

DS9

Exercice

On désigne par id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 , et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie I : Étude d'un endomorphisme de \mathbb{R}^3

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Calculer $A^2 - 3A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
- b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
- c) En **Scilab**, l'instruction `r = rank(M)` permet de stocker dans la variable `r` le rang de la matrice `M`. On considère le programme suivant :

```
1 A = [1, 0, 0; -2, 3, -2; -1, 1, 0]
2 r1 = rank(A - eye(3,3))
3 r2 = rank(A - 2 * eye(3,3))
```

On place ci-dessous le résultat des instructions qui permettent d'obtenir les valeurs `r1` et `r2` dans la console.

```
--> r1
r1 =
1.

--> r2
r2 =
2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés ?

- d) Déterminer une base (u_1, v_1) de $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$. Le réel λ_1 est-il valeur propre de f ?
On choisira les vecteurs u_1 et v_1 de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.
 - e) De même, déterminer une base (v_2) de $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. Le réel λ_2 est-il valeur propre de f ?
On choisira v_2 de façon que ses composantes soient des entiers naturels les plus petits possible.
2. a) Justifier que la famille (u_1, v_1, v_2) est une base de \mathbb{R}^3 .
Quelle est la matrice représentative de f dans cette base ?
 - b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 .
Déterminer, en fonction de a, b, c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) .

3. Utiliser le polynôme annulateur obtenu en question 1. pour déterminer A^{-1} en fonction de A et I .

Partie II : Étude d'une base de \mathbb{R}^n

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$ et soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . On considère f un endomorphisme de E . On suppose :

- × f diagonalisable,
- × f possède p valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux à deux distinctes.

Dans la suite, on note \mathcal{B}' une base dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale notée D . On note id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^n .

4. a) On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer :

$$(D - \lambda_1 I_n) \dots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

b) En déduire un polynôme annulateur de f .

Pour tout entier $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit le polynôme $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

5. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

b) Montrer que (L_1, \dots, L_p) est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Établir alors : $\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], P = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) L_k$.

d) En déduire : $\sum_{k=1}^p L_k = 1$. Que vaut $\sum_{k=1}^p L_k(f)$? Si $x \in E$, que vaut $\sum_{k=1}^p (L_k(f))(x)$?

6. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

a) Démontrer : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (f - \lambda_k \text{id}) \circ (f - \lambda_i \text{id}) = (f - \lambda_i \text{id}) \circ (f - \lambda_k \text{id})$.

b) Écrire $(f - \lambda_k \text{id}) \circ L_k(f)$ sous forme d'une composée de p applications linéaires.
En déduire que pour tout $x \in E$, $(L_k(f))(x)$ est un élément de $\text{Ker}(f - \lambda_k \text{id})$.

c) En combinant le résultat de la question précédente et celui de la question 5., que démontre-t-on?

Problème

- Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X , et $\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de deux v.a.r. X et Y .
- Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X .
- **On admet** que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.
- Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes si pour tout n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) de réels, les événements $[X_1 \leq x_1], [X_2 \leq x_2], \dots, [X_n \leq x_n]$ sont indépendants.
- L'objet du problème est double. D'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométriques et exponentielles, d'autre part mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle. La partie II est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle /72

1. a) Rappeler la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$.

Établir pour tout n de \mathbb{N}^* la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

On pose alors $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ et pour tout n de \mathbb{N}^* $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

• **1 pt** : $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ car $f_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ est une densité de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

• **1 pt** : $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$

• **3 pts** : critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives

× **1 pt** : $t^n e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$

× **1 pt** : $\forall t \in [1, +\infty[, t^n e^{-t} \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$

× **1 pt** : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

b) Soit n un entier de \mathbb{N}^* . À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} . En déduire la valeur de I_n en fonction de n .

• **1 pt** : IPP + validité car u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, B]$

• **1 pt** : $\int_0^B t^n e^{-t} dt = -B^n e^{-B} + n \int_0^B t^{n-1} e^{-t} dt$

• **1 pt** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n I_{n-1}$

- **3 pts** : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$
- × **1 pt** : initialisation
- × **2 pts** : hérédité

Soit λ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $\frac{1}{\lambda}$).

On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

- **2 pts** : **1 pt par relation**

3. a) Rappeler sans démonstration les valeurs de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leq x])$, pour tout réel x .

- **1 pt** : $\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}$
- **1 pt** : $F_{X_1} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$.

