DS7 (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2014)

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $\theta > 0$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k \geqslant 0$.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série géométrique de raison $\dfrac{\theta}{1+\theta} \in \,]-1,1[$.
Ainsi, la série $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1}{1-\frac{\theta}{\theta+1}} = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1}{\frac{(\cancel{\theta}+1)-\cancel{\theta}}{\theta+1}} = \frac{1}{\cancel{1+\theta}}\,(\cancel{1+\theta}) = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (u_k) \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

□

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=k]) = u_k.$$

2. a) On pose $Y = X+1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Donc : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}([Y=k]) = \mathbb{P}([X+1=k]) = \mathbb{P}([X=k-1]) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k-1} = \frac{1}{1+\theta}\left(1-\frac{1}{1+\theta}\right)^{k-1}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{1+\theta}\right).}$$

- On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{1}{1+\theta}} = 1+\theta \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{1-\frac{1}{1+\theta}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2} = \frac{\frac{\theta}{\cancel{1+\theta}}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{\cancel{2}}} = \theta(1+\theta)$$

- Par définition de la v.a.r. Y : $X = Y-1$. Ainsi, la v.a.r. X admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée affine de Y qui en admet une.
  × Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-1) = \mathbb{E}(Y)-1 = \cancel{1}+\theta-\cancel{1} = \theta$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \theta}$$

× Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{V}(Y-1) \;=\; \mathbb{V}(Y) \;=\; \theta(1+\theta)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \theta(1+\theta)}$$

□

b) On rappelle que `grand(1, 1, 'geom', p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X :

```
function x = SimuX(theta)
    y = ................
    x = ................
endfunction
```

Démonstration.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `SimuX`,
  × elle prend en paramètre la variable `theta`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `x`.
- **Simulation de X**
  D'après les questions précédentes, si $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{\theta+1}\right)$, alors $X = Y - 1$ suit la loi définie par la suite (u_n).
  × On commence donc par simuler la variable Y à l'aide de la commande rappelée par l'énoncé. On stocke le résultat dans la variable `y`.

```
    y = grand(1, 1, 'geom', 1 / (theta + 1))
```

  × On en déduit une simulation de $X = Y - 1$ que l'on stocke dans la variable `x`.

```
    x = y - 1
```

Commentaire

On détaille la réponse à cette question afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.

□

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_k = x_k]\right)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de θ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

Commentaire

On s'intéresse dans cet exercice à l'estimateur du maximum de vraisemblance.
Détaillons ce point.

- On dispose d'un échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ d'observations.
- On suppose que ces observations proviennent d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ d'une v.a.r. X dont la loi dépend d'un paramètre θ, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur de θ qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance.
- Le réel $\widehat{\theta}_n$ introduit en question ***3.b)*** est précisément la valeur du paramètre θ maximisant la réalisation des observations initiales.
- La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la variable aléatoire construite à l'aide de ce maximum : T_n (introduite en question ***3.c)***).
- L'idée est de choisir comme estimation de θ le réel $\widehat{\theta}_n$ tel que la **vraisemblance** d'avoir obtenu l'échantillon utilisé soit maximisée.
  Autrement dit, le réel $\widehat{\theta}_n$ tel que la probabilité :

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}(\lambda) & = & \mathbb{P}_\lambda([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) & \\ & = & \mathbb{P}_\lambda([X_1 = x_1]) \times \dots \times \mathbb{P}_\lambda([X_n = x_n]) & \textit{(par indépendance de } X_1, \dots, X_n\textit{)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\lambda([X_i = x_i]) & \end{array}$$

  soit maximale. Au lieu d'étudier la fonction $\mathcal{L}$, définie par un produit, on préfère considérer la fonction $\varphi : \theta \mapsto \ln(\mathcal{L}(\theta))$, définie par une somme. La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, le maximum de φ fournit le maximum de $\mathcal{L}$.

a) Écrire $\ln(\mathcal{L}(\theta))$ en fonction de θ et de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Démonstration.
Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl} \ln(\mathcal{L}(\theta)) & = & \ln\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\,[X_k = x_k]\,)\Big) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\Big(\mathbb{P}(\,[X_k = x_k]\,)\Big) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{1}{1+\theta}\Big(\dfrac{\theta}{1+\theta}\Big)^{x_k}\right) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln\Big(\dfrac{1}{1+\theta}\Big) + x_k \ln\Big(\dfrac{\theta}{1+\theta}\Big)\right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(-\ln(1+\theta) + x_k\big(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)\big)\Big) \\ & = & -n\ln(1+\theta) + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\big(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)\big) \\ & = & -n\ln(1+\theta) + \big(\ln(\theta) + \ln(1+\theta)\big)\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \\ & = & -n\ln(1+\theta) + \big(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)\big)S_n \\ & = & S_n\ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta) \end{array}$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\mathcal{L}(\theta)) = S_n\ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)}$$

□

b) On considère la fonction φ définie par :

$$\forall \theta \in \,]0, +\infty[, \;\; \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1 + \theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$?

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
  Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta) &= S_n \, \frac{1}{\theta} - (S_n + n) \, \frac{1}{1 + \theta} \\ &= \frac{S_n \, (1 + \theta) - (S_n + n) \, \theta}{\theta \, (1 + \theta)} \\ &= \frac{S_n + \cancel{S_n \, \theta} - \cancel{S_n \, \theta} - n \, \theta}{\theta \, (1 + \theta)} \\ &= \frac{S_n - n \, \theta}{\theta \, (1 + \theta)} \end{aligned}$$

  Étudions le signe de $\varphi'(\theta)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{S_n - n \, \theta}{\theta \, (1 + \theta)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad S_n - n \, \theta > 0 \qquad \textit{(car } \theta(1 + \theta) > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{S_n}{n} > \theta \end{aligned}$$

  On note $\hat{\theta}_n = \dfrac{S_n}{n}$. On obtient le tableau de variations suivant :

θ	0		$\hat{\theta}_n$		$+\infty$
Signe de $\varphi'(\theta)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\hat{\theta}_n)$	$\searrow$	$-\infty$

- Ainsi :
  × la fonction φ est strictement croissante sur $]0, \hat{\theta}_n]$, donc : $\forall \theta \in \,]0, \hat{\theta}_n[, \; \varphi(\theta) < \varphi(\hat{\theta}_n)$.
  × la fonction φ est strictement décroissante sur $[\hat{\theta}_n, +\infty[$, donc : $\forall \theta \in \,]\hat{\theta}_n, +\infty[, \; \varphi(\theta) < \varphi(\hat{\theta}_n)$.

  Finalement : $\forall \theta \in \,]0, +\infty[\setminus \{\widehat{\theta}_n\}, \; \varphi(\theta) < \varphi(\hat{\theta}_n)$.

  $\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \varphi \text{ admet un unique maximum en } \hat{\theta}_n = \dfrac{S_n}{n}.}$

- Soit $\theta \in \,]0, +\infty[\setminus \{\widehat{\theta}_n\}$, on a : $\varphi(\theta) < \varphi(\widehat{\theta}_n)$.
  Par définition de φ, on en déduit :

$$\ln(\mathcal{L}(\theta)) \; < \; \ln(\mathcal{L}(\hat{\theta}_n))$$

  Par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\mathcal{L}(\theta) \; < \; \mathcal{L}(\hat{\theta}_n)$$

  $\boxed{\text{Ainsi, le réel } \hat{\theta}_n \text{ est l'unique maximum de } \mathcal{L} \text{ sur }]0, +\infty[.}$

Commentaire

On peut détailler les éléments apparaissant dans le tableau de variations.

- Tout d'abord : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \ln(\theta) = -\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \ln(1+\theta) = 0$.

  De plus : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in \mathbb{N}$, donc $x_k \geqslant 0$. D'où : $S_n \geqslant 0$.

  On en déduit : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \varphi(\theta) = -\infty$

- Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\varphi(\theta) \;=\; S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1+\theta) \;=\; \ln(\theta) \left(S_n - (S_n + n) \, \frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \right)$$

  Or :

$$\frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \;=\; \frac{\ln\left(\theta\left(\frac{1}{\theta}+1\right)\right)}{\ln(\theta)} \;=\; \frac{\ln(\theta) + \ln\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}{\ln(\theta)} \;=\; 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}{\ln(\theta)} \underset{\theta \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

  On en déduit :

$$\lim_{\theta \to +\infty} \left(S_n - (S_n+n) \frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \right) \;=\; S_n - (S_n + n) \times 1 \;=\; -n \leqslant 0$$

  De plus : $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \ln(\theta) = +\infty$.

  On en déduit : $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \varphi(\theta) = -\infty$.

□

On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

c) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

Démonstration.

