DS7 (version A)

Exercice 1 /27

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

- **1 pt : comme $\theta > 0$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k \geqslant 0$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k\geqslant 0}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$ série géométrique de raison $\dfrac{\theta}{1+\theta} \in \,]-1,1[$, donc convergente. Ainsi $\sum u_n$ convergente.**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = 1$**

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\,[X=k]\,\big) = u_k$$

2. *a)* On pose $Y = X+1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

- **2 pts : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$**
  - × **1 pt : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$**
  - × **1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y=k]) = \dfrac{1}{1+\theta}\left(1-\dfrac{1}{1+\theta}\right)^k$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(Y) = 1+\theta$ et $\mathbb{V}(Y) = \theta\,(1+\theta)$**
- **1 pt : X admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée affine de Y qui en admet une**
- **1 pt : par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(X) = \theta$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X) = \theta\,(1+\theta)$**

b) On rappelle que `grand(1, 1, 'geom', p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X :

```
function x = SimuX(theta)
    y = ................
    x = ................
endfunction
```

- **2 pts : un pt par ligne**

```
    y = grand(1, 1, 'geom', 1 / (theta + 1))
    x = y - 1
```

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_k = x_k]\,\big)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de θ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln(\mathcal{L}(\theta))$ en fonction de θ et de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

- **1 pt :** $\ln\big(\mathcal{L}(\theta)\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\Big(\mathbb{P}(\,[X_k = x_k]\,)\Big)$
- **1 pt :** $\ln\big(\mathcal{L}(\theta)\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(-\ln(1+\theta) + x_k\,\big(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)\big)\Big)$
- **1 pt :** $\ln\big(\mathcal{L}(\theta)\big) = S_n\,\ln(\theta) - (S_n + n)\,\ln(1+\theta)$

b) On considère la fonction φ définie par :

$$\forall \theta \in \,]0, +\infty[,\ \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$?

- **1 pt : φ dérivable sur** $]0, +\infty[$ **et** $\varphi' : \theta \mapsto \dfrac{S_n - n\,\theta}{\theta\,(1+\theta)}$
- **1 pt : signe de $\varphi'(\theta)$ et variations de φ**

θ	0		$\hat{\theta}_n$		$+\infty$
Signe de $\varphi'(\theta)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\hat{\theta}_n)$	$\searrow$	$-\infty$

- **1 pt : φ admet un unique maximum en $\widehat{\theta}_n = \dfrac{S_n}{n}$**
- **1 pt : par stricte croissance de** exp **sur $\mathbb{R}$, $\widehat{\theta}_n$ est l'unique maximum de $\mathcal{L}$ sur** $]0, +\infty[$

On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

c) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

- **1 pt : T_n est un estimateur**
- **1 pt : T_n admet une espérance**
- **2 pts :** $\mathbb{E}_\theta(T_n) = \theta$
  - × **1 pt : linéarité de l'espérance**
  - × **1 pt : d'après *2.a)*** $\mathbb{E}(X_i) = \theta$

d) Calculer le risque quadratique $r_\theta(T_n)$ de T_n et vérifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$.

- **1 pt : T_n admet une variance**
- **1 pt : par décomposition biais / variance, $r_\theta(T_n) = \mathbb{V}_\theta(T_n) + \big(b_\theta(T_n)\big)^2$**
- **1 pt : $r_\theta(T_n) = \mathbb{V}_\theta(T_n)$ car T_n est un estimateur sans biais de θ**
- **1 pt : indépendance de X_1, ..., X_n**
- **1 pt : $r_\theta(T_n) = \dfrac{\theta\,(1+\theta)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$**

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{array} \right.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : $f \circ (f^2+i) = \theta \Rightarrow f^2 + i = \theta$ (en composant à gauche par f^{-1}**
- **1 pt : Absurde d'après l'énoncé**

b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

- **1 pt : f non bijectif donc non injectif, car E de dimension finie. Donc 0 VP de f**
- **1 pt : 0 VP de f donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$. D'où il existe $u \in E$ tel que $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$**

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

- **1 pt : comme $f \circ (f^2+i) = \theta$, alors $Q(X) = X\,(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de f**
- **1 pt : 0 est la seule racine de Q, donc $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$**
- **1 pt : d'après *1.b)* $0 \in \mathrm{Sp}(f)$**

