mathcal{G}$ est donc une base de G.
  Ainsi :
  $$\mathrm{rg}(V) = \dim(\mathrm{Vect}\,(V_1, \ldots, V_p)) = \dim(G) = \mathrm{Card}(\mathcal{G}) = p$$
  $$\boxed{\text{Donc : } \mathrm{rg}(V) = p}$$

Commentaire

On pouvait aussi rédiger de la manière suivante.
Le rang d'une matrice est la dimension du sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes, ici $V_1, \ldots, V_p$.
Or la famille $(V_1, \ldots, V_p)$ est libre. Donc : $\mathrm{rg}(V) = p$.

- D'après le théorème du rang :
  $$\begin{array}{ccccccc} \dim(\mathrm{Ker}(g)) & + & \dim(\mathrm{Im}(g)) & = & \dim(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})) & = & p \\ & & \shortparallel & & & & \\ p \ = \ \mathrm{rg}(V) & = & \mathrm{rg}(g) & & & & \end{array}$$
  Donc : $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 0$.
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}.}$$

□

b) Soit Y une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons : $VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors :
$${}^tVVY \ = \ {}^tV \times VY \ = \ {}^tV \times 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \ = \ 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$$

($\Leftarrow$) Supposons ${}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$. Alors : ${}^tY{}^tVVY = 0_{\mathbb{R}}$.
Donc, en notant $Z = VY$, on obtient :
$${}^tZZ \ = \ {}^t(VY)VY \ = \ {}^tY{}^tVVY \ = \ 0$$
Or $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc il existe $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. D'où :
$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \ = \ {}^tZZ \ = \ 0$$
Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $z_i^2 \geqslant 0$. Donc :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ z_i^2 = 0 \quad \text{donc} \quad z_i = 0$$
Ainsi : $Z = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire : $VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow \ {}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}}$$

□

c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

Démonstration.
On note h l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p}(h) = {}^tVV$.

- D'après la question précédente, pour toute matrice colonne $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$g(Y) = VY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad h(Y) = {}^tVVY = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$$

  Donc $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(h)$.

- De plus, d'après la question ***2.a)***, $\mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$. Donc $\mathrm{Ker}(h) = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$.
  D'où h est injective.
  L'application h est un endomorphisme injectif en dimension finie. Donc h est bijectif.

$$\boxed{\text{Ainsi } {}^tVV \text{ est inversible.}}$$

□

Problème (HEC 2012)

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \ldots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \ldots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \ldots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.
Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\[2ex] 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{array} \right. .$$

1. a) Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$:
  - × de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
  - × qui ne s'annule pas ($\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \sqrt{x} \neq 0$).
- La fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $h = g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto -\lambda\sqrt{x}$:
    - × de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
    - × telle que : $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : u \mapsto \mathrm{e}^u$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_\lambda \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ en tant que produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

□

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

Démonstration.

- Comme $\lambda > 0$, par produit de limites : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$.
- Toujours par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = 0$.
- La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. En particulier, elle est dérivable sur $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$f'_\lambda(x) = -\frac{\lambda}{4\,x^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} - \frac{\lambda^2}{4x} \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} = -\left(\frac{\lambda}{4\,x\sqrt{x}} + \frac{\lambda^2}{4x} \right) \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} = -\frac{\lambda}{4x} \, \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \lambda \right) \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$$

Comme $x > 0$ et $\lambda > 0$, $f'_\lambda(x)$ apparaît comme l'opposé de trois produits strictement positifs.
Ainsi : $f'_\lambda(x) < 0$. Et f_λ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$0 \qquad +\infty$
Signe de $f'_\lambda(x)$	$-$
Variations de f_λ	$+\infty \searrow 0$

☐

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f''_\lambda(x) &= \frac{3\lambda}{8x^{\frac{5}{2}}}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} + \frac{\lambda^2}{8x^2}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} + \frac{\lambda^2}{4x^2}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} + \frac{\lambda^3}{8x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{3\lambda}{8\ x^2\sqrt{x}} + \frac{\lambda^2}{8x^2} + \frac{\lambda^2}{4x^2} + \frac{\lambda^3}{8\ x\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \end{aligned}$$

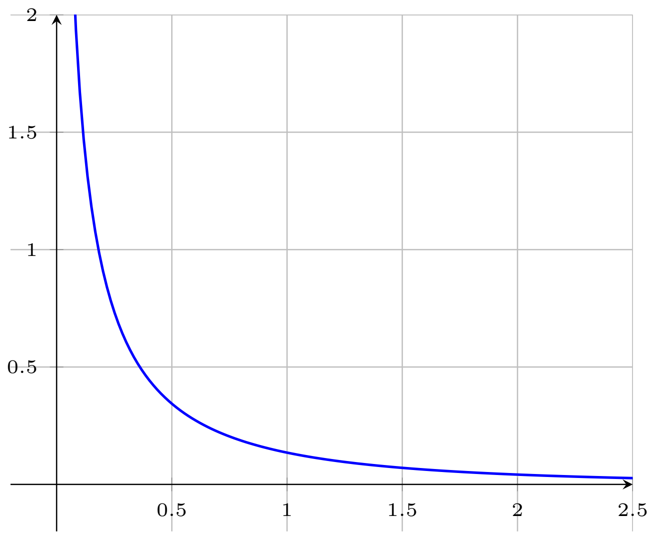
Comme $x > 0$ et $\lambda > 0$, on a directement : $f''_\lambda(x) > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_\lambda \text{ est convexe sur }]0, +\infty[}$$

☐

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Démonstration.



☐

2. a) Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.
On note $F : x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$.

- La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F = g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto -\lambda\sqrt{x}$:
    - dérivable sur $]0, +\infty[$,
    - telle que : $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : u \mapsto -\mathrm{e}^u$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$F'(x) = -\left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}}\right) = f_\lambda(x)$$

$$\boxed{\text{Donc } x \mapsto -e^{-\lambda\sqrt{x}} \text{ est une primitive de } f_\lambda \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

□

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ et calculer sa valeur.

Démonstration.

- La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Elle est donc continue sur $]0, +\infty[$.
  Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ est à la fois impropre en 0 et en $+\infty$.
- Soit $B \geqslant 1$. D'après la question précédente :

$$\int_1^B f_\lambda(x)\, dx \;=\; \left[\, F(x)\,\right]_1^B \;=\; e^{-\lambda} - e^{-\lambda\sqrt{B}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}$$

  Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ converge et vaut $e^{-\lambda}$.
- Soit $A \in]0, 1]$.

$$\int_A^1 f_\lambda(x)\, dx \;=\; \left[\, F(x)\,\right]_A^1 \;=\; e^{-\lambda\sqrt{A}} - e^{-\lambda} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 1 - e^{-\lambda}$$

  Donc $\displaystyle\int_0^1 f_\lambda(x)\, dx$ converge et vaut $1 - e^{-\lambda}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx \text{ converge et vaut } 1 - \cancel{e^{-\lambda}} + \cancel{e^{-\lambda}} = 1.}$$

□

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction f_λ est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ car, d'après ***1.a)***, f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$

$$\boxed{\text{La fonction } f_\lambda \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, 0]$, alors : $f_\lambda(x) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $x \in]0, +\infty[$, alors : $f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\, e^{-\lambda\sqrt{x}} \geqslant 0$ (car $\lambda > 0$)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) \geqslant 0}$$

- Comme f_λ est nulle en dehors de $]0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx \ = \ \int_{0}^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$$