- **1 pt** : Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $Y = X_1 - X_2$ admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{\lambda}$ et $\mathbb{E}(Y) = 0$
- **1 pt** : $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{2}{\lambda^2}$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{2}{\lambda^2}$

4. Déterminer pour tout réel z , $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

- **1 pt** : $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- **1 pt** : $\forall x \in]-\infty, 0[, F_Z(x) = 0$
- **3 pts** : $\forall x \in [0, +\infty[, F_Z(x) = 1 - e^{-2\lambda x}$
 - × **1 pt** : $F_Z(x) = 1 - \mathbb{P}([Z > x]) = 1 - \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) = 1 - \mathbb{P}([X_1 > x]) \times \mathbb{P}([X_2 > x])$ (car X_1 et X_2 sont indépendantes)
 - × **1 pt** : $F_Z(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^2$ car X_1 et X_2 ont même loi
 - × **1 pt** : $F_Z(x) = 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda x}))^2$ d'après 3.a) car $x \geq 0$
- **1 pt** : $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$
- **1 pt** : $f_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda e^{-2\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- **1 pt** : $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2\lambda}$ et $\mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4\lambda^2}$

5. a) Montrer que pour tout réel t , on a : $F_T(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

Exprimer pour tout réel t , $f_T(t)$.

- **1 pt** : $\forall x \in]-\infty, 0[, F_T(x) = 0$

- **2 pts** : $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_T(x) = (1 - e^{-\lambda x})^2$
 - × **1 pt** : indépendance de X_1 et X_2
 - × **1 pt** : fin du calcul
- **2 pts** : T est une v.a.r. à densité
 - × **1 pt** : f_T continue sur \mathbb{R}
 - × **1 pt** : f_T de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0
- **2 pts** : $f_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 - × **1 pt** : cas $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
 - × **1 pt** : on choisit $f_T(0) = 0$

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$. Montrer que $\mathbb{E}(T) = \frac{3}{2\lambda}$ et $\mathbb{V}(T) = \frac{5}{4\lambda^2}$.
 (on pourra utiliser des changements de variables affines)

- **1 pt** : d'après la question 2. : $T = X_1 + X_2 - Z$. On en déduit que la v.a.r. T admet une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- **1 pt** : $\mathbb{E}(T) = \frac{3}{2\lambda}$
- **1 pt** : $\mathbb{E}(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 f_T(t) dt$ (car f_T est nulle en dehors de $[0, +\infty[$)
- **1 pt** : $\mathbb{E}(T^2) = 2 \int_0^{+\infty} t^2 \times \lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^{+\infty} t^2 \times 2\lambda e^{-2\lambda t} dt = 2\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(U^2)$ où $U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$
- **1 pt** : $\mathbb{E}(T^2) = 2 \left(\mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2 \right) - \left(\mathbb{V}(U) + (\mathbb{E}(U))^2 \right)$ (par formule de Koenig-Huygens)
- **1 pt** : $\mathbb{E}(T^2) = \frac{7}{2\lambda^2}$
- **1 pt** : $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2 = \frac{5}{4\lambda^2}$

6. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T . Montrer que $r = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

- **1 pt** : $r = \frac{\text{Cov}(Z, T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)} \sqrt{\mathbb{V}(T)}}$
- **1 pt** : $\mathbb{V}(T + Z) = \mathbb{V}(Z) + 2 \text{Cov}(Z, T) + \mathbb{V}(T)$
- **1 pt** : $\text{Cov}(Z, T) = \frac{1}{2} (\mathbb{V}(Z + T) - \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(T)) = \frac{1}{2} (\mathbb{V}(X_1 + X_2) - \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(T))$ (car $T + Z = X_1 + X_2$)
- **1 pt** : $\text{Cov}(Z, T) = \frac{1}{4\lambda^2}$
- **1 pt** : d'après 4. $\sqrt{\mathbb{V}(Z)} = \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}} = \frac{1}{2\lambda}$
- **1 pt** : d'après 5.b) $\sqrt{\mathbb{V}(T)} = \sqrt{\frac{5}{4\lambda^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\lambda}$

7. a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.

- 1 pt : $Y(\Omega) = \mathbb{R}$ et $|Y|(\Omega) = [0, +\infty[$

b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.

- 1 pt : $V(\Omega) =]-\infty, 0]$ (où $V = -X_2$)
- 2 pts : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_V(x) = e^{\lambda x}$
 - × 1 pt : X_2 est une v.a.r. à densité
 - × 1 pt : $-x \geq 0$
- 1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[$, $F_V(x) = 1$
- 2 pts : $V = -X_2$ est une v.a.r. à densité
 - × 1 pt : F_V continue sur \mathbb{R}
 - × 1 pt : F_V de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0
- 2 pts : $f_V : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
 - × 1 pt : cas $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
 - × 1 pt : on choisit $f_V(0) = 0$

c) Montrer que pour tout réel y , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ (on distinguera les deux cas : $y \geq 0$ et $y < 0$).