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : introduction de la base $\mathscr{B}'$ de vecteurs propres de f**
- **1 pt : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ car $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$**
- **1 pt : $f = \theta$ par bijectivité de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\cdot)$**

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

- **1 pt : démonstration par l'absurde de $f^2 + i$ non bijectif**
- **1 pt :** $f^2 + i$ **non bijectif donc** $\text{Ker}(f^2 + i) \neq \{0_E\}$
- **1 pt :** $v \in \text{Ker}(f^2 + i) \;\Leftrightarrow\; f^2(v) = -v$

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

- **1 pt**

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

- **5 pts : $\mathscr{B}$ est libre**
  - × **1 pt : structure de la démonstration**
  - × **1 pt : composition par f + utilisation de la linéarité de f pour obtenir** $\lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2) + \lambda_3 \cdot f(v_3) = 0_E$
  - × **1 pt : par définition de v_1, v_2 et v_3, on obtient** $\lambda_2 \cdot v_3 + \lambda_3 \cdot v_2 = 0_E$ (L_1)
  - × **1 pt : en composant une nouvelle fois et toujours avec les définitions de v_1, v_2, v_3, on obtient** $-\lambda_2 \cdot v_2 - \lambda_3 \cdot v_3 = 0_E$ (L_2)
  - × **1 pt : on conclut en effectuant la combinaison linéaire** $\lambda_3 \, L_1 + \lambda_2 \, L_2$
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(E)$

b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $f(v_1) = 0_E$ **donc** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**.**
- **1 pt :** $f(v_2) = v_3$ **donc** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**
- **1 pt :** $f(v_3) = -v_2$ **donc** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$**.**
- **0 pt :** $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{a\,A + b\,B + c\,C \;/\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

- **2 pts :** (A, B, C) **famille libre de** $\mathcal{F}$
- **1 pt :** (A, B, C) **génératrice de** $\mathcal{F}$ **(par définition de** $\mathcal{F}$**)**

8. Montrer : $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ CM = MC\} = \mathcal{F}$.

- **1 pt :** $CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $MC = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,3} & -a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & -a_{2,2} \\ 0 & a_{3,3} & -a_{3,2} \end{pmatrix}$
- **1 pt : écriture du système**
- **1 pt : résolution (**$CM = MC \ \Leftrightarrow \ M = a_{1,1} \cdot A + a_{2,2} \cdot B + a_{3,3} \cdot C \ \Leftrightarrow \ M \in \mathcal{F}$

9. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(a\,A + b\,B + c\,C)^2$.

- **1 pt :** $(a\,A + b\,B + c\,C)^2 = a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C$

b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : on cherche** $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ **tel que** $4\,A + 5\,B + 12\,C \ = \ a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C$
- **1 pt : écriture système** $\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 4 \\ b^2 - c^2 & = & 5 \\ 2bc & = & 12 \end{array} \right.$
- **1 pt :** $bc = 6$ **donc** $b \neq 0$
- **1 pt : par substitution de** c **par** $\dfrac{6}{b}$**, on obtient :** $b^2 = 9$**, puis** $c^2 = 4$
- **1 pt le triplet** $(a, b, c) = (2, 3, 2)$ **convient, donc** $M = 2\,A + 3\,B + 2\,C$ **vérifie** $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

10. On note $g = f^2 - i$.
Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ **est une matrice diagonale à cœfficients tous non nuls. Elle est donc inversible. On en déduit que l'endomorphisme** g **est bijectif**
- **1 pt :** $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g^{-1}) = -I_3 - \dfrac{1}{2}\ C^2$
- **1 pt :** $g^{-1} = -i - \dfrac{1}{2}\ f^2$

Exercice 3 /49

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.
On considère l'application g définie par :

$$g \ : \ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+\ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

- **1 pt : g dérivable donc continue sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2\,x^2+1}{x} > 0$. D'où g strictement croissante sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$**

2. Montrer que l'équation $g\,(x) = 0$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

- **1 pt : hypothèses du théorème de la bijection**
- **1 pt : $g\big(]0,+\infty[\big) = \,]-\infty,+\infty[$**
- **1 pt : $0 \in \,]-\infty,+\infty[$**

3. Montrer : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

- **1 pt : $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \ln(2) < 0$ (car $\ln(2) > 0.69$)**
- **1 pt : $g(1) = 1 > 0$**
- **1 pt : composition par g^{-1} strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$**

Partie A

On note $I = \left[\,\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \dfrac{1}{4}\,x^2 - \dfrac{1}{4}\,\ln(x) \end{array}$$

4. a) Montrer que f est strictement croissante sur I.