Or $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ est convergente et vaut 1 d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx \text{ est convergente et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_\lambda \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in\ ]-\infty, 0]$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$. D'où :

$$F_\lambda(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × si $x \in\ ]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_\lambda(t)\ dt \quad \textit{(car } f_\lambda \textit{ est une densité de } X\textit{)} \\ &= \int_{0}^{x} f_\lambda(t)\ dt \quad \textit{(car } x > 0 \textit{ et } f_\lambda \textit{ est nulle sur }]-\infty, 0]\textit{)} \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{t}} \Big]_0^x \quad \textit{(d'après la question } \textbf{2.a)}\textit{)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_\lambda : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

□

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$.
  Comme $\lambda > 0$, on obtient : $Y(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$.

$$\boxed{Y(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in\ ]-\infty, 0]$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$. D'où :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x \in \,]0,+\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[\lambda\sqrt{X} \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{X} \leqslant \dfrac{x}{\lambda}\right]\right) & \textit{(car } \lambda > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^2\right]\right) & \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ & = & F_\lambda\left(\frac{x^2}{\lambda^2}\right) & \textit{(car } F_\lambda \textit{ est la fonction de répartition de } X\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\cancel{\lambda}\sqrt{\frac{x^2}{\cancel{\lambda^2}}}} & \textit{(d'après la question précédente, car } \dfrac{x^2}{\lambda^2} > 0\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-x} & \textit{(car } x > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

- On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ suit donc la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

□

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. Y^r admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_Y(t)\, dt$.
- La v.a.r. Y suit la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi :

$$f_Y : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

- Tout d'abord, la fonction f_Y est nulle en dehors de $[0,+\infty[$. D'où : :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} t^r f_Y(t)\, dt$$

- La fonction $t \mapsto t^r\ f_Y(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\ f_Y(t)\, dt$ est uniquement impropre en $+\infty$.
- On sait de plus :

× $t^r\ f_Y(t) = t^r \mathrm{e}^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. En effet :

$$\frac{t^r\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} \ = \ t^2 t^r \mathrm{e}^{-t} \ = \ t^{r+2}\mathrm{e}^{-t} \ \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ 0$$

× $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^r \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r\ f_Y(t)\ dt$ converge.

- De plus la fonction $t \mapsto t^r\ f_Y(t)$ est continue par moceaux sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^r \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est bien définie.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y^r) \text{ existe.}}$$

□

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\,\mathbb{E}\left(Y^r\right)$.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(Y^{r+1}) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} t^{r+1} f_Y(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} t^{r+1}\mathrm{e}^{-t}\ dt$$

- Soit $B \geqslant 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^{r+1} & \quad & u'(t) & = & (r+1)t^r \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & \quad & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^B t^{r+1}\mathrm{e}^{-t}\ dt &= \left[\ -t^{r+1}\mathrm{e}^{-t}\ \right]_0^B + (r+1)\int_0^B t^r\mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= -B^{r+1}\mathrm{e}^{-B} + (r+1)\int_0^B t^r\mathrm{e}^{-t}\ dt \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} -B^{r+1}\mathrm{e}^{-B} = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par passage à la limite quand } B \text{ tend vers } +\infty : \\ \mathbb{E}(Y^{r+1}) = (r+1)\ \mathbb{E}(Y^r).\end{array}}$$

□

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(Y^r\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^r\right)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall r \geqslant 2$, $\mathbb{E}(Y^r) = r\ \mathbb{E}(Y^{r-1})$.

- On obtient ainsi, pour tout $r \geqslant 2$:

$$\mathbb{E}(Y^r) \;=\; r\mathbb{E}(Y^{r-1}) \;=\; r(r-1)\mathbb{E}(Y^{r-2}) \;=\; \cdots \;=\; r(r-1)\times\cdots\times 2\,\mathbb{E}(Y^1) \;=\; r!\,\mathbb{E}(Y)$$

(on le démontre rigoureusement par une récurrence immédiate)

Or, comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$: $\mathbb{E}(Y) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y^r) = r!}$$

- Par définition : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

Ainsi : $Y^2 = \lambda^2\ X$ et comme $\lambda^2 > 0$: $X = \dfrac{Y^2}{\lambda^2}$. On en déduit :

$$X^r \;=\; \left(\frac{Y^2}{\lambda^2}\right)^r \;=\; \frac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}$$

Et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X^r) \;=\; \mathbb{E}\left(\frac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}\right) \;=\; \frac{1}{\lambda^{2r}}\,\mathbb{E}(Y^{2r}) \;=\; \frac{(2r)!}{\lambda^{2r}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X^r) = \dfrac{(2r)!}{\lambda^{2r}} \\ \text{En particulier : } \mathbb{E}(X) = \dfrac{2}{\lambda^2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{4!}{\lambda^4} - \dfrac{4}{\lambda^4} = \dfrac{20}{\lambda^4}.\end{array}}$$

□

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question ***3.***

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.
On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\, f_Z(x-y)\ dy$$

4. a) En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$.

Démonstration.

- Par définition : $S_2 = \sum\limits_{j=1}^{2} Y_j = Y_1 + Y_2$.

Comme $Y_1(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$ et $Y_2(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$ alors : $S_2(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.

$$\boxed{S_2(\Omega) \subset \,]0, +\infty[}$$

- D'autre part, les v.a.r. Y_1 et Y_2 :
  - $\times$ sont des variables à densité.
    En effet, elles suivent la loi exponentielle de paramètre 1, d'après la question ***3.b)***.
  - $\times$ sont indépendantes, d'après l'énoncé.
  - $\times$ admettent pour densité commune la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  La fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$.

  D'après l'énoncé, la v.a.r. S_2 admet donc une densité g_2 définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$g_2(x) \ = \ f_{Y_1+Y_2}(x) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(y) f_{Y_2}(x-y)\ dy \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)f(x-y)\ dy$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent alors :
  - $\times$ si $x \leqslant 0$. Alors $g_2(x) = 0$ car $S_2(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$.
  - $\times$ si $x > 0$, remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(y)f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) \neq 0 \\ f(x-y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0, +\infty[\\ x - y \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \leqslant x \end{cases}$$

  On en déduit : $f(y)f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in [0, x]$. Et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(x-y)\ dy \ = \ \int_0^x f(x)f(x-y)\ dy$$

  car $y \mapsto f(y)f(x-y)$ est nulle en dehors de $[0, x]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} g_2(x) \ &= \ \int_0^x f(y)f(x-y)\ dy \ = \ \int_0^x \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{e}^{-(x-y)}\ dy \\ &= \ \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^{-\cancel{y}+\cancel{y}}\ dy \ = \ \mathrm{e}^{-x} \int_0^x 1\ dy \\ &= \ \mathrm{e}^{-x}\ \big[\ y\ \big]_0^x \ = \ x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } g_2 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

- La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\, f_Z(x-y)\ dy$ est appelée *produit de convolution* de f_T et f_Z. Il est traditionnellement défini de la manière suivante.
  Soient T et Z deux v.a.r. à densité indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_T soient bornées.
  Alors la v.a.r. $Z+T$ est une v.a.r. à densité et une densité de $Z+T$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $$f_{Z+T} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\, f_Z(x-y)\ dy$$
- Il est fréquent que les sujets TOP3 introduisent de nouvelles notations ou nouveaux objets. On ne se laissera pas pour autant décontenancer ! Une partie de la difficulté de l'épreuve consiste alors à manipuler ces notations, avec les ambiguités qu'elles peuvent éventuellement comporter.

