

DS7 (version A)

Exercice 1

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de \mathbb{N} , on pose : $u_k = \frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans \mathbb{N} et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = u_k$$

2. a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y , puis en déduire l'espérance et la variance de X .

b) On rappelle que `grand(1, 1, 'geom', p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire géométrique de paramètre p . Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X :

```

1  fonction x = SimuX(theta)
2      y = .....
3      x = .....
4  endfunction
    
```

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit \mathcal{L} , de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} , définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k = x_k])$$

où x_1, x_2, \dots, x_n désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.

L'objectif est de choisir la valeur de θ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln(\mathcal{L}(\theta))$ en fonction de θ et de $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$.

b) On considère la fonction φ définie par :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[, \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1 + \theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\hat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de S_n . Que représente $\hat{\theta}_n$ pour la fonction \mathcal{L} ?

On pose dorénavant : $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ .

c) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ .

d) Calculer le risque quadratique $r_\theta(T_n)$ de T_n et vérifier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_\theta(T_n) = 0$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E .

On note i l'application identité de E , et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{cases}$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

b) En déduire que 0 est valeur propre de f , puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que :
 $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que :
 $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

6. a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E .

b) Déterminer la matrice C de f dans la base \mathcal{B} .

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel \mathcal{F} de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C) , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de \mathcal{F} .

8. Montrer : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM = MC\} = \mathcal{F}$

9. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.

b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

10. On note $g = f^2 - i$.

Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i .

Exercice 3

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

On considère l'application g définie par :

$$g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + \ln(x)$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

3. Montrer : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie A

On note $I = [\frac{1}{2}, 1]$ et on considère l'application f définie par :

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x)$$

4. a) Montrer que f est strictement croissante sur I .

b) Montrer : $\frac{1}{2} < f(\frac{1}{2}) < f(1) < 1$.

c) En déduire : $\forall x \in I, f(x) \in I$.

5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de \mathbb{N} , renvoie la valeur de u_n .

b) Calculer u_1 .

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

e) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α .

Partie B

On considère l'application F définie par :

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x e^y + y \ln(x)$$

6. a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

b) Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α .

7. a) Déterminer la matrice hessienne de F en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

b) La fonction F admet-elle un extremum local ?

Problème

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

On admet le résultat (R) suivant.

Soient U et V deux variables aléatoires à densité définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_U et f_V . On suppose que les variables aléatoires U et V sont :

- × indépendantes,
- × telles que f_U et f_V soient bornées.

Alors la variable aléatoire $U + V$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $U + V$ est donnée par la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x - t) dt$$

1. Dans la suite, on considère un réel a strictement positif.

a) On note $V = -a X_0$. Démontrer que V admet pour fonction de répartition :

$$F_V : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{\lambda}{a} x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) Démontrer que V est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité f_V .

c) On note $U = X_1$. Montrer que la variable $X_1 - a X_0$ est une variable à densité dont une densité f_a est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \int_0^{+\infty} f_U(t) f_V(x - t) dt$$

d) Soit W une variable aléatoire telle que $W \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda \frac{a+1}{a})$.

(i) Démontrer : $\forall x < 0, f_a(x) = \frac{\lambda}{a+1} e^{\frac{\lambda}{a} x} \mathbb{E}(W^0)$.

(ii) Démontrer : $\forall x \geq 0, f_a(x) = \frac{\lambda}{a+1} e^{\frac{\lambda}{a} x} \mathbb{P}([W > x])$.

(iii) En conclure que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - a X_0$, la fonction f_a définie par :

$$f_a : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda}{a+1} e^{\lambda \frac{x}{a}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lambda}{a+1} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

e) On pose $T = \frac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T .

2. On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T . On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\lfloor X = n \rfloor) = \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n .

c)(i) Déduire de ce qui précède que la variable aléatoire $Y_n - X_0$ est une variable à densité dont une densité h_n vérifie :

$$\forall x < 0, h_n(x) = \lambda e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} g_n(t) dt$$

(ii) Montrer alors : $\forall x < 0, h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda e^{\lambda x}$.

On pourra procéder par intégration par parties.

4. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $[Z > n] \cup [Z = 0] = [Y_n \leq X_0]$.

b) Montrer : $[Z = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leq X_0]$, puis établir : $\mathbb{P}([Z = 0]) = 0$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z = n]) = \mathbb{P}([Z > n-1]) - \mathbb{P}([Z > n])$.

d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $[X = n]$ et $[Z = n]$ ont même probabilité.

5. Informatique.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

On pose $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U , puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V .

b) Écrire une fonction **Scilab** dont l'en-tête est `function z = simuZ()` qui simule la variable aléatoire Z .