- **1 pt : f dérivable sur I et $f' : x \mapsto -\dfrac{2\,x^2-4\,x+1}{4\,x}$**
- **1 pt : $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ racines du polynôme $P(X) = 2\,X^2 - 4\,X + 1$**
- **1 pt : $x_1 < \dfrac{1}{2}$**
- **1 pt : $x_2 > 1$**
- **1 pt : $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ donc f strictement croissante sur I**

b) Montrer : $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.

- **1 pt : par stricte croissance de f sur I, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(1)$**
- **1 pt : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4}\ \ln(2) > \dfrac{1}{2}$**
- **1 pt : $f(1) = \dfrac{3}{4} < 1$**

c) En déduire : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.

- **1 pt : par stricte croissance de f sur I, $\forall x \in I$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$**
- **1 pt : conclusion en utilisant la qst précédente**

5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : structure itérative**

```
function u = suite(n)
    u = 1
    for k = 1:n
        u = f(u)
    end
endfunction
```

b) Calculer u_1.

- **1 pt : $u_1 = \dfrac{3}{4}$**

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**
  0 si la bonne définition n'est pas démontrée

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité (par croissance de f sur I d'après *4.a)*)**

e) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α.

- **1 pt : (u_n) décroissante (*5.d)*) et minorée par $\dfrac{1}{2}$ (*5.c)*)**
- **1 pt : par continuité de f en ℓ, $\ell = f(\ell)$**
- **1 pt : $\ell = f(\ell) \ \Leftrightarrow\ g(\ell) = 0 \ \Leftrightarrow\ \ell = \alpha$**

Partie B

On considère l'application F définie par :

$$F \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\, x \,,\, y \,) & \mapsto & x\,\mathrm{e}^y + y\,\ln(x) \end{array}$$

6. a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- **2 pts : F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (dont une composition)**
- **1 pt : $\partial_1(F) : (x,y) \mapsto \mathbf{e}^y + \dfrac{y}{x}$ et $\partial_2(F) : (x,y) \mapsto x\,\mathbf{e}^y + \ln(x)$**

b) Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α.

- **1 pt : (x,y) point critique de F si et seulement si $\nabla(F)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$**
- **1 pt : écriture système $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}^y + \dfrac{y}{x} = 0 \\ x\,\mathbf{e}^y + \ln(x) = 0 \end{array}\right.$**
- **1 pt : $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\,\mathbf{e}^y = -y \\ -y + \ln(x) = 0 \end{array}\right.$**
- **1 pt : $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) = 0 \\ y = \ln(x) \end{array}\right.$**
- **1 pt : $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \ln(\alpha) \end{array}\right.$ d'après *2.***

7. a) Déterminer la matrice hessienne de F en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- **2 pts : $\nabla^2(F)(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \mathbf{e}^y + \dfrac{1}{x} \\ \mathbf{e}^y + \dfrac{1}{x} & x\,\mathbf{e}^y \end{pmatrix}$**

b) La fonction F admet-elle un extremum local ?

- **1 pt : $\big(\alpha, \ln(\alpha)\big)$ est le seul extremum local possible de F**
- **1 pt : $\det(H - \lambda\, I_2) = \lambda^2 + \left(\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2\right)\lambda - \left(2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)$ car, par définition de α : $\alpha^2 + \ln(\alpha) = 0$**
- **1 pt : λ VP de H ssi λ racine de Q avec $Q(X) = X^2 + \left(\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2\right) X - \left(2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)$**
- **1 pt : H symétrique (réelle) donc diagonalisable.**
- **1 pt : par identification $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2 \\ \lambda_1\,\lambda_2 & = & -\left(2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) \quad (*) \end{array}\right.$**
- **1 pt : $\lambda_1\,\lambda_2 < 0$. Les valeurs propres de H sont donc non nulles et de signe opposé. Le point $\big(\alpha, \ln(\alpha)\big)$ n'est donc pas un extremum de F**

Problème

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

On admet le résultat `(R)` suivant.