$\square$

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$,

où $\quad \mathcal{P}(n) : g_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

▸ **Initialisation** :
Par définition : $S_1 = \sum\limits_{j=1}^{1} Y_j = Y_1$. Donc : $S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{(1-1)!}\, x^{1-1}\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{0!}\, x^0 \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, on a bien :

$$g_1 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1-1)!}\, x^{1-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $g_{n+1} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{n!}\, x^n \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$)

- Par définition : $S_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} Y_j = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j + Y_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$.
  Comme pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $Y_j(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$, alors $S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  $$\boxed{S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[}$$

- D'autre part, les v.a.r. S_n et Y_{n+1} :
  - $\times$ sont des variables à densité. En effet, Y_{n+1} suit la loi exponentielle de paramètre 1, d'après la question ***3.b)***, et, par hypothèse de récurrence, S_n admet pour densité g_n.
  - $\times$ sont indépendantes, d'après l'énoncé.
  - $\times$ admettent pour densités les fonctions f et g_n.
    La fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$.
    La fonction g_n est également bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(n-1)$.

- On en déduit, d'après le théorème de l'énoncé, que la v.a.r. S_{n+1} admet une densité g_{n+1} définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$g_{n+1}(x) \;=\; f_{S_n+Y_{n+1}}(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(y) f_{Y_{n+1}}(x-y)\ dy \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y) f(x-y)\ dy$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent alors :
  - $\times$ si $x \leqslant 0$, alors $g_{n+1}(x) = 0$ car $S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$.
  - $\times$ si $x > 0$, remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g_n(y) f(x-y) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} g_n(y) \neq 0 \\ f(x-y) \neq 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} y \in \,]0,+\infty[\\ x-y \in [0,+\infty[\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} y > 0 \\ x-y \geqslant 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} y > 0 \\ y \leqslant x \end{array}\right.$$

On en déduit : $g_n(y) f(x-y) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; y \in]0,x]$. Et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y) f(x-y)\ dy = \int_0^x g_n(y) f(x-y)\ dy$$

car $y \mapsto g_n(y) f(x-y)$ est nulle en dehors de $]0,x]$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
g_{n+1}(x) & = & \displaystyle\int_0^x g_n(y) f(x-y)\ dy & \\[2ex]
& = & \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(n-1)!}\, y^{n-1} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{e}^{-(x-y)}\ dy & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\[2ex]
& = & \displaystyle\frac{1}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-x} \int_0^x y^{n-1} \mathrm{e}^{-\cancel{y}+\cancel{y}}\ dy & \\[2ex]
& = & \displaystyle\frac{1}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-x} \int_0^x y^{n-1}\ dy & \\[2ex]
& = & \displaystyle\frac{1}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-x} \left[\frac{y^n}{n} \right]_0^x \;=\; \frac{1}{n!}\, x^n \mathrm{e}^{-x} &
\end{array}$$

Finalement, on a bien : $g_{n+1} : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{n!}\, x^n \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{array}\right.$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{array}\right. .}$$

Commentaire

- L'objectif de cette question est encore une fois, l'application du théorème du produit de convolution. C'est pourquoi on ne détaille pas la démonstration du caractère borné de g_n. Il s'effectue proprement grâce à une simple étude de fonction.
  Cela donnerait la preuve suivante pour $n \geqslant 2$ (le cas $n = 1$ correspond au cas $g_1 = f$).
  - La fonction g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Soit $x \in [0, +\infty[$.
  $$g_n'(x) = (n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^{-x} - x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} = x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}(n-1-x)$$
  Donc : $g_n'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant n-1$.
  - On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$n-1$		$+\infty$
Signe de $g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g_n	0	$\nearrow$	$g_n(n-1)$	$\searrow$	0

  On en déduit que g_n est bornée. Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(n-1)$.
- Au début de la partie II, le sujet fait admettre l'indépendance entre les v.a.r. S_k et Y_{k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Néanmoins, la démontrer est tout à fait à notre portée : il suffit ici d'invoquer le lemme des coalitions appliqué aux v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$.

$\square$

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité.
Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?
Calculer alors leurs valeurs respectives.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx$ converge absolument.
- Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{x}\, g_n(x) \geqslant 0$.
  Il suffit donc de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx$ est convergente.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\, g_n(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.

- Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, g_n(x)\; dx$.

  × Tout d'abord : $\dfrac{1}{x}\, g_n(x) = x^{n-2}\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{n-2} = \dfrac{1}{x^{2-n}}$.

  × $\forall x \in \left]0, 1\right]$, $x^{n-2}\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^{2-n}} \geqslant 0$.

  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{2-n}}$ est une intégrale de Riemann impropre en 0, d'exposant $(2-n)$. Elle est donc convergente si et seulement si $2-n<1$, c'est-à-dire : $n>1$.

  Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, g_n(x)\; dx$ est convergente si et seulement si $n \geqslant 2$.

- Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\; dx$.

  × Tout d'abord : $\dfrac{1}{x}\, g_n(x) = x^{n-2}\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. En effet :

$$\frac{x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = x^2\, x^{n-2}\mathrm{e}^{-x} = x^n\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

  × $\forall x \in \left[1, +\infty\right[$, $x^{n-2}\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\; dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2>1)$. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}\; dx$ est convergente.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}\; dx$ est convergente si et seulement si $n \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{Finalement } \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) \text{ existe si et seulement si } n \geqslant 2.}$$

- La v.a.r. $\dfrac{1}{S_n}$ admet une variance si et seulement si la v.a.r. $\left(\dfrac{1}{S_n}\right)^2 = \dfrac{1}{S_n^2}$ admet une espérance.

  D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{S_n^2}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\; dx$ est absolument convergente.

- Par une démonstration similaire à celle qui précède, on démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\; dx$ est convergente si et seulement si $n \geqslant 3$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) \text{ existe si et seulement si } n \geqslant 3.}$$

- Soit $n \geqslant 2$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\ dx \;=\; \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}\ dx \\
&= \frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}\ dx \\
&= \frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} g_{n-2}(x)\ dx && \textit{(par définition de } g_{n-2}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} g_{n-2}(x)\ dx && \textit{(car } g_{n-2} \textit{ est nulle en dehors de }]0,+\infty[\textit{)} \\
&= \frac{1}{n-1} \times 1 && \textit{(car } g_{n-2} \textit{ est une densité)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-1}}$$

- Soit $n \geqslant 3$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n^2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} g_n(x)\ dx \;=\; \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} x^{n-3}\mathrm{e}^{-x}\ dx \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^{n-3}\mathrm{e}^{-x}\ dx \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty} g_{n-3}(x)\ dx && \textit{(par définition de } g_{n-3}\textit{)} \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-3}(x)\ dx && \textit{(car } g_{n-3} \textit{ est nulle en dehors de }]0,+\infty[\textit{)} \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \times 1 && \textit{(car } g_{n-3} \textit{ est une densité)}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n^2}\right) - \left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \\
&= \frac{\cancel{n} - 1 - (\cancel{n} - 2)}{(n-1)^2(n-2)} \\
&= \frac{1}{(n-2)(n-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{(n-2)(n-1)^2}}$$

□

5. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

Démonstration.