- 1 pt : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$ car f_{X_1} est nulle en dehors de $[0, +\infty[$
- 3 pts : cas $y < 0$
 - × 1 pt : $\int_0^B f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{2} \int_0^B 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$
 - × 1 pt : l'intégrale $\int_0^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$ est convergente (et vaut 1) car c'est le moment d'ordre 0 de $U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt$ est convergente
 - × 1 pt : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$
- 4 pts : cas $y \geq 0$
 - × 1 pt : $f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) \neq 0 \Leftrightarrow t > y$
 - × 1 pt : $\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \int_y^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) dt = \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{2} \int_y^B 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$
 - × 1 pt : comme $\int_0^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$ est convergente (cf point précédent), alors $\int_y^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$ est aussi convergente.
 - × 1 pt : $\int_y^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt = \mathbb{P}([U \geq y]) = e^{-2\lambda y}$

d) Établir que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur \mathbb{R} ; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y .

• **1 pt** : $y \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$ continue sur \mathbb{R}

• **1 pt** : $\forall y \in \mathbb{R}, \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|} \geq 0$

• **2 pts** : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy$ est convergente et vaut 1.

× **1 pt** : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy$ est convergente (et vaut 1) car c'est le moment

d'ordre 0 de $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

× **1 pt** : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy$ est convergente et la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est paire

e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

• **1 pt** : $\forall x \in]-\infty, 0[, F_{|Y|}(x) = 0$

• **3 pts** : $\forall x \in [0, +\infty[, F_{|Y|}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

× **1 pt** : $F_{|Y|}(x) = \mathbb{P}([-x \leq Y \leq x]) = \int_{-x}^x f_{|Y|}(t) dt$

× **1 pt** : $F_{|Y|}(x) = 2 \int_0^x f_{|Y|}(t) dt$ (car $f_{|Y|}$ est paire (cf question précédente))

× **1 pt** : fin du calcul

• **1 pt** : $|Y| \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Partie II. Loi géométrique

Non proposée ici.

Partie III. Convergences /76

Dans les questions 12 à 15, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.

Pour n élément de \mathbb{N}^* , on considère un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ .

On pose pour tout n de \mathbb{N}^* : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

12. Calculer pour tout n de \mathbb{N}^* , $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$, $\mathbb{E}(J_n)$ et $\mathbb{V}(J_n)$.

- 1 pt : S_n et J_n admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- 1 pt : par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{\lambda}$
- 1 pt : $\mathbb{E}(J_n) = n$
- 1 pt : $\mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$ car X_1, \dots, X_n sont indépendantes
- 1 pt : $\mathbb{V}(J_n) = n$

13. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

a) À l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existence de $\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right)$ et de $\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.

- 1 pt : par théorème de transfert, $\frac{1}{J_n}$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} f_{J_n}(x) dx$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer sa convergence car : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{x^2} f_{J_n}(x) \geq 0$
- 1 pt : $\frac{1}{x^2} f_{J_n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-3} e^{-x}$. Or, d'après 1.a), $I_{n-3} = \int_0^{+\infty} x^{n-3} e^{-x} dx$ est convergente (car $n-3 \in \mathbb{N}$). Ainsi $\frac{1}{J_n}$ admet un moment d'ordre 2.
- 1 pt : d'après 1.b), $\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n^2}\right) = \frac{1}{(n-1)!} I_{n-3} = \frac{1}{(n-1)!} (n-3)! = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$
- 1 pt : $\frac{1}{J_n}$ admet un moment d'ordre 2 et donc une espérance
- 1 pt : $\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right) = \frac{1}{(n-1)!} I_{n-2} = \frac{1}{(n-1)!} (n-2)! = \frac{1}{n-1}$

b) On pose pour tout n supérieur ou égal à 3 : $\widehat{\lambda}_n = \frac{n}{S_n}$. Justifier que $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur de λ . Est-il sans biais? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda}_n$ en λ .