> Soient U et V deux variables aléatoires à densité définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_U et f_V. On suppose que les variables aléatoires U et V sont :
>
> × indépendantes,
>
> × telles que f_U et f_V soient bornées.
>
> Alors la variable aléatoire $U+V$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $U+V$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
>
> $$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\; dt$$

1. Dans la suite, on considère un réel a strictement positif.

a) On note $V = -a\, X_0$. Démontrer que V admet pour fonction de répartition :

$$F_V : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\,x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **1 pt :** $V(\Omega) = \big(-a\,X_0\big)(\Omega) = \,]-\infty, 0]$
- **2 pts : cas** $x \leqslant 0$
  - × **1 pt : fonction de répartition de l'exponentielle (** $F_{X_0}\left(-\dfrac{x}{a}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \frac{-x}{a}}$ **)**
  - × **1 pt : résultat** $F_V(x) = \mathrm{e}^{\lambda\,\frac{x}{a}}$
- **1 pt : cas** $x > 0$**. Comme** $[Y \leqslant x] = \Omega$**,** $F_V(x) = \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = 1$

  Si $V(\Omega)$ **non déterminé, on accorde quand même le point si le découpage est correct.**

b) Démontrer que V est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité f_V.

- **1 pt : continuité sur** $]-\infty, 0[$ **en tant que composée de fonctions continues sur des intervalles adéquats et sur** $]0, +\infty[$ **en tant que fonction constante.**
- **1 pt : continuité en** 0
- **1 pt :** F_V **est** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, +\infty[$**, par des arguments similaires à la continuité**
- **1 pt : résultat (tout ou rien)**
  - × **cas** $]-\infty, 0[$**,** $f_V(x) \;=\; F_V'(x) \;=\; \dfrac{\lambda}{a}\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\,x}$
  - × **cas** $]-\infty, 0[$**,** $f_V(x) \;=\; F_V'(x) \;=\; 0$
- **1 pt : manière de procéder (dérivation sur les ouverts et on pose** $f_V(0) = 0$**)**

c) On note $U = X_1$. Montrer que la variable $X_1 - a\,X_0$ est une variable à densité dont une densité f_a est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \int_0^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt$$

- **1 pt :** $(U+V)(\Omega) \subset \mathbb{R}$ **car** $U(\Omega) = \,]-\infty, 0]$ **et** $V(\Omega) = X_1(\Omega) = [0, +\infty[$
- **4 pts :**
  - × **1 pt :** $U = X_1$ **et** V **sont à densité**
  - × **1 pt :** $U = X_1$ **et** $V = -aX_0$ **indépendantes par le lemme des coalitions**
  - × **2 pts :** f_U **et** f_V **sont bornées**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} \ldots$ **car** f_U **est nulle en dehors de** $[0, +\infty[$**.**

Valoriser la démarche scientifique (tout élève qui comprend qu'il doit vérifier `TOUTES` **les hypothèses d'un théorème pour l'utiliser)**

d) Soit W une variable aléatoire telle que $W \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\lambda\ \frac{a+1}{a}\right)$.

(i) Démontrer : $\forall x < 0,\ f_a(x) = \dfrac{\lambda}{a+1}\ e^{\frac{\lambda}{a}\,x}\ \mathbb{E}(W^0)$.