- Déterminons une expression de H.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Par propriété de la fonction ln :

$$\begin{array}{rcll}
H(\lambda) & = & \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(f_\lambda(x_k)\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{\lambda}{2\sqrt{x_k}}\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\dfrac{\lambda}{2\ (x_k)^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right)\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(\lambda) - \ln(2) - \dfrac{1}{2}\ \ln(x_k) - \lambda\sqrt{x_k}\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\lambda) - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(2) - \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} & \textit{(par linéarité de la somme)} \\
& = & n\ln(\lambda) - n\ln(2) - \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} & \\
& = & n\ln(\lambda) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\ \lambda - n\ln(2) - \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k) &
\end{array}$$

- La fonction H est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme $H = h_1 + h_2$ de :
  × $h_1 : \lambda \mapsto n\ \ln(\lambda)$ dérivable sur $]0, +\infty[$.
  × $h_2 : \lambda \mapsto \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\ \lambda - n\ln(2) - \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k)$ dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction affine. *(ne pas oublier que la variable est ici λ)*
- Soit $\lambda > 0$.

$$H'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$$

  (par rapport à λ, le réel $-n\ln(2) - \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k)$ est une constante)

On obtient alors :

$$\begin{aligned} H'(\lambda) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{n} \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}} \qquad \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \lambda \leqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}} \end{aligned}$$

Notons $\lambda_0 = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

λ	0		λ_0		$+\infty$
Signe de $H'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
Variations de H	$-\infty$	$\nearrow$	$H(\lambda_0)$	$\searrow$	$-\infty$

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ admet un unique maximum en } \lambda_0 = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}.}$$

Commentaire

On s'intéresse dans cette partie et la suivante à l'estimateur du maximum de vraisemblance. Détaillons ce point.

- On dispose d'un échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ d'observations.
- On suppose que ces observations proviennent d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ d'une v.a.r. X dont la loi dépend d'un paramètre λ, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur de λ qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance.
- Le réel λ_0 est précisément la valeur du paramètre λ maximisant la réalisation des observations initiales.
- La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la variable aléatoire construite à l'aide de ce maximum : λ_n^*.

Commentaire

- Plaçons-nous dans le cas où X est une v.a.r. discrète (la méthode est plus simple à appréhender dans ce cas). L'idée est de choisir comme estimation de λ le réel λ_0 tel que la **vraisemblance** d'avoir obtenu l'échantillon utilisé soit maximisée.
Autrement dit, le réel λ_0 tel que la probabilité :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda) &= \mathbb{P}_\lambda([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_n = x_n]) \\ &= \mathbb{P}_\lambda([X_1 = x_1]) \times \ldots \times \mathbb{P}_\lambda([X_n = x_n]) \quad \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\lambda([X_i = x_i]) \end{aligned}$$

soit maximale. L'énoncé portait sur le cas de v.a.r. à densité, que l'on comprend aisément par analogie avec le cas des v.a.r. discrètes.

□

6. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

Démonstration.
Rappelons que : $\lambda_0 = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$ où chaque x_k est une réalisation de X_k.

$$\boxed{\text{Le réel } \lambda_0 \text{ est une réalisation de la variable aléatoire } \lambda_n^*.}$$

□

b) Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{E}\left(a_n\ \lambda_n^*\right) = \lambda$. On note alors : $\hat{\lambda}_n = a_n\ \lambda_n^*$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- On commence par exprimer λ_n^* en fonction de $Y_1, \ldots, Y_n$, puis en fonction de S_n.

$$\lambda_n^* = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{\lambda}} = \frac{n\lambda}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k} = \frac{n\lambda}{S_n}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a_n\lambda_n^*) = \lambda &\Leftrightarrow a_n\mathbb{E}(\lambda_n^*) = \lambda \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &\Leftrightarrow a_n\,\mathbb{E}\left(\frac{n\lambda}{S_n}\right) = \lambda \\ &\Leftrightarrow \cancel{\lambda}\, n\, a_n \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \cancel{\lambda} \\ &\Leftrightarrow n\, a_n \frac{1}{n-1} = 1 \qquad \textit{(d'après la question 4.c)} \\ &\Leftrightarrow a_n = \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2, \text{ en posant } a_n = \frac{n-1}{n}, \text{ alors } \mathbb{E}(a_n\lambda_n^*) = \lambda.}$$

Commentaire

L'énoncé demande de déterminer a_n pour tout $n \geqslant 1$ et non $n \geqslant 2$.
Cependant, on a démontré en question ***4.c)*** que $\dfrac{1}{S_n}$ n'admet pas d'espérance si $n = 1$.
Ainsi λ_n^* n'en admet pas non plus si $n = 1$. La question n'est donc plus pertinente. □

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}\left(\hat{\lambda}_n\right)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) &= \mathbb{V}(a_n \lambda_n^*) = (a_n)^2 \mathbb{V}(\lambda_n^*) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \mathbb{V}\left(\frac{n\lambda}{S_n}\right) = \frac{\cancel{n^2}\lambda^2 (n-1)^2}{\cancel{n^2}} \mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) \\
&= \frac{\lambda^2 \cancel{(n-1)^2}}{(n-2)\cancel{(n-1)^2}} = \frac{\lambda^2}{n-2} \qquad \textit{(d'après la question 4.c)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = 0.}$$

□

Partie III : Loi à 2 paramètres.

7. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient (produit si $\alpha \geqslant 1$) de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f_{(\lambda,\alpha)} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \leqslant 0$, alors : $f_{(\lambda,\alpha)}(x) = 0 \geqslant 0$
  - × si $x > 0$, alors, comme $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$: $f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \lambda\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x^\alpha} \geqslant 0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{(\lambda,\alpha)}(x) \geqslant 0}$$

- Montrons que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\, dx$ est convergente.
  - × Comme la fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est nulle en dehors de $]0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\, dx$$

  - × La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\, dx$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.

× Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^B f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx &= \int_1^B \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ dx \\ &= -\int_1^B \big(-\lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\big)\ \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ dx \\ &= -\Big[\ \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ \Big]_1^B \\ &= -(\mathrm{e}^{-\lambda B^\alpha} - \mathrm{e}^{-\lambda}) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha} \end{aligned}$$

Or, comme $\alpha > 0$: $\lim\limits_{B \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda B^\alpha} = 0$.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ est convergente et vaut $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

× Soit $A \in\ ]0, 1]$.

$$\begin{aligned} \int_A^1 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx &= \int_A^1 \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ dx \\ &= -\Big[\ \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ \Big]_A^1 \\ &= -(\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha}) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha} - \mathrm{e}^{-\lambda} \end{aligned}$$

Or, comme $\alpha > 0$: $\lim\limits_{A \to 0} \mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha} = \mathrm{e}^0 = 1$.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ est convergente et vaut $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx \text{ est convergente et vaut } \mathrm{e}^{-\lambda} + 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } f_{(\lambda,\alpha)} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$.

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

Démonstration.
D'après l'énoncé : $W(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in\ ]-\infty, 0]$, alors $[W \leqslant x] = \varnothing$. D'où :

$$F_{(\lambda,\alpha)}(x) \ = \ \mathbb{P}([W \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x > 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{(\lambda,\alpha)}(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) & \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(t)\ dt & \textit{(car } f_{(\lambda,\alpha)} \textit{ est nulle sur }]-\infty,0]\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} \lambda\alpha\, t^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda t^\alpha}\ dt & \\ & = & -\left[\ \mathrm{e}^{-\lambda t^\alpha}\ \right]_0^x \ = \ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{(\lambda,\alpha)} : x \mapsto \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

□

c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Démonstration.
On note $U = F_{(\lambda,\alpha)}(W)$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} U(\Omega) & = & \big(F_{(\lambda,\alpha)}(W)\big)\ (\Omega) & \\ & = & F_{(\lambda,\alpha)}\ \big(W(\Omega)\big) & \\ & \subset & F_{(\lambda,\alpha)}\ \big(]0,+\infty[\big) & \\ & \subset &]\lim\limits_{x\to 0} F_{(\lambda,\alpha)}(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F_{(\lambda,\alpha)}(x)[& \textit{(car } F_{(\lambda,\alpha)} \textit{ est continue et strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \subset &]0,1[& \end{array}$$

$$\boxed{U(\Omega) \subset \ ]0,1[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :

× si $x \leqslant 0$, alors $[U \leqslant x] = \varnothing$, car $U(\Omega) \subset \ ]0,1[$. D'où :

$$F_U(x) \ = \ \mathbb{P}([U \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x \in \,]0,1[$.

$$\begin{array}{rcll} F_U(x) & = & \mathbb{P}([U \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[F_{(\lambda,\alpha)}(W) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda W^\alpha} \leqslant x\right]\right) & \textit{(car W est à valeurs strictement positives)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda W^\alpha}\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left([\ln(1-x) \leqslant -\lambda W^\alpha]\right) & \textit{(car $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{\ln(1-x)}{\lambda} \geqslant W^\alpha\right]\right) & \textit{(car $-\lambda < 0$)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant W\right]\right) & \textit{(car $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$)} \\ & = & F_{(\lambda,\alpha)}\left(\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) & \\ & = & 1 - \exp\left(-\lambda\left(\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha\right) & \textit{(car $\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$)} \\ & = & 1 - \exp\left(-\cancel{\lambda}\left(-\dfrac{1}{\cancel{\lambda}}\ln(1-x)\right)\right) & \\ & = & 1 - \exp(\ln(1-x)) \ = \ \cancel{1} - (\cancel{1} - x) & \\ & = & x & \end{array}$$

× si $x \geqslant 1$, alors $[U \leqslant x] = \Omega$, car $U(\Omega) \subset \,]0,1[$. D'où :

$$F_U(x) \ = \ \mathbb{P}([U \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

Finalement :

$$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$.
Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{On en déduit : } U = F_{(\lambda,\alpha)}(W) \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$$

Commentaire

- On a précisé, lors de l'étude de $U(\Omega)$, que $F_{(\lambda,\alpha)}$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$. Il est possible de déterminer l'expression de ${F_{(\lambda,\alpha)}}^{-1} :]0,1[\to]0,+\infty[$.
Pour ce faire, on remarque que pour tout $x \in]0,+\infty[$ et $y \in]0,1[$, on a :
$$\begin{aligned} y = F_{(\lambda,\alpha)}(x) &\Leftrightarrow y = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} \\ &\Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-y)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\Leftrightarrow x = {F_{(\lambda,\alpha)}}^{-1}(y) \end{aligned}$$
On démontre ainsi que ${F_{(\lambda,\alpha)}}^{-1}$ a pour expression : ${F_{(\lambda,\alpha)}}^{-1} : x \mapsto \left(-\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.
- On retrouve ici l'expression de la quantité $\left(-\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-y)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ apparaissant à la fin de la résolution de la question. Ce n'est pas surprenant car la méthode utilisée ici consiste justement à faire apparaître, étape par étape, la quantité $\left(-\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-y)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Plus précisément, on a :
$$F_U(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[U \leqslant x]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[F_{(\lambda,\alpha)}(W) \leqslant x]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[W \leqslant {F_{(\lambda,\alpha)}}^{-1}(x)]\,\big) \ = \ F_W\big({F_{(\lambda,\alpha)}}^{-1}(x)\big)$$
On comprend mieux pourquoi cette manière de procéder est appelée **méthode d'inversion**.

□

d) Écrire une fonction **Scilab** permettant de simuler W.

Démonstration.

- On note $G_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $]0,1[$ par :
$$G_{(\lambda,\alpha)} : x \mapsto \left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$
Alors, avec les mêmes calculs qu'à la question précédente, on obtient, pour tout $x \in]0,+\infty[$:
$$G_{(\lambda,\alpha)}\ \big(F_{(\lambda,\alpha)}(x)\big) \ = \ x$$
Or $U = F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ donc $G_{(\lambda,\alpha)}(U) = G_{(\lambda,\alpha)}\big(F_{(\lambda,\alpha)}(W)\big) = W$.
$$\boxed{W = G_{(\lambda,\alpha)}(U)}$$
- On en déduit la fonction **Scilab** suivante pour simuler W :

```
funcion w = simuWB(lambda, alpha)
    u = rand()
    w = (-(1 / lambda) * log(1-u)) ^ (1 / alpha)
endfunction
```

□

8. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K la fonction de répartition de K.
On pose pour tout x réel $R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et $r(x) = R'(x)$, où R' est la dérivée de R.

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

Démonstration.

(i) • D'après les hypothèse de cette question, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_K(x) \ = \ f_{(\lambda,2)}(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et :

$$F_K(x) \ = \ F_{(\lambda,2)}(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors :

$$R(x) = -\ln(1 - F_K(x)) = -\ln(1 - 0) = 0$$

× si $x \in \,]0, +\infty[$, alors :

$$R(x) \ = \ -\ln\big(1 - F_K(x)\big) \ = \ -\ln(\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda x^2})) \ = \ -\ln(\mathrm{e}^{-\lambda x^2}) \ = \ -(-\lambda x^2) \ = \ \lambda x^2$$

$$\boxed{\text{Finalement : } R : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

• On en déduit que la fonction R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. La fonction r est donc continue sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$:

$$\tau_0(R)(x) \ = \ \frac{R(x) - R(0)}{x - 0} \ = \ \frac{\lambda x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} \ = \ \lambda x \quad \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ 0$$

La fonction R est donc dérivable en 0 et $r(0) = R'(0) = 0$.

• Soit $x > 0$.

$$r(x) \ = \ R'(x) \ = \ 2\,\lambda\, x$$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} r(x) = 0 = r(0)$.
Ainsi r est continue à droite en 0.

• De plus, comme $\lambda > 0$, r est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{La fonction } r \text{ est continue, strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } r(0) = 0.}$$

(ii) On note $Z = r(K)$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \big(r(K)\big)\,(\Omega) \\ & = & r\big(K(\Omega)\big) \\ & \subset & r\big(]0,+\infty[\big) \\ & \subset &]\lim\limits_{x\to 0} r(x), \lim\limits_{x\to+\infty} r(x)[\quad \textit{(car } r \textit{ est continue et strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \subset &]0,+\infty[\end{array}$$

$$\boxed{Z(\Omega) \subset\ ]0,+\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in\ ]-\infty, 0]$, alors $[Z \leqslant x] \subset \varnothing$, car $Z(\Omega) =]0,+\infty[$. D'où :

$$F_Z(x) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \in\ ]0,+\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([r(K) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([2\lambda K \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[K \leqslant \dfrac{x}{2\lambda}\right]\right) & \textit{(car } \lambda > 0\textit{)} \\ & = & F_K\left(\dfrac{x}{2\lambda}\right) & \\ & = & 1 - \exp\left(-\lambda\left(\dfrac{x}{2\lambda}\right)^2\right) & \textit{(car } \dfrac{x}{2\,\lambda} > 0\textit{, d'après } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\ & = & 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}x^2\right) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}x^2\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{On en déduit : } r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right).}$$

□

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** sont vérifiées. Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclusion ?