- La v.a.r. $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ s'exprime :
  - × à l'aide du n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X,
  - × sans mention du paramètre θ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ est donc un estimateur de } \theta.}$$

- La v.a.r. T_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta(T_n) &= \mathbb{E}_\theta\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta(X_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \theta && \textit{(d'après la question } \textbf{2.a)}\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\, \theta \;=\; \theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$$

□

d) Calculer le risque quadratique $r_\theta(T_n)$ de T_n et vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Par décomposition biais / variance :

$$\begin{array}{rcll} r_\theta(T_n) & = & \mathbb{V}_\theta(T_n) + \cancel{\left(b_\theta(T_n)\right)^2} & \textit{(car } T_n \textit{ est un estimateur sans biais de } \theta\textit{)} \\ & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) \ = \ \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \theta(1+\theta) & \textit{(d'après la question } \textbf{2.a)}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n}\, \theta(1+\theta) \ = \ \dfrac{\theta(1+\theta)}{n} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } r_\theta(T_n) = \dfrac{\theta(1+\theta)}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0}$$

Commentaire

.98 Rappelons que l'on a le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n \text{ est un estimateur convergent}$$

Ainsi, la v.a.r. T_n est un estimateur convergent de θ.

□

Exercice 2 (EML 2015)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{array} \right.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que l'endomorphisme f est bijectif.
Alors l'endomorphisme f admet une bijection réciproque $f^{-1} : E \to E$. Or, d'après l'énoncé :

$$f \circ (f^2 + i) = \theta$$

On en déduit, en composant à gauche de part et d'autre par f^{-1} :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1} \circ \big(f \circ (f^2 + i)\big) & = & f^{-1} \circ \theta & = & \theta \\ \shortparallel & & & & \\ (f^{-1} \circ f) \circ (f^2 + i) & = & i \circ (f^2 + i) = f^2 + i & & \end{array}$$

Ce qui est absurde, puisque d'après l'énoncé : $f^2 + i \neq \theta$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ n'est pas bijectif.}}$$

Commentaire

On peut aussi raisonner de manière directe. Comme :

$$f \circ (f^2 + i) = \theta$$

alors, pour tout $x \in E$: $\big(f \circ (f^2 + i)\big)(x) = f\big((f^2 + i)(x)\big) = 0_E$.
Autrement dit : $\forall x \in E$, $(f^2 + i)(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
Or, d'après l'énoncé : $f^2 + i \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Ainsi, il existe $x_0 \in E$ tel que : $(f^2 + i)(x_0) \neq 0_E$.
On en déduit :

$$\mathrm{Ker}(f) \supset \{0_E, (f^2 + i)(x_0)\} \neq \{0_E\}$$

Ainsi, f n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective. □

b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, f n'est pas bijectif, c'est-à-dire $f - 0 \cdot i$ n'est pas bijectif.
  Comme E est de dimension finie, ceci équivaut à f non injectif.

$$\boxed{\text{Donc 0 est valeur propre de } f.}$$

- Comme 0 est valeur propre de f, alors : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f - 0 \cdot i) \neq \{0_E\}$.
  Il existe donc $u \neq 0_E$ tel que $u \in \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, il existe } u \in E \text{ tel que : } u \neq 0_E \text{ et } f(u) = 0_E.}$$

□

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $f \circ (f^2 + i) = \theta$.
  On en déduit que le polynôme $Q(X) = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de f.
  De plus, l'unique racine de Q est 0 (le polynôme $X^2 + 1$ n'admet pas de racine réelle).

$$\boxed{\text{D'où : } \text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}.}$$

- De plus, d'après la question ***1.b)***, $0 \in \text{Sp}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Sp}(f) = \{0\}.}$$

□

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

Démonstration.
D'après l'énoncé, E est un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B}$ l'une de ses bases.

Raisonnons par l'absurde.
Supposons que f est diagonalisable.
Comme $\text{Sp}(f) = \{0\}$, il existe alors une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

L'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(.)$ étant bijective, on en déduit : $f = \theta$.
Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Il était possible de rédiger différemment en prenant le parti de diagonaliser la matrice représentative de f dans une base $\mathscr{B}$ quelconque. Détaillons cette rédaction.
- On commence par noter $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice représentative de f dans une base $\mathscr{B}$ de E.
  Raisonnons par l'aburde.
  Supposons que f est diagonalisable. Alors A est diagonalisable. Il existe alors :
  × $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,
  × $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

  telles que : $A = PDP^{-1}$. Or $\text{Sp}(f) = \{0\}$. Donc :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P\, 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\, P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

  On en déduit : $f = \theta$. Absurde !
- Cette question est un grand classique des sujets.
  Il faut donc savoir la traiter correctement, en adoptant l'un ou l'autre des rédactions ci-dessus.

□

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Démonstration.

- Raisonnons par l'absurde.
Supposons que l'endomorphisme $f^2 + i$ est bijectif.
Alors l'endomorphisme $g = f^2 + i$ admet une bijection réciproque $g^{-1} : E \to E$. Or, d'après l'énoncé :
$$f \circ (f^2 + i) = \theta$$
On en déduit, en composant à droite de part et d'autre par g^{-1} :
$$\begin{array}{ccccc} \big(f \circ (f^2+i)\big) \circ g^{-1} & = & \theta \circ g^{-1} & = & \theta \\ \shortparallel & & & & \\ \big(f \circ (f^2+i)\big) \circ g^{-1} & = & f \circ \big((f^2+i) \circ g^{-1}\big) = f \circ i = f & & \end{array}$$
Ce qui est absurde, puisque d'après l'énoncé : $f \neq \theta$.
$$\boxed{\text{On en déduit que } f^2 + i \text{ n'est pas bijectif.}}$$
- L'endomorphisme $f^2 + i$ n'est pas bijectif. Donc : $\text{Ker}(f^2 + i) \neq \{0_E\}$.
Il existe donc $v \neq 0_E$ tel que $v \in \text{Ker}(f^2 + i)$. Or :
$$v \in \text{Ker}(f^2+i) \ \Leftrightarrow \ (f^2+i)(v) = 0_E \ \Leftrightarrow \ f^2(v) + v = 0_E \ \Leftrightarrow \ f^2(v) = -v$$
$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } v \in E \text{ tel que : } v \neq 0_E \text{ et } f^2(v) = -v.}$$
□

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

Démonstration.
On calcule :
$$f(v_3) \ = \ f\big(f(v_2)\big) \ = \ f^2(v_2) \ = \ -v_2$$
$$\boxed{\text{On a bien : } f(v_3) = -v_2.}$$
□

6. a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :
$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 \ = \ 0_E \qquad (*)$$
  × On applique f de part et d'autre. On obtient, par linéarité de f :
$$\begin{array}{ccccc} f\big(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3\big) & = & f(0_E) & = & 0_E \\ \shortparallel & & & & \\ \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2) + \lambda_3 \cdot f(v_3) & & & & \end{array}$$
  Or, on a les relations suivantes :
$$f(v_1) = 0_E, \quad f(v_2) = v_3 \quad \text{et} \quad f(v_3) = -v_2$$
  On obtient alors :
$$\lambda_2 \cdot v_3 - \lambda_3 \cdot v_2 = 0_E \quad (L_1)$$

× On applique de nouveau f de part et d'autre. On obtient :

$$\begin{array}{ccccc} f\big(\lambda_2 \cdot v_3 + \lambda_3 \cdot v_2\big) & = & f(0_E) & = & 0_E \\ \shortparallel & & & & \\ \lambda_2 \cdot f(v_3) - \lambda_3 \cdot f(v_2) & & & & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, en utilisant les mêmes relations que précédemment :

$$-\lambda_2 \cdot v_2 - \lambda_3 \cdot v_3 \ = \ 0_E \quad (L_2)$$

× Par combinaison linéaire des égalités précédentes ($\lambda_3\, L_1 + \lambda_2\, L_2$), on obtient :

$$-\lambda_3^2 \cdot v_2 - \lambda_2^2 \cdot v_2 \ = \ 0_E$$

Autrement dit : $(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \cdot v_2 = 0_E$.

Or : $v_2 \neq 0_E$. Donc : $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0_{\mathbb{R}}$. D'où : $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.

× L'équation initiale $(*)$ devient alors :

$$\lambda_1 \cdot v_1 \ = \ 0_E$$

Or : $v_1 \neq 0_E$. Donc : $\lambda_1 = 0$.

Finalement : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est donc libre.}}$$

- Ainsi, la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est :
  × une famille libre de E,
  × telle que : $\text{Card}(\mathscr{B}) = \text{Card}((v_1, v_2, v_3)) = 3 = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est donc une base de } E.}$$

□

b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On a : $f(v_1) = 0_E = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- On a : $f(v_2) = v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- On a : $f(v_3) = -v_2 = 0 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.

  On en déduit : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } C = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{a\, A + b\, B + c\, C \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

Démonstration.

- Montrons que (A, B, C) est une famille libre de $\mathcal{F}$.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. $(*)$

$$\text{Or :} \qquad (*) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (A, B, C) \text{ est libre.}}$$

- Ainsi, la famille (A, B, C) :
  × est génératrice de $\mathcal{F}$ (par définition de $\mathcal{F}$,
  × libre.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (A, B, C) \text{ est une base de } \mathcal{F}.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathcal{F}) = \text{Card}\big((A, B, C)\big) = 3.}$$

□

8. Montrer : $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM = MC\} = \mathcal{F}$

Démonstration.