- **0 pt :** $\forall x < 0,\ \forall t \geqslant 0,\ f_V(x-t) = \dfrac{\lambda}{a}\ \mathbf{e}^{\frac{\lambda}{a}\,(x-t)}$
- **1 pt : donc** $f_a(x) = \dfrac{\lambda^2}{a}\ \mathbf{e}^{\frac{\lambda}{a}\,x}\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\lambda t}\ \mathbf{e}^{-\frac{\lambda}{a}\,t}\ dt$
- **1 pt :** $f_a(x) = \dfrac{\lambda^{\cancel{2}}}{\cancel{a}}\ \mathbf{e}^{\frac{\lambda}{a}\,x}\ \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{\lambda}\ (a+1)}\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda\frac{a+1}{a}\ \mathbf{e}^{-\lambda\frac{a+1}{a}\,t}\ dt$
- **0 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda\frac{a+1}{a}\ \mathbf{e}^{-\lambda\frac{a+1}{a}\,t}\ dt = \mathbb{E}(W^0)$

(ii) Démontrer : $\forall x \geqslant 0,\ f_a(x) = \dfrac{\lambda}{a+1}\ e^{\frac{\lambda}{a}\,x}\ \mathbb{P}\big(\,[W > x]\,\big)$.

- **1 pt :** $f_U(t)\ f_V(x-t) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ t > x$ **et/ou** $f_a(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \ldots$
- **1 pt :** $f_a(x) = \dfrac{\lambda^2}{a}\ \mathbf{e}^{\frac{\lambda}{a}\,x}\ \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-\lambda\frac{a+1}{a}\,t}\ dt$
- **1 pt :** $f_a(x) = \dfrac{\lambda}{a+1}\ \mathbf{e}^{\frac{\lambda}{a}\,x}\ \displaystyle\int_x^{+\infty} f_W(t)\ dt$

(iii) En conclure que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - a\,X_0$, la fonction f_a définie par :

$$f_a : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{a+1}\ e^{\lambda\,\frac{x}{a}} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{\lambda}{a+1}\ e^{-\lambda\,x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- **1 pt : cas** $x < 0$**,** $f_a(x) = \dfrac{\lambda}{a+1}\ \mathbf{e}^{\lambda\,\frac{x}{a}}\ \mathbb{E}\big(W^0\big) = \dfrac{\lambda}{a+1}\ \mathbf{e}^{\lambda\,\frac{x}{a}}$ **car** $\mathbb{E}\big(W^0\big) = 1$
- **1 pt : cas** $x \geqslant 0$**,** $\mathbb{P}\big(\,[W > x]\,\big)\mathbf{e}^{-\lambda\frac{a+1}{a}\,x}$

e) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

- **1 pt :** $T(\Omega) = \left(\dfrac{X_1}{X_0}\right)(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$ **car** $X_0(\Omega) = X_1(\Omega) =\ ]0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \leqslant 0$**,** $F_T(x) = 0$
- **3 pts : si** $x > 0$
  - $\times$ **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[\frac{X_1}{X_0} \leqslant x\right]\right) = \mathbb{P}\big(\,[X_1 - x\, X_0 \leqslant 0]\,\big)$ **car X est à valeurs strictement positives**
  - $\times$ **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[X_1 - x\, X_0 \leqslant 0]\,\big) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_x(t)\ dt$
  - $\times$ **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_x(t)\ dt = \frac{\lambda}{x+1} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}\, t}\ dt = \frac{\lambda}{x+1}\ \frac{x}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{x}\ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{x}\, u}\ du$ **(chgmt var)**

2. On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\,[X = n]\,\big) = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$.

- **1 pt :** $T(\Omega) =\ ]0, +\infty[$ **alors** $\big(\lfloor T \rfloor\big)(\Omega) = \mathbb{N}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[X = n]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[\ \lfloor T \rfloor + 1 = n]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[\ \lfloor T \rfloor = n-1]\,\big) = \mathbb{P}([n-1 \leqslant T < n])$
- **1 pt :** $= F_T(n) - F_T(n-1)$ **car T est une v.a.r. à densité**
- **1 pt :** $= \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

- **1 pt :** $f_{-X_0} : x \mapsto \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} & \textbf{si } x < 0 \\ 0 & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ **d'après la question *1.b)* appliquée pour** $a = 1$