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $K(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors $[K \leqslant x] = \varnothing$ car $K(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. D'où :
  $$F_K(x) \; = \; \mathbb{P}([K \leqslant x]) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$$
  - × si $x \in \,]0, +\infty[$, alors :
  $$\begin{array}{rcll} F_K(x) & = & \mathbb{P}([K \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([r(K) \leqslant r(x)]) & \textit{(car, d'après } \textbf{\textit{(i)}}\textit{, } r \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ & = & F_{r(K)}(r(x)) & \\ & = & F_{(\frac{1}{4\lambda}, 2)}(x) & \textit{(car, d'après } \textbf{\textit{(ii)}}\textit{, } r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\,\lambda}, 2\right)\textit{)} \\ & = & 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}(r(x))^2\right) & \textit{(car } x > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } F_K : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}(r(x))^2\right) & \text{si } x > 0 \end{array} \right.}$$

- On cherche alors à déterminer une expression de r sur $]0, +\infty[$. Pour cela, on cherche à faire apparaître une relation entre R et $r = R'$.
  - × Soit $x \in \,]0, +\infty[$. D'après le point précédent :
  $$R(x) \; = \; -\ln\big(1 - F_K(x)\big) \; = \; -\ln\left(\exp\left(-\frac{1}{4\lambda}\big(r(x)\big)^2\right)\right) \; = \; \frac{1}{4\lambda}\big(r(x)\big)^2$$
  - × D'après ***(i)***, la fonction r est strictement croissante et vérifie $r(0) = 0$.
  D'où : $\forall x > 0, \; r(x) > 0$.
  $$\boxed{\text{Avec le point précédent, on en déduit : } \forall x \in \,]0, +\infty[, \; R(x) > 0.}$$
  - × Soit $x \in \,]0, +\infty[$. On obtient alors :
  $$\begin{array}{lrcll} & R(x) & = & \dfrac{1}{4\lambda}\big(r(x)\big)^2 & \\ \text{donc} & R(x) & = & \dfrac{1}{4\lambda}\big(R'(x)\big)^2 & \\ \text{d'où} & 4\,\lambda\, R(x) & = & \big(R'(x)\big)^2 & \\ \text{ainsi} & \sqrt{4\,\lambda\, R(x)} & = & R'(x) & \textit{(car } \lambda > 0\textit{, } R(x) \geqslant 0 \textit{ et } R'(x) = r(x) \geqslant 0\textit{)} \\ \text{enfin} & 2\sqrt{\lambda}\,\sqrt{R(x)} & = & R'(x) & \end{array}$$
  $$\boxed{\text{Comme } R(x) \neq 0 : \; \frac{R'(x)}{2\sqrt{R(x)}} = \sqrt{\lambda}.}$$

× Soit $A \in \,]0, x]$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_A^x \frac{R'(t)}{2\sqrt{R(t)}}\, dt & = & \displaystyle\int_A^x \sqrt{\lambda}\, dt = \Big[\, \sqrt{\lambda}\, t \,\Big]_A^x = \sqrt{\lambda}\, x - \sqrt{\lambda}\, A \\ \shortparallel & & \\ \Big[\, \sqrt{R(x)} \,\Big]_A^x & & \\ \shortparallel & & \\ \sqrt{R(x)} - \sqrt{R(A)} & & \end{array}$$

× Tout d'abord : $\displaystyle\lim_{A \to 0^+} \sqrt{\lambda}\, A = 0$.
De plus, R est continue en 0. En effet, la fonction F_K est une primitive de f_K qui est continue sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé. On en déduit que F_K est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction R est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que transformée affine de F_K qui est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit :

$$\lim_{A \to 0} R(A) \;=\; R(0) \;=\; 0$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{A \to 0} \sqrt{R(A)} \;=\; 0$. On obtient : $\sqrt{R(x)} = \sqrt{\lambda}\, x$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \,]0, +\infty[,\ R(x) = \lambda x^2. \text{ D'où : } \forall x \in \,]0, +\infty[,\ r(x) = R'(x) = 2\lambda x.}$$

× En remplaçant r dans l'expression de F_K, on a :

$$F_K(x) \;=\; 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}\, \big(r(x)\big)^2\right) \;=\; 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}\, (2\lambda x)^2\right) \;=\; 1 - \exp(-\lambda x^2)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_K : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \end{array} \right.}$$

× On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$.
Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{On en déduit : } K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2)}$$

- On a montré en question ***8.a)*** :

$$K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \;\Rightarrow\; \textit{(i)} \text{ et } \textit{(ii)} \text{ sont vérifiées}$$

On a montré en question ***8.b)*** :

$$K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \;\Leftarrow\; \textit{(i)} \text{ et } \textit{(ii)} \text{ sont vérifiées}$$

$$\boxed{\text{Donc } K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \text{ si et seulement si les propriétés } \textit{(i)} \text{ et } \textit{(ii)} \text{ sont vérifiées}}$$

Commentaire

Cette question nécessitait de nombreuses prises d'initiative.
En particulier pour la résolution de l'équation :

$$R'(x) \ = \ 2\sqrt{\lambda}\sqrt{R(x)}$$

On remarque que cette équation relie la fonction R et sa dérivée. On appelle de telles équations des **équations différentielles d'ordre 1** (d'ordre 1 puisqu'elle fait apparaître la dérivée première).
On les exprime généralement sous cette forme :

$$y'(x) = f(y(x)) + c(x) \quad \text{que l'on note plus simplement} \quad y' = f(y) + c$$

où c, f et y sont trois fonctions.
On est, dans cette question, dans un cas particulier d'une équation différentielle dite de Bernoulli :

$$y'(x) = b(x)\ (y(x))^\beta \quad \text{que l'on note plus simplement} \quad y' = b(x)\ y^\beta$$

Dans notre cas, $b(x) = 2\sqrt{\lambda}$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$.
Ce type d'équation se résout toujours de la même manière :
1) on divise l'équation par y^β (en ayant vérifié au préalable que, pour tout x : $y^\beta(x) \neq 0$).
On obtient :

$$\frac{y'}{y^\beta} \ = \ b(x)$$

2) on intègre l'équation précédente entre a et x (où a est une constante à fixer). □

Dans les questions ***9.*** et ***10.***, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

9. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \ \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

a) Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \ldots, z_n$ des réels quelconques.
En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - t\, y_k)^2$, établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\, z_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)$$

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$Q(t) \ = \ \sum_{k=1}^{n} (z_k - ty_k)^2 \ = \ \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - 2ty_kz_k + t^2y_k^2) \ = \ \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)t^2 - 2\Big(\sum_{k=1}^{n} y_kz_k\Big)t + \sum_{k=1}^{n} z_k^2$$

La fonction Q est donc une fonction polynomiale du second degré.
On note P le polynôme de degré 2 associé.

- De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Q(t) \ = \ \sum_{k=1}^{n} (z_k - ty_k)^2 \ \geqslant \ 0$$

- La fonction Q étant positive, le polynôme associé P est de signe constant.
  Son discriminant Δ est donc négatif ou nul. Or :

$$\Delta \ = \ \left(-2\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\Big)\right)^2 - 4\ \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right) \ = \ 4\left(\left(\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)\right)$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{ll} \text{comme} & \Delta \leqslant 0 \\ \text{alors} & 4\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k z_k\right)^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k^2\right)\right) \leqslant 0 \\ \text{donc} & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k z_k\right)^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k^2\right) \leqslant 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big)}$$

□

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- Soit $x \in\ ]0, +\infty[$.

$$\varphi(x) \ = \ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x} \ = \ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)} \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)}} - \frac{1}{x}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)} \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $\dfrac{g_1}{g_2}$ de :

× $g_1 : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)} \ln(w_k)$ dérivable sur $]0, +\infty[$,

× $g_2 : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)}$ qui :

  - est dérivable sur $]0, +\infty[$,
  - `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } \varphi \text{ est donc dérivable sur }]0, +\infty[\text{ en tant que} \\ \text{somme de fonctions dérivables sur }]0, +\infty[.\end{array}}$$

- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 e^{x\ln(w_k)}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{x\ln(w_k)}\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) e^{x\ln(w_k)}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^x\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

- On applique alors la question ***8.a)*** avec :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \begin{cases} y_k = \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}} \\ z_k = (w_k)^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

  Les réels $y_1, \ldots, y_n$ sont bien non tous nuls.
  En effet, si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $y_k = 0$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $w_k = 1$.
  Ceci n'est pas possible car $w_1, \ldots, w_n$ sont non tous égaux.
  On obtient alors :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)$$

  D'où :

$$\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} \geqslant 0$$

  Or : $\dfrac{1}{x^2} > 0$. Ainsi : $\varphi'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } \varphi \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$$

□

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
Montrer que $1 \leqslant n_0 \leqslant n - 1$.