- 1 pt : $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur de λ
- 1 pt : $\widehat{\lambda}_n = n \lambda \frac{1}{J_n}$ admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée linéaire de $\frac{1}{J_n}$ qui en admet une

- **1 pt** : $\mathbb{E}_\lambda(\widehat{\lambda}_n) = \frac{n}{n-1} \lambda$ par linéarité de l'espérance. La v.a.r. $\widehat{\lambda}_n$ n'est donc pas un estimateur sans biais de λ
- **1 pt** : décomposition biais-variance
- **2 pts** : en utilisant 2.a), $r_\lambda(\widehat{\lambda}_n) = \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} \lambda^2$
- **1 pt** : $r_\lambda(\widehat{\lambda}_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$. D'où : $r_\lambda(\widehat{\lambda}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$

14. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α . On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

a) Énoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

- **1 pt** : énoncé TCL
- **2 pts** : $\overline{X}_n^* = N_n$
- **1 pt** : hypothèses du TCL vérifiées dans cadre de l'exercice

b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement : $\mathbb{P}([-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha]) = 1 - \alpha$.

- **1 pt** : comme $N_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha]) = \mathbb{P}([-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha])$
- **1 pt** : $\mathbb{P}([-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha]) = 2\Phi(u_\alpha) - 1$
- **1 pt** : $2\Phi(u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$

c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle $\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda}_n \right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α . On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda}_n$ sur le n -échantillon.

- **1 pt** : $\mathbb{P}([-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{S_n}(\sqrt{n} - u_\alpha) \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{n}}{S_n}(\sqrt{n} + u_\alpha)\right]\right)$ car $\left(\frac{\sqrt{n}}{S_n}\right)(\Omega) \subset]0, +\infty[$
- **1 pt** : $\mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{S_n}(\sqrt{n} - u_\alpha) \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{n}}{S_n}(\sqrt{n} + u_\alpha)\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\widehat{\lambda}_n \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \leq \widehat{\lambda}_n \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right)$

15. Avec le n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) , on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α .

a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ .
 Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?

- **1 pt** : Φ continue sur \mathbb{R} car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité
- **1 pt** : Φ strictement croissante sur \mathbb{R}
- **1 pt** : $\Phi(]-\infty, +\infty[) =]0, 1[$ car Φ est une fonction de répartition. Le domaine de définition de Φ^{-1} est donc $]0, 1[$

b) Établir l'égalité $\beta = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible ?

- **1 pt** : comme la longueur du nouvel $IC_{1-\beta}(\lambda)$ est k fois plus petite que celle de $IC_{1-\alpha}(\lambda)$, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\widehat{\lambda}_n \left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \leq \widehat{\lambda}_n \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\right]\right) = 1 - \beta$

- **1 pt** : $\mathbb{P} \left(\left[\hat{\lambda}_n \left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \leq \lambda \leq \hat{\lambda}_n \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \right) \right] \right) = \mathbb{P} \left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leq N_n \leq \frac{u_\alpha}{k} \right] \right)$
- **1 pt** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leq N_n \leq \frac{u_\alpha}{k} \right] \right) = 2\Phi \left(\frac{u_\alpha}{k} \right) - 1$
- **1 pt** : on en déduit $1 - \beta = 2\Phi \left(\frac{u_\alpha}{k} \right) - 1$ d'où $\beta = 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{u_\alpha}{k} \right) \right) = 2\Phi \left(-\frac{u_\alpha}{k} \right)$
- **1 pt** : $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ donc $\frac{\alpha}{2} = 1 - \Phi(u_\alpha) = \Phi(-u_\alpha)$ d'où $u_\alpha = -\Phi^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ ainsi $\beta = 2\Phi \left(\frac{1}{k} \Phi^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)$
- **2 pts** : $\beta > \alpha$
 - × **1 pt** : $\frac{1}{k} \Phi^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) > \Phi^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ car $k > 1$ et $\Phi^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) < 0$ (car $\alpha < 1$)
 - × **1 pt** : par stricte croissance de Φ sur \mathbb{R} , $\beta > \alpha$

Dans les questions 16 à 18, on suppose que $\lambda = 1$.

16. On pose pour tout n de \mathbb{N}^* : $T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , pour tout réel x positif ou nul, on pose :

$$g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t) dt \quad \text{et} \quad h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t) dt$$

a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et $g_n(x)$.

- **1 pt** : IPP car $u : t \mapsto t$ et $v = F_{T_n}$ de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, x]$
 Mettre le point même si la régularité de v n'est pas démontrée
- **1 pt** : $h_n(x) = x F_{T_n}(x) - g_n(x)$

b) Déterminer pour tout réel t , l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t .

Établir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} F_{T_n}(x)$.

- **0 pt** : $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- **1 pt** : $\forall x \in]-\infty, 0[, F_{T_n}(x) = 0$
- **2 pts** : $\forall x \in [0, +\infty[, F_{T_n}(x) = (1 - e^{-x})^n$
 - × **1 pt** : indépendance de X_1, \dots, X_n
 - × **1 pt** : reste du calcul

- **1 pt** : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} F_{T_n}(x)$

c) En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* , pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de $x, F_{T_1}(x), F_{T_2}(x), \dots, F_{T_n}(x)$.