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

- **1 pt :** $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$ **car** $\forall i \in [\![1, n]\!]$**,** $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \in\ ]-\infty, 0[$**,** $F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}\big(\,[Y_n \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- **2 pts : si** $x \geqslant 0$
  - $\times$ $\mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x])$ **par indépendance**
  - $\times$ **1 pt :** $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) = \big(\mathbb{P}\big(\,[X_1 \leqslant x]\,\big)\big)^n = \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\big)^n$
- **1 pt : continuité de F_{Y_n} sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante et continuité de F_{Y_n} que composée de fonctions continues sur des intervalles adéquats**
- **1 pt : continuité en** 0
- **0 pt :** F_{Y_n} **est** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, +\infty[$**, par des arguments similaires à la continuité**
- **2 pts : si** $x \in\ ]-\infty, 0[$**,** $f_{Y_n}(x) = 0$ **et si** $x \in\ ]0, +\infty[$**,** $f_{Y_n}(x) = n\ \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\big)^{n-1}\ (\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x})$ **(au max 1/2 si la dérivation n'a pas lieu sur les intervalles ouverts)**

c)(i) Déduire de ce qui précède que la variable aléatoire $Y_n - X_0$ est une variable à densité dont une densité h_n vérifie :

$$\forall x < 0,\ h_n(x) = \lambda\, e^{\lambda\, x} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, t}\ g_n(t)\ dt$$

- **0 pt :** $(Y_n - X_0)(\Omega) \subset \mathbb{R}$
- **3 pts : vérification des hypothèses sur Y_n et $-X_0$**
  - × **0 pt : Y_n et $-X_0$ sont à densité (le dire)**
  - × **1 pt : Y_n et $-X_0$ sont indépendantes par le lemme des coalitions**
  - × **2 pts : $f_{Y_n} = g_n$ et f_{-X_0} sont bornées**
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = f_{Y_n - X_0}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, f_{-X_0}(x-t)\ dt = \int_0^{+\infty} \ldots\ dt$ **car g_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.**
- **1 pt : comme $x < 0$, alors pour tout $t \geqslant 0$, $x - t < 0$ donc $f_{-X_0}(x-t) = \lambda e^{\lambda\,(x-t)}$**

(ii) Montrer alors : $\forall x < 0,\ h_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\, \lambda\, e^{\lambda\, x}$.
On pourra procéder par intégration par parties.

- **1 pt : $t \mapsto e^{-\lambda\, t}\ g_n(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre seulement en $+\infty$ et IPP sur le segment $[0, B]$**
- **1 pt :** $\int_0^B e^{-\lambda\, t}\ g_n(t) = \int_0^B e^{-\lambda\, t}\ g_n(t) \Big[\ e^{-\lambda\, t}\ G_n(t)\ \Big]_0^B - \int_0^B \big(-\lambda\, e^{-\lambda\, t}\big)\ G_n(t)\ dt$
- **1 pt :** $\int_0^B (n+1)\,\big(\lambda\, e^{-\lambda\, t}\big)\ \Big(1 - e^{-\lambda\, t}\Big)^n\ dt = \Big[\ \Big(1 - e^{-\lambda\, t}\Big)^n\ \Big]_0^B = \Big(1 - e^{-\lambda\, B}\Big)^n$
- **1 pt :** $e^{-\lambda\, B}\ G_n(B) = e^{-\lambda\, B}\ \big(1 - e^{-\lambda\, B}\big)^n \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \times 1^n = 0$ **et** $\big(1 - e^{-\lambda\, B}\big)^n \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1^n = 1$

4. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $[Z > n] \cup [Z = 0] = [Y_n \leqslant X_0]$.

- **1 pt :** `BONUS` **raisonnement avec les ω (toute tentative)**
- **3 pts : suivant la qualité des explications, pêle-mêle :**
  - × **réunion d'événements réalisée si l'un ou l'autre des événements réalisés**
  - × **$[Z > n]$ réalisé ssi le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_k(\omega) > X_0(\omega)$ est strictement plus grand que n**
  - × **et donc s'il n'existe pas d'entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $X_k(\omega) > X_0(\omega)$**
  - × **et donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k(\omega) \leqslant X_0(\omega)$**

b) Montrer : $[Z = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leqslant X_0]$, puis établir : $\mathbb{P}\big(\,[Z = 0]\,\big) = 0$.