Démonstration.

- La famille de réels $(w_1, \ldots, w_n)$ est finie. Donc elle admet un maximum. Ainsi : $n_0 \geqslant 1$.
- D'après l'énoncé, $w_1, \ldots, w_n$ sont non tous égaux. Donc au moins l'un de ces réels ne réalise pas le maximum. Ainsi : $n_0 \leqslant n - 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } 1 \leqslant n_0 \leqslant n - 1.}$$

□

d) Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- On note I_0 l'ensemble des entiers naturels k vérifiant : $w_k = w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
  Autrement dit :
  $$I_0 = \{k \in [\![1, n]\!] \ / \ w_k = w_{k_0}\}$$
  (par définition de I_0 : $\mathrm{Card}(I_0) = n_0$*)*
- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.
  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (w_k)^x &= \sum_{k \in I_0} (w_k)^x + \sum_{k \notin I_0} (w_k)^x \\ &= \sum_{k \in I_0} (w_{k_0})^x + \sum_{k \notin I_0} (w_k)^x \\ &= n_0 (w_{k_0})^x + \sum_{k \notin I_0} (w_k)^x\end{aligned}$$
  On obtient alors :
  $$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1 + \frac{\sum\limits_{k \notin I_0} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1 + \frac{1}{n_0} \sum_{k \notin I_0} \left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x$$
- Or, si $k \notin I_0$, alors : $0 < w_k < w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
  Donc : $0 < \dfrac{w_k}{w_{k_0}} < 1$.
  D'où : $\forall k \notin I_0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x = 0$.
  Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{k=1}^{n} (w_k)^x \underset{x \to +\infty}{\sim} n_0 (w_{k_0})^w.}$$

□

e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(on distinguera les deux cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$).

Démonstration.

- Si $w_{k_0} = 1$.
  - × D'après la question précédente : $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \underset{x \to +\infty}{\sim} n_0$. Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x = n_0$.
  - × On calcule :
  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x &= \sum_{k \in I_0} \ln(w_k)(w_k)^x + \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x \\ &= n_0 \ln(w_{k_0})(w_{k_0})^x + \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x \\ &= \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x \qquad \textit{(car } w_{k_0} = 1, \textit{ donc } \ln(w_{k_0}) = 0\textit{)}\end{aligned}$$

Or, par définition de I_0 :
$$\forall k \notin I_0,\ 0 < w_k < w_{k_0} = 1$$
Donc : $\forall k \notin I_0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} (w_k)^x = 0$.
D'où :
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k\notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x = 0$$
Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} = \dfrac{0}{n_0} = 0$.

× De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Ainsi, si $w_{k_0} = 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0 = \ln(w_{k_0})$.

- Si $w_{k_0} \neq 1$.
Avec le même raisonnement qu'à la question précédente, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} n_0 \ln(w_{k_0})(w_{k_0})^x$$
Donc :
$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{n_0}\,\cancel{(w_{k_0})^x}\ln(w_{k_0})}{\cancel{n_0}\,\cancel{(w_{k_0})^x}} = \ln(w_{k_0})$$
D'où :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} = \ln(w_{k_0})$$
Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Ainsi, si $w_{k_0} \neq 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ln(w_{k_0})$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ln(w_{k_0}).}$$

□

f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ admet une unique solution.

Démonstration.

- La fonction φ est :
  × continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***8.b)***)
  × strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (toujours d'après la question ***8.b)***)

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\varphi(]0, +\infty[)$.
$$\varphi(]0,+\infty[) = \left] \lim_{x\to 0^+} \varphi(x), \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) \right[= \left]-\infty, \ln(w_{k_0})\right[$$

- Détaillons le calcul de $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$.

  Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to 0^+} (w_k)^x = 1$. Alors :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)}{n}$$

  De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
  Finalement, on a donc bien : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$.

- Montrons maintenant que $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \in \,]-\infty, \ln(w_{k_0})[$.

  Tout d'abord :

  × pour tout $k \notin I_0$: $w_k < w_{k_0}$, donc $\ln(w_k) < \ln(w_{k_0})$ (car la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$).

    D'où : $\sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_k) < \sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_{k_0})$.

  × pour tout $k \in I_0$: $w_k = w_{k_0}$, donc $\ln(w_k) = \ln(w_{k_0})$.

    D'où : $\sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_k) = \sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_{k_0})$.

  D'où :

$$\begin{array}{ccccc}
\sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_k) + \sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_k) & < & \sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_{k_0}) + \sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_{k_0}) & & \\
\| & & \| & & \\
\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) & & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_{k_0}) & = & n \ln(w_{k_0})
\end{array}$$

  Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) < n \ln(w_{k_0})$$

  On en déduit :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) < \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} \ln(w_{k_0}) = \ln(w_{k_0})$$

  On a donc bien : $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \in \,]-\infty, \ln(w_{k_0})[$.

$$\boxed{\text{Ainsi l'équation } \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \text{ admet une unique solution sur }]0,+\infty[, \text{ que l'on notera } \hat{\alpha}.}$$

□

10. On note $(W_1, \ldots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question ***7.*** dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, \ldots, w_n)$.
On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.
Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Démonstration.

- Déterminons une expression explicite de G.
Soit $(\lambda, \alpha) \in \,]0, +\infty[^2$.

$$\begin{array}{rcl}
G(\lambda,\alpha) & = & \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\lambda\alpha(w_k)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda(w_k)^\alpha}\right) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(\lambda) + \ln(\alpha) + (\alpha-1)\ln(w_k) + \ln(\mathrm{e}^{-\lambda(w_k)^\alpha})\right) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\lambda) + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\alpha) + (\alpha-1)\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha \\
& = & n\ln(\lambda) + n\ln(\alpha) + (\alpha-1)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)\Big) - \lambda\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha\Big)
\end{array}$$

- Montrons que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.
La fonction $h : (\lambda, \alpha) \mapsto \ln(\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ car elle est la composée $h = \psi \circ g$ de :
  × $g : (\lambda, \alpha) \mapsto \lambda$ qui est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $g(]0, +\infty[^2) \subset \,]0, +\infty[$,

  × $\psi : u \mapsto \ln(u)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

  De même, la fonction $(\lambda, \alpha) \mapsto \ln(\alpha)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.
  De plus, la fonction $(\lambda, \alpha) \mapsto (\alpha-1)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)\Big) - \lambda\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que fonction polynomiale.

  $$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[^2 \text{ en tant que combinaison linéaire de fonction de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[^2}$$

- Soit $(\lambda, \alpha) \in \,]0, +\infty[^2$.

$$\partial_1(G)(\lambda,\alpha) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha$$

$$\partial_2(G)(\lambda,\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha$$

- Soit $(\lambda, \alpha) \in]0, +\infty[^2$.

$$\begin{aligned}
& (\lambda, \alpha) \text{ est un point critique de } G \\
\Leftrightarrow \quad & \nabla(G)(\lambda, \alpha) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(G)(\lambda, \alpha) & = & 0 \\ \partial_2(G)(\lambda, \alpha) & = & 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n}{\lambda} - \sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha \ = \ 0 \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha \ = \ 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} \lambda \ = \ \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha \ = \ 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} \lambda \ = \ \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - n \, \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} \ = \ 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) - n \, \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} \ = \ 0 \\
\Leftrightarrow \quad & n \, \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} - \frac{n}{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***9.f***, $\hat{\alpha}$ est l'unique solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $\varphi(\alpha) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$.
Ainsi :

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \hat{\alpha}$$

On obtient donc :

$$\nabla(G)(\lambda, \alpha) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda & = & \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha}} \\ \alpha & = & \hat{\alpha} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda & = & \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}} = \hat{\lambda} \\ \alpha & = & \hat{\alpha} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } G \text{ admet un unique point critique } (\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) \text{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2}$$

Commentaire

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(G)(\lambda, \alpha) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on fait apparaître une équation du type :
  $$\lambda = \psi(\alpha)$$
  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
  C'est la stratégie qu'on a adoptée ci-dessus.