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}) \in \mathbb{R}^9$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

et :

$$MC = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,3} & -a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & -a_{2,2} \\ 0 & a_{3,3} & -a_{3,2} \end{pmatrix}$$

On obtient alors les équivalences suivantes :

$$CM = MC \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,3} & -a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & -a_{2,2} \\ 0 & a_{3,3} & -a_{3,2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,3} & = & 0 \\ -a_{1,2} & = & 0 \\ -a_{3,1} & = & 0 \\ -a_{3,2} & = & a_{2,3} \\ -a_{3,3} & = & -a_{2,2} \\ a_{2,1} & = & 0 \\ a_{2,2} & = & a_{3,3} \\ a_{2,3} & = & -a_{3,2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & -a_{3,2} \\ 0 & a_{3,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad M = a_{1,1}\, A + a_{2,2}\, B + a_{3,2}\, C$$

$$\Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{F}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM = MC\} = \mathcal{F}}$$

□

9. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(a\,A + b\,B + c\,C)^2$.

Démonstration.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$(a\,A+b\,B+c\,C)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2-c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2-c^2 \end{pmatrix} = a^2\,A+(b^2-c^2)\,B+2bc\,C$$

$$\boxed{(a\,A + b\,B + c\,C)^2 = a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C}$$ □

b) En déduire une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- On remarque tout d'abord :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} = 4\,A + 5\,B + 12\,C$$

- D'après la question ***9.a)***, si on trouve $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$4\,A + 5\,B + 12\,C = a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C$$

alors, en posant $M = a\,A + b\,B + c\,C$, on a :

$$M^2 = a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C = 4\,A + 5\,B + 12\,C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

- Cherchons donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C = 4\,A + 5\,B + 12\,C$$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 4 \\ b^2-c^2 & = & 5 \\ 2bc & = & 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b^2-c^2 & = & 5 \\ bc & = & 6 \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b^2-c^2 & = & 5 \\ bc & = & 6 \end{array}\right.$$

Remarquons alors que $b = 0$ ne peut convenir (si $b = 0$ alors $bc = 0 \neq 6$). On suppose donc : $b \neq 0$. L'égalité $bc = 6$ permet d'écrire : $c = \dfrac{6}{b}$.
En réinjectant dans la deuxième ligne, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} b^2 - c^2 = 5 \;\Leftrightarrow\; b^2 - \frac{36}{b^2} = 5 \;\Leftrightarrow\; b^4 - 36 = 5\,b^2 & \Leftrightarrow & b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \\ & \Leftrightarrow & (b^2+4)\,(b^2-9) = 0 \\ & \Leftrightarrow & b^2 = -4 \;\texttt{OU}\; b^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow & b^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow & b = -3 \;\texttt{OU}\; b = 3 \end{array}$$

On obtient alors : $c^2 = b^2 - 5 = 9 - 5 = 4$. Ainsi : $c = -2$ OU $c = 2$.
On en déduit que le triplet (a, b, c) suivant convient : $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 3 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$.

- On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} &= 2^2\, A + (3^2 - 2^2)\, B + 2 \times 3 \times 2\, C \\ &= (2\, A + 3\, B + 2\, C)^2 \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc, en posant } M = 2\, A + 3\, B + 2\, C, \text{ on obtient : } M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}.}$$

□

10. On note $g = f^2 - i$.
Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2 - i) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(i) \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)\textit{)} \\ &= (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^2 - I_3 \\ &= C^2 - I_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice représentative de g dans la base $\mathscr{B}$ est une matrice diagonale à coefficients tous non nuls. Elle est donc inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } g \text{ est bijectif.}}$$

- Par propriété de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g^{-1}) &= (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= -I_3 - \frac{1}{2}\, C^2 \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(-i - \frac{1}{2}\, f^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ étant bijective, on en déduit : } g^{-1} = -i - \frac{1}{2}\, f^2.}$$

□

Exercice 3 (EML 2007)

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.
On considère l'application g définie par :

$$g \ : \ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } g \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

- Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

$$g'(x) \ = \ 2\,x + \frac{1}{x} \ = \ \frac{2\,x^2+1}{x} \ > \ 0$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$	
Variations de g	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

- Précisons les éléments de ce tableau :
  - $\times$ comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.
  - $\times$ comme $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$. □

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

Démonstration.
D'après la question précédente, la fonction g est :

$\times$ continue sur $]0,+\infty[$,

$\times$ strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Ainsi, la fonction g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g\big(]0,+\infty[\big)$ avec :

$$g\big(]0,+\infty[\big) \ = \ ]\lim_{x\to 0} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)[\, = \,]-\infty,+\infty[$$

Or $0 \in \,]-\infty,+\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solutoin sur }]0,+\infty[\text{, notée } \alpha.}$$ □

3. Montrer : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Démonstration.

- On remarque :
  - $\times$ tout d'abord : $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \ = \ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \ = \ \dfrac{1}{4} - \ln(2)$.
  - $\times$ ensuite, par définition de α : $g(\alpha) = 0$.
  - $\times$ enfin : $g(1) \ = \ 1^2 - \ln(1) \ = \ 1$.

  Comme $0,69 < \ln(2) < 0,70$ d'après l'énoncé, on en déduit :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \ \leqslant \ g(\alpha) \ \leqslant \ g(1)$$

- Or, d'après le théorème de la bijection, $g^{-1} :]-\infty, +\infty[\ \to \ ]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$. En appliquant g^{-1}, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} g^{-1}\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) & \leqslant & g^{-1}\big(g(\alpha)\big) & \leqslant & g^{-1}\big(g(1)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{2} & & \alpha & & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$$

□

Partie A

On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \dfrac{1}{4}\, x^2 - \dfrac{1}{4}\, \ln(x) \end{array}$$

4. a) Montrer que f est strictement croissante sur I.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur I en tant que somme de fonctions dérivables sur I.
- Soit $x \in I$.

$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{4\, x} \ = \ \frac{4\, x - 2\, x^2 - 1}{4\, x} \ = \ -\frac{2\, x^2 - 4\, x + 1}{4\, x}$$

  Comme $-4\, x < 0$ (car $x > \dfrac{1}{2} > 0$), le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $2x^2 - 4\, x + 1$.
  On note Δ le discriminant du polynôme $P(X) = 2\, X^2 - 4\, X + 1$. Alors :

$$\Delta \ = \ (-4)^2 - 4 \times 2 \times 1 \ = \ 16 - 8 \ = \ 8$$

  Le polynôme P admet donc les 2 racines distinctes suivantes :

$$x_1 \ = \ \frac{4 - \sqrt{8}}{4} \ = \ \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} \ = \ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 \ = \ \frac{4 + \sqrt{8}}{4} \ = \ \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

On remarque de plus :

× d'une part : $x_1 < \dfrac{1}{2}$. En effet :

$$x_1 < \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2 - \sqrt{2} < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < \sqrt{2}$$

Cette dernière assertion est vraie. Ainsi, grâce au raisonnement par équivalence, la première aussi.

× d'autre part : $x_2 > 1$. En effet :

$$x_2 \;=\; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \;>\; 1$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	$\frac{1}{2}$ $\qquad$ 1
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$f\left(\frac{1}{2}\right) \nearrow f(1)$

$$\boxed{\text{En particulier, la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } I.}$$

□

b) Montrer : $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme f est strictement croissante sur $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \;<\; f(1)$$

- Ensuite :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,\ln\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\,\ln(2)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; \cancel{\frac{1}{2}} < \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\,\ln(2) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{16} < \frac{1}{4}\,\ln(2) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4} < \ln(2)$$

Cette dernière inégalité est vraie, car, d'après l'énoncé : $0,69 < \ln(2)$. Ainsi, grâce au raisonnement par équivalence, la première inégalité l'est aussi.

- Enfin :

$$f(1) \;=\; 1 - \frac{1}{4} \times 1 - \cancel{\frac{1}{4}\,\ln(1)} \;=\; \frac{3}{4} \;<\; 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient bien : } \frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1.}$$

□

c) En déduire : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.

Démonstration.
Soit $x \in I$.
D'après ***4.a)***, la fonction f est strictement croissante sur $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On en déduit :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$$

D'après la question précédente, et par transitivité :

$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(1) < 1$$

Ainsi : $f(x) \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

$$\boxed{\text{Comme } \left]\tfrac{1}{2}, 1\right[\subset I, \text{ on en déduit : } \forall x \in I,\ f(x) \in I.}$$

□

5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.
On commence par coder la fonction f.

```
function y = f(x)
    y = x - (1/4) * x^2 - (1/4) * log(x)
endfunction
```

On propose ensuite la fonction **Scilab** suivante.

```
function u = suite(n)
    u = 1
    for k = 1:n
        u = f(u)
    end
endfunction
```

Détaillons les éléments de ce 2$^{\text{ème}}$ script.
La variable `u` est créée pour contenir successivement les valeurs u_0, u_1, ..., u_n.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `suite`,
  × elle prend en paramètre la variable `n`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `u`.

```
function u = suite(n)
```

  On initialise ensuite la variable `u` à 1 : valeur de u_0.

```
    u = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à mettre à jour la variable `u` pour quelle contienne la quantité $u_{\mathtt{n}}$.
  Pour cela, on met en place une structure itérative (boucle for).