- **1 pt :** $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [Y_k\ \leqslant\ X_0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} \Big(\,[Z > k] \cup [Z = 0]\,\Big) = [Z = 0]\ \cup\ \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [Z > k]\Big)$
- **1 pt :** $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [Z > k] = \varnothing\ \Leftrightarrow\ \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] = \Omega$

- **2 pts :** $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] \supset \Omega$
  - $\times$ **1 pt :** $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [Z = k] = \Omega$ **car la famille** $\big([Z = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ **est un sce**
  - $\times$ **1 pt :** $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] \supset [Z = 0] \ \cup \ \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [Z = k]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Z = 0]\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leqslant X_0]\right) = \lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{N} [Y_k \leqslant X_0]\right)$ **(limite monotone)**
- **1 pt :** $\big([Y_k \leqslant X_0]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ **est une suite décroissante d'événements (même si démo faible)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Y_N \leqslant X_0]\big) = \mathbb{P}\big([Y_N - X_0 \leqslant 0]\big) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} h_N(t) \ dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{N+1} \ \lambda \ \mathrm{e}^{\lambda t} \ dt$
- **1 pt :** $= \dfrac{1}{N+1} \displaystyle\int_{+\infty}^{0} \lambda \ \mathrm{e}^{\lambda (-u)} (- \ du) = \frac{1}{N+1} \int_{0}^{+\infty} f_{X_0}(u) \ du = \frac{1}{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_0}(u) \ du$
  (en posant le changement de variable $\boxed{u = -t}$**)**
- **0 pt :** $= \dfrac{1}{N+1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \mathbb{P}\big([Z > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > n]\big)$.

- **1 pt :** $[Z > n-1] = [Z \geqslant n] = [Z = n] \cup [Z > n]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Z > n-1]\big) = \mathbb{P}\big([Z = n]\big) + \mathbb{P}\big([Z > n]\big)$ **par incompatibilité**

d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $[X = n]$ et $[Z = n]$ ont même probabilité.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \mathbb{P}\big([Z > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > n]\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Z > n]\big) = \mathbb{P}\big([Z > n]\big) + \mathbb{P}\big([Z = 0]\big) = \mathbb{P}\big([Z > n] \cup [Z = 0]\big) = \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant X_0]\big)$
- **0 pt :** $= \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant X_0]\big) = \dfrac{1}{n+1}$ **si** $n \geqslant 1$ **!**
- **3 pts :** $\mathbb{P}\big([Z = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X = 1]\big)$
  - $\times$ **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z = k]\big) = 1$ **car la famille** $\big([Z = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ **est un sce**
  - $\times$ **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Z = 1]\big) = 1 - \left(\cancel{\mathbb{P}\big([Z = 0]\big)} + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z = k]\big)\right)$
  - $\times$ **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z = k]\big) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = k]\big) - \mathbb{P}\big([X = 1]\big)$
  - $\times$ **0 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = k]\big) = 1$ **car la famille** $\big([X = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ **et un sce**

5. Informatique.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-U)$ et on admet que V est une variable aléatoire.
Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

- **1 pt :** $V(\Omega) = [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x < 0$**, alors** $F_V(x) = \mathbb{P}\big(\,[V \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- **2 pts : cas** $x \geqslant 0$ **suivant la qualité de l'argumentation. Pêle-mêle :**
  - $\times$ $\lambda > 0$
  - $\times$ $\mathbb{P}([\ln(1-U) \geqslant -\lambda x]) = \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right)$ **car la fonction** exp **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$
  - $\times$ $F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$ **car** $1-\mathrm{e}^{-\lambda x} \in [0,1[$

  (2 arguments sur 3 pour avoir les 2 points)

b) Écrire une fonction **Scilab** dont l'en-tête est `function z = simuZ()` qui simule la variable aléatoire Z.

```
function z = simuZ()
    u1 = rand()
    u2 = rand()
    t = log(1-u1) / log(1-u2)
    z = floor(t) + 1
endfunction
```

- **1 pt : structure de fonction**
- **1 pt :** $T = \frac{X_1}{X_0}$ **simulée par** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{-\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-U_1)}{-\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-U_2)} = \frac{\ln(1-U_1)}{\ln(1-U_2)}$
  où V_1 **et** V_2 **sont des v.a.r. qui suivent une loi exponentielle**
  donc `t = log(1-u1) / log(1-u2)`
- **1 pt :** `u1 = rand()` **et** `u2 = rand()`
- **1 pt :** `z = floor(t) + 1`