□

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda, \alpha) \in \,]0, +\infty[^2$.
  $$\partial^2_{1,1}(G)(\lambda, \alpha) = -\frac{n}{\lambda^2}$$
  $$\partial^2_{1,2}(G)(\lambda, \alpha) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}$$
  Comme la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$, par théorème de Schwarz :
  $$\partial^2_{2,1}(G)(\lambda, \alpha) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}$$
  Enfin :
  $$\partial^2_{2,2}(G)(\lambda, \alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\alpha}$$
- On en déduit :
  $$\partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) = -\frac{n}{\hat{\lambda}^2} = -\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\right)^2}{n}$$
  Et :
  $$H = \nabla^2(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) & \partial^2_{1,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) \\ \partial^2_{1,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) & \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) \end{pmatrix}$$

- Soit $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \det(H - \mu\, I_2) \\
= \ & \det\left(\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) - \mu & \partial^2_{1,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) \\ \partial^2_{1,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) & \partial^2_{2,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) - \mu \end{pmatrix}\right) \\
= \ & \Big(\partial^2_{1,1}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) - \mu\Big) \Big(\partial^2_{2,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) - \mu\Big) - \Big(\partial^2_{1,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha)\Big)^2 \\
= \ & \mu^2 - \Big(\partial^2_{1,1}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) + \partial^2_{2,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha)\Big)\, \mu + \partial^2_{1,1}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha)\ \partial^2_{2,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) - \Big(\partial^2_{1,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha)\Big)^2
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mu \text{ est valeur propre de } H & \Leftrightarrow H - \mu\ I_2 \text{ non inversible} \\
& \Leftrightarrow \det(H - \mu\ I_2) = 0 \\
& \Leftrightarrow \mu \text{ est racine de } Q
\end{aligned}$$

où Q est le polynôme de degré 2 défini par :

$$Q(X) \ = \ X^2 - \Big(\partial^2_{1,1}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) + \partial^2_{2,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha)\Big)\, X + \partial^2_{1,1}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha)\ \partial^2_{2,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha) - \Big(\partial^2_{1,2}(G)(\hat\lambda, \hat\alpha)\Big)^2$$

Commentaire

À ce stade de l'étude de la nature d'un point critique, le calcul de $\det(H - \mu\ I_2)$ nous fournit toujours un polynôme de degré 2 en μ. Notons le Q. Deux cas se présentent alors :

× l'expression de Q est « simple » (c'est par exemple le cas lorsque les coefficients de Q sont numériques). Dans ce cas :

1) on détermine explicitement les racines de Q par factorisation ou calcul de discriminant.

2) les racines de Q sont les valeurs propres de H d'après les équivalences ci-dessus.

3) on en déduit le signe des valeurs propres de H et ainsi la nature du point critique étudié.

× l'expression de Q est « compliquée » (c'est par exemple le cas lorsque l'expression de Q dépend de plusieurs paramètres, comme ici). Dans ce cas, **on ne cherchera pas** à déterminer les racines de Q explicitement. On procèdera de la manière suivante :

1) on justifie l'existence de valeurs propres μ_1 et μ_2 de H (la matrice H est symétrique).

2) les valeurs propres de H sont racines de Q d'après les équivalences ci-dessus. On en déduit la factorisation de Q suivante : $Q(X) = (X - \mu_1)\,(X - \mu_2)$

3) on identifie les coefficients des deux expressions de Q pour en déduire des relations sur μ_1 et μ_2 (elles sont appelées *relations coefficients / racines*).

4) on détermine le signe de μ_1 et μ_2 (valeurs propres de H) grâce à ces relations, et on obtient ainsi la nature du point critique étudié.

- La matrice H est une matrice symétrique (réelle). Elle est donc diagonalisable. On note μ_1 et μ_2 ses valeurs propres **éventuellement égales**.
- D'après les équivalences précédentes, on en déduit que μ_1 et μ_2 sont racines de Q. Ainsi :

$$\begin{aligned} Q(X) &= (X-\mu_1)\,(X-\mu_2) \\ &= X^2 - (\mu_1+\mu_2)\,X + \mu_1\,\mu_2 \end{aligned}$$

D'où, par définition de Q :

$$\begin{array}{rcccc} & X^2 & - & \Big(\partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) + \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})\Big)\,X & + & \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})\ \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) - \Big(\partial^2_{1,2}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})\Big)^2 \\ = & X^2 & - & (\mu_1+\mu_2)\,X & + & \mu_1\,\mu_2 \end{array}$$

Par identification des coefficients de ces polynômes de degré 2, on en déduit le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mu_1+\mu_2 &=& \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) + \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) & (*) \\[2mm] \mu_1\,\mu_2 &=& \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})\ \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) - \Big(\partial^2_{1,2}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})\Big)^2 & (**) \end{array} \right.$$

× Déterminons le signe de $\mu_1\,\mu_2$.
D'après l'équation $(**)$:

$$\begin{aligned} & \mu_1\,\mu_2 \\ =\ & \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})\ \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) - \Big(\partial^2_{1,2}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})\Big)^2 \\ =\ & \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2}{n} \left(\frac{n}{\hat{\alpha}^2} + \frac{n}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2} \sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}} \right) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2 \\ =\ & \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}}\right)^2 + \Big(\sum_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2 \end{aligned}$$

On applique la question ***8.a)***, exactement comme dans la question ***8.b)***, avec :

$$\forall k \in [\![1,N]\!], \left\{ \begin{array}{rcl} y_k &=& \ln(w_k)(w_k)^{\frac{\hat{\alpha}}{2}} \\ z_k &=& (w_k)^{\frac{\hat{\alpha}}{2}} \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)$$

De plus :

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}}\right)^2 > 0$$

On obtient : $\mu_1\,\mu_2 > 0$.
On en déduit que μ_1 et μ_2 sont non nulles et de même signe. Le point $(\hat{\lambda},\hat{\alpha})$ est donc un extremum local de G sur $]0,+\infty[^2$.

× Déterminons le signe de $\mu_1 + \mu_2$.
D'après l'équation $(*)$:

$$\begin{array}{rcl} \mu_1 + \mu_2 & = & \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) + \partial^2_{2,2}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) \\ & = & -\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}} \right)^2}{n} - \dfrac{n}{\hat{\alpha}^2} - \hat{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} \big(\ln(w_k)\big)^2 (w_k)^{\hat{\alpha}} \end{array}$$

On en déduit : $\mu_1 + \mu_2 < 0$.
Or μ_1 et μ_2 sont de même signe. D'où : $\mu_1 < 0$ et $\mu_2 < 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } G \text{ admet un maximum local en } (\hat{\lambda}, \hat{\alpha}).}$$

□