```
3       for k = 1:n
4           u = f(u)
5       end
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**. Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- Si on avait souhaité afficher tous les n premiers termes de la suite (u_n), on aurait modifié le script précédent de la façon suivante :

```
function u = suite(n)
    u = zeros(1, n)
    u(1) = 1
    for k = 2:n
        u(k) = f(u(k-1))
    end
endfunction
```

□

b) Calculer u_1.

Démonstration.
Par définition de la suite (u_n) :

$$u_1 \; = \; f(u_0) \; = \; f(1) \; = \; \frac{3}{4} \qquad \textit{(d'après 4.b))}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{3}{4}}$$

□

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in I \end{cases}$.

▸ **Initialisation** :
On sait : $u_0 = 1 \in I$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($i.e.$ $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in I \end{array}\right.$)

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et : $u_n \in I$.

  - Tout d'abord, comme $u_n \in I$, alors : $u_n \geqslant \dfrac{1}{2} > 0$.

    Or la fonction f est définie sur $]0, +\infty[$. Ainsi $f(u_n)$ est bien défini.
    D'où u_{n+1} est bien défini.

  - De plus, comme $u_n \in I$, d'après ***4.c)*** : $f(u_n) \in I$. Ainsi : $u_{n+1} \in I$.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, la suite } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I.}$$

□

d) Montrer que la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant u_{n+1}$.

- **Initialisation** :
  On sait : $u_0 = 1$. De plus, d'après ***5.b)*** : $u_1 = \dfrac{3}{4}$. Ainsi : $u_0 \geqslant u_1$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($i.e.$ $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$).
  Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{lrcll} & u_n & \geqslant & u_{n+1} & \\ \text{donc} & f(u_n) & \geqslant & f(u_{n+1}) & \textit{(car } f \textit{ est croissante sur } I \\ & & & & \textit{d'après } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\ \text{ainsi} & u_{n+1} & \geqslant & u_{n+2} & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

□

e) Montrer que la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α.

Démonstration.

- La suite (u_n) est :
  × décroissante d'après ***5.d)***,
  × minorée par $\dfrac{1}{2}$ d'après ***5.c)***.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \text{ vérifiant : } \ell \geqslant \dfrac{1}{2}.}$$

- Par définition de la suite (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Par continuité de f en $\ell \in \,]0, +\infty[$, on obtient : $\ell = f(\ell)$. Or :

$$\ell = f(\ell) \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \ell - \frac{1}{4}\,\ell^2 - \frac{1}{4}\,\ln(\ell) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \ell^2 + \ln(\ell) \quad \Leftrightarrow \quad g(\ell) = 0$$

  Or, d'après ***2.***, α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \ell = \alpha.}$$

□

Partie B

On considère l'application F définie par :

$$F \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\; x \;,\; y \;) & \mapsto & x\,\mathrm{e}^y + y\,\ln(x) \end{array}$$

6. a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction $G : (x, y) \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car elle est la composée $G = \psi \circ h$ de :
  - × $h : (x, y) \mapsto x$ qui est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $h\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\right) \subset \mathbb{R}_+^*$.
  - × $\Psi : u \mapsto \ln(u)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On démontrerait de même que la fonction $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que la fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ en tant que} \\ \text{somme et produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.\end{array}}$$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
  - × Tout d'abord :

$$\partial_1(F)(x, y) \;=\; \mathrm{e}^y \times 1 + y \times \frac{1}{x} \;=\; \mathrm{e}^y + \frac{y}{x}$$

  - × Ensuite :

$$\partial_2(F)(x, y) \;=\; x \times \mathrm{e}^y + \ln(x) \times 1 \;=\; x\,\mathrm{e}^y + \ln(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \partial_1(F) : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^y + \dfrac{y}{x} \\ \partial_2(F) : (x, y) \mapsto x\,\mathrm{e}^y + \ln(x) \end{array}}$$

□

b) Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

$$(x, y) \text{ est un point critique de } F \;\Leftrightarrow\; \nabla(F)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(F)(x, y) & = & 0 \\ \partial_2(F)(x, y) & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi : (x,y) est un point critique de F $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^y + \dfrac{y}{x} & = & 0 \\ x\,\mathrm{e}^y + \ln(x) & = & 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\,\mathrm{e}^y + y = 0 \\ x\,\mathrm{e}^y + \ln(x) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\,\mathrm{e}^y = -y \\ -y + \ln(x) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\,\mathrm{e}^y + y = 0 \\ y = \ln(x) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\,\mathrm{e}^{\ln(x)} + \ln(x) = 0 \\ y = \ln(x) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) = 0 \\ y = \ln(x) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \ln(x) = \ln(\alpha) \end{array}\right.$ *(d'après la question **2.**)*

$\boxed{\text{La fonction } F \text{ admet donc un unique point critique : } \big(\alpha, \ln(\alpha)\big).}$

Commentaire

- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(F)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on fait apparaître une équation du type :

  $$y = \psi(x)$$

  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
  C'est la stratégie qu'on a adoptée ci-dessus.

□

7. a) Déterminer la matrice hessienne de F en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par des arguments similaires à ceux de la classe $\mathcal{C}^1$ sur ce même ensemble.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
  × Tout d'abord : $\partial^2_{1,1}(F)(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}$.
  × Ensuite : $\partial^2_{2,1}(F)(x,y) = \mathrm{e}^y + \dfrac{1}{x}$.
  × De plus, comme F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par théorème de Schwarz :
  $$\partial^2_{1,2}(F)(x,y) \; = \; \partial^2_{2,1}(F)(x,y) \; = \; \mathrm{e}^y + \frac{1}{x}$$
  × Enfin : $\partial^2_{2,2}(F)(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \nabla^2(F)(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \mathrm{e}^y + \dfrac{1}{x} \\ \mathrm{e}^y + \dfrac{1}{x} & x\,\mathrm{e}^y \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial^2_{2,1}(F)(x,y)$ et $\partial^2_{1,2}(F)(x,y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

□

b) La fonction F admet-elle un extremum local ?

Démonstration.

- Tout d'abord, un extremum local de F doit être un point critique de F.

$$\boxed{\text{Ainsi, le seul extremum local possible de } F \text{ est le point } \big(\alpha, \ln(\alpha)\big).}$$

- On note : $H = \nabla^2(F)\big(\alpha, \ln(\alpha)\big)$. Ainsi :

$$H \; = \; \begin{pmatrix} -\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} & \mathrm{e}^{\ln(\alpha)} + \dfrac{1}{\alpha} \\ \mathrm{e}^{\ln(\alpha)} + \dfrac{1}{\alpha} & \alpha\,\mathrm{e}^{\ln(\alpha)} \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} -\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} & \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\det(H - \lambda\, I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} -\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \lambda & \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \\[2ex] \alpha + \dfrac{1}{\alpha} & \alpha^2 - \lambda \end{pmatrix}\right) \\[4ex]
& = & \left(-\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \lambda\right)\left(\alpha^2 - \lambda\right) - \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 \\[3ex]
& = & -\ln(\alpha) + \left(\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2\right)\lambda + \lambda^2 - \left(\alpha^2 + 2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) \\[3ex]
& = & \lambda^2 + \left(\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2\right)\lambda - \left(\alpha^2 + \ln(\alpha) + 2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) \\[3ex]
& = & \lambda^2 + \left(\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2\right)\lambda - \left(2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)
\end{array}$$

(car, par définition de α : $\alpha^2 + \ln(\alpha) = 0$)

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\lambda \text{ est valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\, I_2 \text{ non inversible} \\[1ex]
& \Leftrightarrow & \det(H - \lambda\, I_2) = 0 \\[1ex]
& \Leftrightarrow & \lambda^2 + \left(\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2\right)\lambda - \left(2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) = 0 \\[3ex]
& \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine de } Q
\end{array}$$

où Q est le polynôme de degré 2 défini par :

$$Q(X) \ = \ X^2 + \left(\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2\right) X - \left(2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Commentaire

À ce stade de l'étude de la nature d'un point critique, le calcul de $\det(H - \lambda\ I_2)$ nous fournit toujours un polynôme de degré 2 en λ. Notons le Q. Deux cas se présentent alors :

× l'expression de Q est « simple » (c'est par exemple le cas lorsque les coefficients de Q sont numériques). Dans ce cas :

1) on détermine explicitement les racines de Q par factorisation ou calcul de discriminant.

2) les racines de Q sont les valeurs propres de H d'après les équivalences ci-dessus.

3) on en déduit le signe des valeurs propres de H et ainsi la nature du point critique étudié.

× l'expression de Q est « compliquée » (c'est par exemple le cas lorsque l'expression de Q dépend de plusieurs paramètres, comme ici). Dans ce cas, **on ne cherchera pas** à déterminer les racines de Q explicitement. On procèdera de la manière suivante :

1) on justifie l'existence de valeurs propres λ_1 et λ_2 de H (la matrice H est symétrique).