- **1 pt** : sommation + télescopage pour obtenir $g_1(x) - g_n(x) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x)$
- **1 pt** : $g_1(x) = x - F_{T_1}(x)$
- **1 pt** : $g_n(x) = x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x)$

d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt**

e) Déduire des questions c) et d) l'existence de $\mathbb{E}(T_n)$ et montrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- **1 pt** : la v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{T_n}(t) dt$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer qu'elle est convergente car c'est un calcul de moment du type $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_{T_n}(t) dt$
- **1 pt** : comme $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{T_n}(t) dt = \int_0^{+\infty} t f_{T_n}(t) dt$. Donc T_n admet une espérance si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x)$ existe
- **1 pt** : $h_n(x) = x(F_{T_n}(x) - 1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x)$
- **1 pt** : d'après la qst précédente $x(F_{T_n}(x) - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -nx e^{-x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} -nx e^{-x} = 0$ par croissances comparées. D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(F_{T_n}(x) - 1) = 0$
- **1 pt** : comme F_{T_k} est une fonction de répartition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} F_{T_k}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (car c'est une somme finie)

17. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n \geq 1}$ définie par : pour tout n de \mathbb{N}^* , $G_n = T_n - \mathbb{E}(T_n)$.
On pose pour tout n de \mathbb{N}^* : $\gamma_n = -\ln(n) + \mathbb{E}(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a : $F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$.

- **1 pt** : $G_n(\Omega) \subset [-\mathbb{E}(T_n), +\infty[$
- **1 pt** : comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\mathbb{E}(T_n) = -\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, x \geq -\mathbb{E}(T_n)$. Soit $n \geq n_0$.
- **1 pt** : $F_{G_n}(x) = F_{T_n}(x + \mathbb{E}(T_n))$
- **1 pt** : $F_{G_n}(x) = (1 - e^{-(x+\mathbb{E}(T_n))})^n$ car $x + \mathbb{E}(T_n) \geq 0$
- **1 pt** : $F_{G_n}(x) = (1 - e^{-(x+\gamma_n+\ln(n))})^n = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$

b) En déduire que pour tout x réel, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$.

- **1 pt** : par continuité de exp en $-(x+\gamma)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(x+\gamma_n)} = e^{-(x+\gamma)}$
- **1 pt** : comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)} = 0$, $\ln\left(1 - \frac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} e^{-(x+\gamma)}$
- **1 pt** : conclusion par continuité de exp en $-e^{-(x+\gamma)}$

c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F_G : x \mapsto e^{-e^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

- **1 pt** : F_G continue sur \mathbb{R}
- **1 pt** : F_G dérivable sur \mathbb{R} et $F'_G : x \mapsto e^{-(x+\gamma)} e^{-e^{-(x+\gamma)}} > 0$. Donc F_G croissante sur \mathbb{R}
- **1 pt** : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_G(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_G(x) = 1$
- **1 pt** : F_G de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

- **1 pt** : d'après 6.b), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{G_n}(x) = F_G(x)$. D'où : $G_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} G$

18. a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y = F_X(X)$.

- **1 pt** : F_X est continue (en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité) et strictement croissante sur \mathbb{R} . Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$ (car c'est une fonction de répartition)

- **1 pt** : $Y(\Omega) =]0, 1[$

- **1 pt** : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_Y(x) = 1$

- **2 pts** : $\forall x \in]0, 1[$, $F_Y(x) = x$

× **1 pt** : $F_Y(x) = \mathbb{P}([F_X(X) \leq x]) = \mathbb{P}([X \leq F_X^{-1}(x)])$ car F_X^{-1} strictement croissante sur $]0, 1[$

× **1 pt** : $F_Y(x) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x$

- **1 pt** : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête **Gumbel** qui permet de simuler la variable aléatoire G .

On supposera que la constante γ est définie en langage **Scilab** par une constante **gamma**.

On rappelle que la fonction **Scilab** **rand()** permet de simuler la loi uniforme sur $]0, 1[$.

- **2 pts** : $F_X^{-1} : x \mapsto -\ln(-\ln(x)) - \gamma$

- **1 pt** : $F_X^{-1}(Y)$ suit la même loi que X d'après la question précédente

- **3 pts** : fonction **Scilab** (1 pt par ligne)

```
1  function x = Gumbel()
2      y = rand()
3      x = -log( -log(y) ) - gamma
4  endfunction
```