2) les valeurs propres de H sont racines de Q d'après les équivalences ci-dessus. On en déduit la factorisation de Q suivante : $Q(X) = (X - \lambda_1)\,(X - \lambda_2)$

3) on identifie les coefficients des deux expressions de Q pour en déduire des relations sur λ_1 et λ_2 (elles sont appelées *relations coefficients / racines*).

4) on détermine le signe de λ_1 et λ_2 (valeurs propres de H) grâce à ces relations, et on obtient ainsi la nature du point critique étudié.

- La matrice H est une matrice symétrique (réelle). Elle est donc diagonalisable. On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres **éventuellement égales**.
- D'après les équivalences précédentes, on en déduit que λ_1 et λ_2 sont racines de Q. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} Q(X) & = & (X-\lambda_1)\,(X-\lambda_2) \\ & = & X^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\,X + \lambda_1\,\lambda_2 \end{array}$$

D'où, par définition de Q :

$$X^2 + \left(\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2\right) X - \left(2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \;=\; X^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\,X + \lambda_1\,\lambda_2$$

Par identification des coefficients de ces polynômes de degré 2, on en déduit le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2 & = & \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} - \alpha^2 \\[2ex] \lambda_1\,\lambda_2 & = & -\left(2+\dfrac{1}{\alpha^2}\right) \qquad (*) \end{array} \right.$$

On déduit de l'équation $(*)$: $\lambda_1\,\lambda_2 < 0$. Les valeurs propres de H sont donc non nulles et de signe opposé.

$$\boxed{\text{Le point } \big(\alpha, \ln(\alpha)\big) \text{ n'est donc pas un extremum de } F \text{ (c'est un point col).}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } \big(\alpha, \ln(\alpha)\big) \text{ était le seul extremum local possible de } F, \\ \text{la fonction } F \text{ n'admet pas d'extremum local.}\end{array}}$$

□

Problème (EDHEC S 2012)

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

On admet le résultat (R) suivant.

> Soient U et V deux variables aléatoires à densité définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_U et f_V. On suppose que les variables aléatoires U et V sont :
>
> × indépendantes,
>
> × telles que f_U et f_V soient bornées.
>
> Alors la variable aléatoire $U + V$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $U + V$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
>
> $$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt$$

1. Dans la suite, on considère un réel a strictement positif.

a) On note $V = -a\, X_0$. Démontrer que V admet pour fonction de répartition :

$$F_V : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{\lambda}{a}\, x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Par définition : $X_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On peut donc considérer : $X_0(\Omega) = [0, +\infty[$.
  Comme $-a < 0$, on a : $V(\Omega) = \big(-a\, X_0\big)(\Omega) =]-\infty, 0]$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x \leqslant 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_V(x) & = & \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([-a\, X_0 \leqslant x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X_0 \geqslant \dfrac{x}{-a}\right]\right) & \textit{(car } -a < 0\textit{)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}\left(\left[X_0 \leqslant -\dfrac{x}{a}\right]\right) & \\ & = & 1 - F_{X_0}\left(-\dfrac{x}{a}\right) & \\ & = & 1 - \left(1 - e^{-\lambda \frac{-x}{a}}\right) & \textit{(car } \dfrac{-x}{a} \geqslant 0 \textit{ puisque } x \leqslant 0 \textit{ et } a > 0\textit{)} \\ & = & e^{\lambda \frac{x}{a}} & \end{array}$$

  × Si $x > 0$, alors : $[Y \leqslant x] = \Omega$ donc :

$$F_V(x) = \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = 1$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } F_V : x \mapsto \begin{cases} e^{\lambda \frac{x}{a}} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

□

b) Démontrer que V est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité f_V.

Démonstration.

- La fonction F_V est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que composée de fonctions continues sur des intervalles adéquats.
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction constante.
  - × en 0. En effet :

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{x \to 0^-} F_V(x) & = & 1 & = & \lim\limits_{x \to 0^+} F_V(x) \\ & & \shortparallel & & \\ & & F_V(0) & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_V \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_V \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } V \text{ est donc une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déteminer une densité f_V de V, on dérive sa fonction de répartition F_V sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × Si $x \in]-\infty, 0[$, alors :

$$f_V(x) = F_V'(x) = \frac{\lambda}{a} \, e^{\frac{\lambda}{a} x}$$

  - × Si $x \in]0, +\infty[$, alors :

$$f_V(x) = F_V'(x) = 0$$

  - × On choisit enfin : $f_V(0) = 0$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } f_V : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda}{a} \, e^{\frac{\lambda}{a} x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

□

c) On note $U = X_1$. Montrer que la variable $X_1 - a\,X_0$ est une variable à densité dont une densité f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \int_0^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t) \; dt$$

Démonstration.

- Par définition : $U + V = X_1 - a\,X_0$.
  Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on peut considérer : $V(\Omega) = X_1(\Omega) = [0, +\infty[$.
  D'autre part : $U(\Omega) =]-\infty, 0]$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (U+V)(\Omega) \subset \mathbb{R}.}$$

- D'autre part, les v.a.r. U et V :
  - × sont des variables à densité.
    En effet, $U = X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et V est à densité d'après la question ***1.b)***.
  - × sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, car X_1 et X_0 le sont.

× admettent chacune une densité bornée. Démontrons-le.

– Tout d'abord :
  ▸ $\forall x < 0,\ f_U(x) = 0 \leqslant 0$.
  ▸ $\forall x \geqslant 0,\ f_U(x) = \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \leqslant \lambda$ car $\mathrm{e}^{-\lambda\, x} \leqslant 1$ et $\lambda > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f_U(x) \leqslant \lambda.}$$

– Ensuite :
  ▸ $\forall x < 0,\ f_V(x) = \dfrac{\lambda}{a}\ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \leqslant \dfrac{\lambda}{a}$ car $\frac{\lambda}{a}\, x \leqslant 0$ puisque $x \leqslant 0$ et $a > 0$ et $\lambda > 0$.
  ▸ $\forall x \geqslant 0,\ f_V(x) = 0 \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f_V(x) \leqslant \frac{\lambda}{a}.}$$

• On en conclut, d'après le résultat `(R)` fourni par l'énoncé, que la v.a.r. $U + V$ est une v.a.r. à densité dont une densité est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_a(x) = f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt$$

Remarquons alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt$$

car f_U est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } X_1 - a\, X_0 \text{ est bien une variable à densité dont une densité } f_a \text{ est donnée par :}\\ \forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt\end{array}}$$ □

d) Soit W une variable aléatoire telle que $W \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\lambda\, \frac{a+1}{a}\right)$.

(i) Démontrer : $\forall x < 0,\ f_a(x) = \dfrac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x}\ \mathbb{E}(W^0)$.

Démonstration.
Soit $x < 0$.

• Comme $x < 0$, alors pour tout $t \geqslant 0$, $x - t < 0$. Ainsi :

$$\forall x < 0,\ \ \forall t \geqslant 0,\ \ f_V(x-t) = \frac{\lambda}{a}\ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\,(x-t)}$$

• On en déduit :

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \int_{0}^{+\infty} f_U(t)\, f_V(x-t)\ dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \frac{\lambda}{a}\ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\,(x-t)}\ dt \\
&= \frac{\lambda^2}{a}\ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}\, t}\ dt \\
&= \frac{\lambda^2}{a}\ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda \frac{a+1}{a}\, t}\ dt && \textit{(car } -\lambda t - \tfrac{\lambda}{a}\, t = -\lambda\, t\ (1 + \tfrac{1}{a})\textit{)} \\
&= \frac{\lambda^{\cancel{2}}}{\cancel{a}}\ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x}\ \frac{\cancel{a}}{\cancel{\lambda}\ (a+1)} \int_{0}^{+\infty} \lambda \frac{a+1}{a}\ \mathrm{e}^{-\lambda \frac{a+1}{a}\, t}\ dt && \textit{(avec } a \neq -1 \textit{ car } a > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

- La v.a.r. W admet un moment d'ordre 0 donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W^0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^0 \ x f_W(t) \ dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} f_W(t) \ dt & \textit{(car } f_W \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\
&= \int_{0}^{+\infty} \lambda \frac{a+1}{a} \ \mathrm{e}^{-\lambda \frac{a+1}{a} \, t} \ dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x < 0, \ f_a(x) = \frac{\lambda}{a+1} \ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \ \mathbb{E}(W^0).}$$

☐

(ii) Démontrer : $\forall x \geqslant 0, \ f_a(x) = \dfrac{\lambda}{a+1} \ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \ \mathbb{P}\big([W > x] \big)$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

- Remarquons que pour tout $t \geqslant 0$:

$$f_U(t) \, f_V(x-t) \neq 0 \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_U(t) \neq 0 \\ f_V(x-t) \neq 0 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \in [0,+\infty[\\ x-t \in]-\infty, 0[\end{array} \right. \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \geqslant 0 \\ x-t < 0 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \geqslant 0 \\ t > x \end{array} \right.$$

On en déduit : $f_U(t) \ f_V(x-t) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ t > x$. Et ainsi :

$$f_a(x) = \int_{0}^{+\infty} f_U(t) \, f_V(x-t) \ dt \ = \ \int_{x}^{+\infty} f_U(t) \, f_V(x-t) \ dt$$

car $t \mapsto f_U(t) \, f_V(x-t)$ est nulle en dehors de $]x, +\infty[$.

- Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \int_{x}^{+\infty} f_U(t) \, f_V(x-t) \ dt \\
&= \int_{x}^{+\infty} \lambda \ \mathrm{e}^{-\lambda t} \ \frac{\lambda}{a} \ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\,(x-t)} \ dt \\
&= \frac{\lambda^2}{a} \ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}\, t} \ dt \\
&= \frac{\lambda^2}{a} \ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda \frac{a+1}{a}\, t} \ dt \\
&= \frac{\lambda^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} \ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \ \frac{\cancel{a}}{\cancel{\lambda} \ (a+1)} \int_{x}^{+\infty} \lambda \frac{a+1}{a} \ \mathrm{e}^{-\lambda \frac{a+1}{a}\, t} \ dt \\
&= \frac{\lambda}{a+1} \ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \int_{x}^{+\infty} f_W(t) \ dt & \textit{(où } W \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\lambda \tfrac{a+1}{a}\right)\textit{)} \\
&= \frac{\lambda}{a+1} \ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \ \mathbb{P}\big([W > x] \big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \geqslant 0, \ f_a(x) = \frac{\lambda}{a+1} \ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\, x} \ \mathbb{P}\big([W > x] \big).}$$

☐

(iii) En conclure que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - a\,X_0$, la fonction f définie par :

$$f_a : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{\lambda\,\frac{x}{a}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < 0$, alors, d'après ***1.a)(i)*** :

$$f_a(x) = \frac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{\lambda\,\frac{x}{a}}\ \mathbb{E}\big(W^0\big) = \frac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{\lambda\,\frac{x}{a}}$$

car $\mathbb{E}\big(W^0\big) = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x < 0,\ f_a(x) = \frac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{\lambda\,\frac{x}{a}}.}$$

- Si $x \geqslant 0$, alors, d'après ***1.a)(ii)*** :

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \frac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{\lambda\,\frac{x}{a}}\ \mathbb{P}\big([W > x]\big) \\ &= \frac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{a}\,x}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{a+1}{a}\,x} \\ &= \frac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{\cancel{\frac{\lambda}{a}x}-\lambda\,x-\cancel{\frac{\lambda}{a}x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \geqslant 0,\ f_a(x) = \frac{\lambda}{a+1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,x}.}$$

□

Commentaire

- Cette question ne revêt aucune difficulté car le résultat énoncé s'obtient par application directe des questions précédentes, **dont le résultat est fourni par l'énoncé**. Ainsi, même sans avoir répondu aux questions précédentes, il est possible de traiter correctement cette question. Il faut s'habituer à repérer ces questions qui consistent à effectuer le bilan des questions précédentes car elles sont généralement l'occasion de prendre des points sans trop d'efforts.
- Le résultat `(R)` fourni dans l'énoncé a deux objectifs :
  1) démontrer (sous certaines hypothèses) que la somme de deux variables aléatoires à densité U et V est une variable aléatoire à densité,
  2) donner une expression de la densité de la somme $U + V$ en fonction des densités de U et V.

  Ce résultat n'est pas au programme d'ECE. Il sera donc toujours rappelé dans les énoncés qui exigent son utilisation. Ce résultat revient régulièrement dans les sujets `TOP3`. Il est donc préférable de l'avoir déjà vu.
- La fonction $f_U * f_V : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\ dt$ est appelée produit de convolution de f_u et f_V. Le résultat `(R)` stipule que, sous certaines hypothèses, la densité d'une somme de v.a.r. est le produit de convolution des densités.

e) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

Démonstration.

- Comme X_0 et X_1 suivent la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on peut considérer : $X_0(\Omega) = X_1(\Omega) = \,]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T(\Omega) = \left(\frac{X_1}{X_0}\right)(\Omega) \subset \,]0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x \leqslant 0$, alors $[T \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_T(x) = \mathbb{P}\big(\,[T \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  - × Si $x > 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_T(x) & = & \mathbb{P}\big(\,[T \leqslant x]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{X_1}{X_0} \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left([X_1 \leqslant x\, X_0]\right) & \textit{(car } X_0 \textit{ est à valeurs strictement positives)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[X_1 - x\, X_0 \leqslant 0]\,\big) & \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_x(t)\ dt & \textit{(d'après la question } \textbf{1.d)} \textit{ avec } a = x > 0\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{x+1}\ \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}\, t}\ dt & \\ & = & \dfrac{\lambda}{x+1} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}\, t}\ dt & \\ & = & \dfrac{\lambda}{x+1} \displaystyle\int_{+\infty}^{0} \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}\,(-u)}(-\ du) & \textit{(en posant le changement de variable affine } u = -t\textit{, l'intégrale étant convergente)} \\ & = & \dfrac{\lambda}{x+1}\ \dfrac{x}{\lambda} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{x}\ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{x}\, u}\ du & \\ & = & \dfrac{x}{x+1} & \end{array}$$

La dernière ligne est obtenue en remarquant que l'intégrale considérée n'est autre que le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{x}\right)$ (avec $\frac{\lambda}{x} > 0$).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut que la fonction de répartition } F_T \text{ est définie par :} \\ F_T : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{array}\right. .\end{array}}$$

□

2. On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([X = n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $T(\Omega) = \,]0, +\infty[$ alors $\big(\lfloor T \rfloor\big)(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } T(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

Commentaire

En particulier, la v.a.r. T est une variable aléatoire discrète.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X = n]\big) & = & \mathbb{P}\big([\ \lfloor T \rfloor + 1 = n]\big) & \\
& = & \mathbb{P}\big([\ \lfloor T \rfloor = n-1]\big) & \\
& = & \mathbb{P}([n-1 \leqslant T < n]) & \textit{(par définition de la partie entière)} \\
& = & F_T(n) - F_T(n-1) & \textit{(car T est une v.a.r. à densité)} \\
& = & \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n} & \textit{(d'après la question précédente avec $n > 0$ et $n - 1 \geqslant 0$)} \\
& = & \dfrac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n\,(n+1)} & \\
& = & \dfrac{\cancel{n^2} - (\cancel{n^2} - 1)}{n\,(n+1)} & \\
& = & \dfrac{1}{n\,(n+1)} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = n]) \ = \ \dfrac{1}{n\,(n+1)}.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'on appelle fonction partie entière la fonction suivante.

$$\begin{array}{cccccl}
\lfloor\,.\,\rfloor & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} & \\
& & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor & = \ \text{le plus grand entier } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leqslant x
\end{array}$$

On peut aussi définir $\lfloor x \rfloor$ comme l'unique entier relatif n vérifiant la propriété : $n \leqslant x < n+1$.

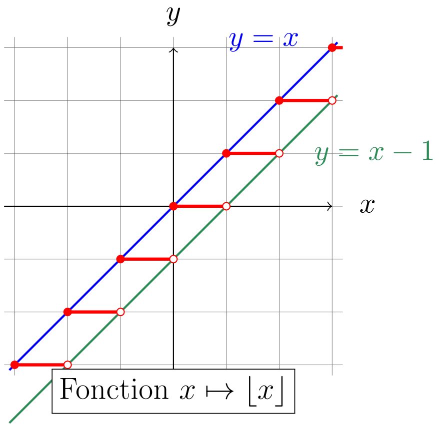
- Une propriété fondamentale provenant de la définition de cette fonction est donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \big(\ \lfloor u \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad n \ \leqslant \ u \ < \ n+1\ \big)}$$

En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Commentaire

- Enfin, rappelons que la représentation graphique de la fonction partie entière est la suivante :



$\square$

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

Démonstration.

D'après la question ***1.b)*** appliquée pour $a = 1$, la variable aléatoire $-X_0$ est à densité. Une densité de $-X_0$ est donnée par :

$$f_{-X_0} : x \mapsto \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$\square$

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$ (car $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$).

  Ainsi : $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$ car $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Ainsi :
  $$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant x]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x \in [0, +\infty[$.
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ &= \big(\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant x]\big)\big)^n \\ &= \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big)^n && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } x \geqslant 0\textit{)} \end{aligned}$$

Finalement : $G_n = F_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big)^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

- Démontrons que Y_n est une v.a.r. à densité.

Commentaire

Dans l'énoncé, il est précisé qu'on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité. La démonstration suivante est donc donnée à titre d'illustration.

La fonction F_{Y_n} est continue :

× sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,

× sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F_{Y_n} = g_2 \circ g_1$ de :

  – $g_1 : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ qui est :
    ▸ continue sur $]0, +\infty[$,
    ▸ telle que : $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.

  – $g_2 : y \mapsto y^n$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

× en 0. En effet :

  – d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{Y_n}(x) = 0$

  – d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{Y_n}(x) = F_{Y_n}(0) = (1 - \mathrm{e}^{-0})^n = 0$.

  Ainsi :

$$\lim_{x \to 0^-} F_{Y_n}(x) \; = \; F_{Y_n}(0) \; = \; \lim_{x \to 0^+} F_{Y_n}(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_{Y_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

La fonction F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_{Y_n} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y_n \text{ est donc une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déteminer une densité f_{Y_n} de Y_n, on dérive sa fonction de répartition F_{Y_n} sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

  × Si $x \in]-\infty, 0[$, alors :
$$f_{Y_n}(x) \; = \; F'_{Y_n}(x) \; = \; 0$$

  × Si $x \in]0, +\infty[$, alors :
$$f_{Y_n}(x) \; = \; F'_{Y_n}(x) \; = \; n \, \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)^{n-1} \, (\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x})$$

  × On choisit enfin : $f_{Y_n}(0) \; = \; 0$.

$$\boxed{\text{Une densité de } Y_n \text{ est donnée par : } g_n = f_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n \, \left(\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) \, \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

□

c)(i) Déduire de ce qui précède que la variable aléatoire $Y_n - X_0$ est une variable à densité dont une densité h_n vérifie :

$$\forall x < 0,\ h_n(x) = \lambda\, e^{\lambda\, x} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, t}\, g_n(t)\, dt$$

Démonstration.

- Comme $X_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on peut considérer $X_0(\Omega) = [0, +\infty[$ et donc $(-X_0)(\Omega) =]-\infty, 0]$.
  D'autre part : $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } (Y_n - X_0)(\Omega) \subset \mathbb{R}.}$$

- D'autre part, les v.a.r. Y_n et $-X_0$:
  - × sont des variables à densité.
  - × sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.
    En effet, comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. indépendantes, la v.a.r. $-X_0$ est indépendante de Y_n, v.a.r. définie seulement à partir des v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$.
  - × admettent chacune une densité bornée. Démontrons-le.

  – Tout d'abord :
    - ▸ $\forall x \leqslant 0,\ g_n(x) = 0 \leqslant 0$.
    - ▸ $\forall x > 0,\ g_n(x) = n\, \left(\lambda\, e^{-\lambda\, x}\right)\, \left(1 - e^{-\lambda\, x}\right)^{n-1} \leqslant n\,\lambda\, 1^{n-1} = n\,\lambda$ car $0 < e^{-\lambda\, x} \leqslant 1$ et $\lambda > 0$.

    $$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant n\,\lambda.}$$

  – La question ***1.c)***, appliquée en $a = 1$, fournit directement l'encadrement de f_{-X_0}.

    $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f_{-X_0}(x) \leqslant \lambda.}$$

- On en conclut, d'après le résultat `(R)` fourni par l'énoncé, que la v.a.r. $Y_n - X_0$ est une v.a.r. à densité dont une densité est définie par :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = f_{Y_n - X_0}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\, f_{-X_0}(x-t)\, dt = \int_0^{+\infty} g_n(t)\, f_{-X_0}(x-t)\, dt$$

  La dernière égalité est vérifiée car g_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

- Soit $x < 0$.
  - × Comme $x < 0$, alors pour tout $t \geqslant 0$, $x - t < 0$. Ainsi :

    $$\forall x < 0,\ \forall t \geqslant 0,\ f_{-X_0}(x-t) = \lambda e^{\lambda\,(x-t)}$$

  - × On en déduit :

    $$\begin{aligned} h_n(x) &= \int_0^{+\infty} g_n(t)\, f_{-X_0}(x-t)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} g_n(t)\ \lambda\, e^{\lambda\,(x-t)}\, dt \\ &= \lambda\, e^{\lambda\, x} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, t}\, g_n(t)\, dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } Y_n - X_0 \text{ est bien une variable à densité dont une densité } h_n \text{ est donnée par :} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = \lambda\, e^{\lambda\, x} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, t}\, g_n(t)\, dt \end{array}}$$

□

(ii) Montrer alors : $\forall x < 0,\ h_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\ \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}$.
On pourra procéder par intégration par parties.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ g_n(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ g_n(t)\ dt$ est donc impropre seulement en $+\infty$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \mathrm{e}^{-\lambda\, t} & \quad & u'(t) & = & -\lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t} \\ v'(t) & = & g_n(t) & \quad & v(t) & = & G_n(t) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0, B]$.

Commentaire

Pour faire les choses rigoureusement, il faudrait démontrer que G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, B]$. Comme G_n est une primitive de la densité g_n, démontrer que g_n est continue sur $[0, B]$ est suffisant pour conclure. En réalité, g_n est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est :
- continue sur $]-\infty, 0[$ car est constante sur cet intervalle.
- continue sur $]0, +\infty[$ car est le produit de fonctions continues sur cet intervalle.
- continue en 0. En effet :

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{x \to 0^-} g_n(x) & = & 0 & = & \lim\limits_{x \to 0^+} g_n(x) \\ & & \shortparallel & & \\ & & g_n(0) & & \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^B \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ g_n(t) & = & \Big[\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ G_n(t)\ \Big]_0^B - \displaystyle\int_0^B \big(-\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\big)\ G_n(t)\ dt \\ & = & \big(\mathrm{e}^{-\lambda\, B}\ G_n(B) - \mathrm{e}^{-\lambda\, 0}\ \cancel{G_n(0)}\big) + \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^B (n+1)\ \big(\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\big)\ \Big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\Big)^n\ dt \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda\, B}\ G_n(B) + \dfrac{1}{n+1}\ \Big[\ \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\big)^n\ \Big]_0^B \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda\, B}\ G_n(B) + \dfrac{1}{n+1}\ \Big(\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, B}\big)^n - \big(\cancel{1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, 0}}\big)^n\Big) \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda\, B}\ G_n(B) + \dfrac{1}{n+1}\ \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, B}\big)^n \\ & \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

- En effet :
  × $e^{-\lambda B}\, G_n(B) = e^{-\lambda B}\, \left(1 - e^{-\lambda B}\right)^n \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \times 1^n = 0$.
  × $\left(1 - e^{-\lambda B}\right)^n \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1^n = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x < 0,\ h_n(x) = \lambda\, e^{\lambda\, x}\, \frac{1}{n+1}.}$$

□

4. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

Commentaire

L'énoncé prend le parti de ne pas « introduire les ω » afin de définir la v.a.r. Z. Il serait beaucoup plus rigoureux de définir la v.a.r. Z comme suit :

$$Z : \omega \mapsto \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k(\omega) > X_0(\omega)\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut aussi dire que la v.a.r. Z prend la valeur :
× le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$, s'il existe, tel que l'événement $[X_k > X_0]$ est réalisé.
× 0 si un tel entier n'existe pas.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $[Z > n] \cup [Z = 0] = [Y_n \leqslant X_0]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \Omega$.

L'événement $[Z > n] \cup [Z = 0]$ est réalisé par ω

$\Leftrightarrow$ L'événement $[Z > n]$ est réalisé par ω
OU l'événement $[Z = 0]$ est réalisé par ω

$\Leftrightarrow$ Le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_k(\omega) > X_0(\omega)$ est strictement plus grand que n
OU n'existe pas

$\Leftrightarrow$ Il n'existe pas d'entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $X_k(\omega) > X_0(\omega)$

$\Leftrightarrow$ NON$(\exists k \in [\![1, n]\!],\ X_k(\omega) > X_0(\omega))$

$\Leftrightarrow$ $\forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k(\omega) \leqslant X_0(\omega)$

$\Leftrightarrow$ $\max\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) \leqslant X_0(\omega)$

$\Leftrightarrow$ L'événement $\left[\max\left(X_1, \ldots, X_n\right) \leqslant X_0\right]$ est réalisé par ω

$\Leftrightarrow$ L'événement $[Y_n \leqslant X_0]$ est réalisé par ω

$$\boxed{\text{On en conclut : } [Z > n] \cup [Z = 0] = [Y_n \leqslant X_0].}$$

□

b) Montrer : $[Z=0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leqslant X_0]$, puis établir : $\mathbb{P}\big([Z=0]\big) = 0$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$[Z > k] \cup [Z = 0] \; = \; [Y_k \; \leqslant \; X_0]$$
On en conclut :
$$\begin{aligned} \bigcap_{k=1}^{+\infty} [Y_k \; \leqslant \; X_0] \; &= \; \bigcap_{k=1}^{+\infty} \Big([Z > k] \cup [Z = 0] \Big) \\ &= \; [Z=0] \; \cup \; \Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [Z > k] \Big) \\ &= \; [Z=0] \; \cup \; \varnothing \qquad\qquad\qquad (*) \\ &= \; [Z=0] \end{aligned}$$

- Il reste alors à démontrer la propriété $(*)$, à savoir : $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [Z>k] = \varnothing$.
Remarquons tout d'abord :
$$\begin{aligned} (*) \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{\bigcap_{k=1}^{+\infty} [Z>k]} \; = \; \overline{\varnothing} \\ &\Leftrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} \overline{[Z>k]} \; = \; \Omega \\ &\Leftrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] \; = \; \Omega \end{aligned}$$
Démontrons cette dernière égalité. On procède par double inclusion.
$(\subset)$ Comme pour tout $k \in N^*$, $[Z \leqslant k] \in \mathscr{A}$, on a : $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] \in \mathscr{A}$.
$$\boxed{\text{En particulier, on a donc : } \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] \subset \Omega.}$$
$(\supset)$ Comme $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors la famille $\big([Z=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
On a donc :
$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} [Z=k] \; = \; \Omega$$
Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $[Z \leqslant k] \; \supset \; [Z=k]$. On en déduit :
$$\begin{aligned} & & \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] \; &\supset \; \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z=k] \\ &\text{donc} & [Z=0] \; \cup \; \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] \; &\supset \; [Z=0] \; \cup \; \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z=k] \\ &\text{donc} & \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] \; &\supset \; [Z=0] \; \cup \; \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z=k] \qquad \textit{(car } [Z=0] \; \subset \; \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k]\textit{)} \\ & & & \; \bigcup_{k=0}^{+\infty} [Z=k] \; = \; \Omega \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On en conclut : } \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] \; \supset \; \Omega.}$$

- Finalement : $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [Z \leqslant k] = \Omega$. Ainsi, la propriété $(*)$ est bien vérifiée.

$$\boxed{\text{On a donc bien : } [Z = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leqslant X_0].}$$

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z=0]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leqslant X_0]\right) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} [Y_k \leqslant X_0]\right) && \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)} \\
&= \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\big([Y_N \leqslant X_0]\big) && \textit{(car } \big([Y_k \leqslant X_0]\big)_{k \in \mathbb{N}^*} \textit{ est une suite décroissante d'événements)}
\end{aligned}$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $[Y_{k+1} \leqslant X_0] \subset [Y_k \leqslant X_0]$. Démontrons-le.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in [Y_{k+1} \leqslant X_0]$. On a alors : $Y_{k+1}(\omega) \leqslant X_0(\omega)$. Or :

$$\begin{aligned}
Y_k(\omega) &= \max\big(X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)\big) \\
&\leqslant \max\big(X_1(\omega), \dots, X_k(\omega), X_{k+1}(\omega)\big) \leqslant X_0(\omega)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\omega \in [Y_k \leqslant X_0]$.

$$\boxed{\text{La suite } \big([Y_k \leqslant X_0]\big)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est bien une suite décroissante d'événements.}}$$

- On a alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y_N \leqslant X_0]\big) &= \mathbb{P}\big([Y_N - X_0 \leqslant 0]\big) \\
&= \int_{-\infty}^{0} h_N(t)\, dt && \textit{(car } h_N \textit{ est une densité de la v.a.r. } Y_N - X_0\textit{)} \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{N+1}\, \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda t}\, dt \\
&= \frac{1}{N+1} \int_{+\infty}^{0} \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda (-u)} (-\, du) && \textit{(en posant le changement de variable } \boxed{u = -t}\textit{)} \\
&= \frac{1}{N+1} \int_{0}^{+\infty} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda u}\, du \\
&= \frac{1}{N+1} \int_{0}^{+\infty} f_{X_0}(u)\, du && \textit{(car } X_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\
&= \frac{1}{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_0}(u)\, du && \textit{(car } f_{X_0} \textit{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\
&= \frac{1}{N+1} \times 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([Y_N \leqslant X_0]\big) = \frac{1}{N+1}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\big([Z=0]\big) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} = 0.}$$

□

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \mathbb{P}\big([Z > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > n]\big)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} [Z > n-1] & = & [Z \geqslant n] & \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & [Z = n] \cup [Z > n] & \end{array}$$

Les événements $[Z = n]$ et $[Z > n]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big([Z > n-1]\big) = \mathbb{P}\big([Z = n]\big) + \mathbb{P}\big([Z > n]\big)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \mathbb{P}\big([Z > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > n]\big).}$$

Commentaire

L'égalité démontrée dans cette question est vérifiée pour toute v.a.r. à valeurs entières. C'est une propriété classique qu'il faut connaître (elle ne sera pas forcément rappelée) et savoir démontrer.

□

d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $[X = n]$ et $[Z = n]$ ont même probabilité.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rrcll} & [Z > n] \cup [Z = 0] & = & [Y_n \leqslant X_0] & \textit{(d'après la question 4.a))} \\ \text{donc} & \mathbb{P}\big([Z > n] \cup [Z = 0]\big) & = & \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant X_0]\big) & \\ & & = & \dfrac{1}{n+1} & \textit{(d'après la question 4.b))} \end{array}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([Z > n] \cup [Z = 0]\big) & = & \mathbb{P}\big([Z > n]\big) + \mathbb{P}\big([Z = 0]\big) & \textit{(car } [Z > n] \textit{ et } [Z = 0] \textit{ sont incompatibles)} \\ & = & \mathbb{P}\big([Z > n]\big) & \textit{(car } \mathbb{P}\big([Z = 0]\big) = 0 \textit{ d'après la question 4.b))} \end{array}$$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([Z = n]\big) & = & \mathbb{P}\big([Z > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > n]\big) & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)+1} - \dfrac{1}{n+1} & \textit{(vrai si } n-1 \in \mathbb{N}^* \textit{ d'après la question 4.b))} \\ & = & \dfrac{(n+1)-n}{n\,(n+1)} & \\ & = & \dfrac{1}{n\,(n+1)} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \mathbb{P}\big([X = n]\big).}$$

- Il reste à démontrer : $\mathbb{P}\big([Z=1]\big) = \mathbb{P}\big([X=1]\big)$.

  Comme $Z(\Omega) = \mathbb{N}$, la famille $\big([Z=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
  On en déduit :
  $$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z=k]\big) = 1$$
  Finalement, en réordonnant :
  $$\begin{array}{rcll}
  \mathbb{P}\big([Z=1]\big) & = & 1 - \Big(\cancel{\mathbb{P}\big([Z=0]\big)} + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z=k]\big)\Big) & \\
  & = & 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k]\big) & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}\big([Z=k]\big) = \mathbb{P}\big([X=k]\big)\textit{)} \\
  & = & 1 - \Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k]\big) - \mathbb{P}\big([X=1]\big)\Big) & \\
  & = & \cancel{1} - \Big(\cancel{1} - \mathbb{P}\big([X=1]\big)\Big) & \textit{(car la famille } \big([X=k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*} \textit{ est un système complet d'événements)} \\
  & = & \mathbb{P}\big([X=1]\big) &
  \end{array}$$
  $$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Z=n]\big) = \mathbb{P}\big([X=n]\big).}$$

□

5. Informatique.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-U)$ et on admet que V est une variable aléatoire.
Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)$, de sorte que $V = h(U)$.
  Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, on considère : $U(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :
  $$\begin{array}{rcll}
  V(\Omega) & = & \big(h(U)\big)(\Omega) \ = \ h\big(U(\Omega)\big) \ = \ h\big([0,1[\big) & \\
  & = & \Big[h(0), \displaystyle\lim_{x\to 1} h(x)\Big[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\textit{)} \\
  & = & [0,+\infty[&
  \end{array}$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } V(\Omega) = [0,+\infty[.}$$

Commentaire

Comme ce n'est pas le coeur de la question, il n'est pas nécessaire de faire l'étude détaillée de la fonction h. On présente ici rapidement les éléments permettant cette étude :

× la fonction h est dérivable (donc en particulier continue) sur $[0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats.

× soit $x \in]0,1[$.
$$h'(x) \ = \ -\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{1-x}\right) \ = \ \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$
La fonction h est donc strictement croissante sur $[0,1[$.

- Déterminons la fonction de répartition de W.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x < 0$, alors $[V \leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [0, +\infty[$. Ainsi :
  $$F_V(x) = \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  × Si $x \in [0, +\infty[$:
  $$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([\ln(1-U) \geqslant -\lambda x]) && \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) && \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) \\ &= F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \\ &= 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} && \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{ et } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\,]-\infty, 0[\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
  Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r.

$$\boxed{\text{On en conclut : } V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$$

Commentaire

- On a démontré, lors de l'étude de $V(\Omega)$, que h réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$. Il est possible de déterminer l'expression de $h^{-1} : [0,+\infty[\to [0,1[$.
  Pour ce faire, on remarque que pour tout $x \in [0,1[$ et $y \in [0,+\infty[$, on a :
  $$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-x) \\ &\Leftrightarrow x = 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, y} \\ &\Leftrightarrow x = h^{-1}(y) \end{aligned}$$
  On démontre ainsi que h^{-1} a pour expression : $h^{-1} : x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}$.
- On retrouve ici l'expression de la quantité $1-\mathrm{e}^{-\lambda\, x}$ apparaissant à la fin de la résolution de la question. Ce n'est pas surprenant car la méthode utilisée ici consiste justement à faire apparaître, étape par étape, la quantité $h^{-1}(x)$. Plus précisément, on a :
  $$F_V(x) = \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\big([h(U) \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\big(\left[U \leqslant h^{-1}(x)\right]\big) = F_U\big(h^{-1}(x)\big)$$
  On comprend mieux pourquoi cette manière de procéder est appelée **méthode d'inversion**. □

b) Écrire une fonction **Scilab** dont l'en-tête est `function z = simuZ()` qui simule la variable aléatoire Z.

Démonstration.

```
function z = simuZ()
    u1 = rand()
    u2 = rand()
    t = log(1-u1) / log(1-u2)
    z = floor(t) + 1
endfunction
```

□