DS9

Exercice

On désigne par id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie I : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Calculer $A^2 - 3\,A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$A^2 - 3\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & -6 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 - 3\,A = -2\,I}$$

Commentaire

Cette première question est extrêmement classique. On la retrouve très fréquemment en première question des énoncés des épreuves du `TOP5`. La réponse attendue à ce calcul est généralement l'une des deux suivantes :

× $A^2 - 3\,A = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
On en déduit alors que $Q(X) = X^2 - 3\,X$ est un polynôme annulateur de A.

× $A^2 - 3\,A = \alpha\,I$ (pour un réel α).
On en déduit alors que que $Q(X) = X^2 - 3\,X - \alpha$ est un polynôme annulateur de A.
C'était le cas ici.

Il est important de mener à bien ce premier calcul car l'obtention d'un polynôme annulateur est généralement une question charnière pour le reste de l'étude de l'endormorphisme f. □

b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

Démonstration.
D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = X^3 - 3X + 2 = (X-1)\,(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{1, 2\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}. \text{ On note alors } \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 2.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :
  $$(\alpha\, Q)(A) \ = \ \alpha\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
  $$R(A) \ = \ (A - 5\, I)\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

☐

c) En **Scilab**, l'instruction `r = rank(M)` permet de stocker dans la variable `r` le rang de la matrice `M`. On considère le programme suivant :

```
A = [1, 0, 0; -2, 3, -2; -1, 1, 0]
r1 = rank(A - eye(3,3))
r2 = rank(A - 2 * eye(3,3))
```

On place ci-dessous le résultat des instructions qui permettent d'obtenir les valeurs `r1` et `r2` dans la console.

```
--> r1
   r1  =
       1.

--> r2
   r2  =
       2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés ?

Démonstration.

- Tout d'abord, remarquons :
  × $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f - \mathrm{id}\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) = A - I$
  × $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f - 2\,\mathrm{id}\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - 2\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) = A - 2\,I$

  Ainsi, $A - I$ (resp. $A - 2\,I$) est la matrice représentative de $f - \mathrm{id}$ (resp. $f - 2\,\mathrm{id}$) dans la base $\mathscr{B}$.

- Rappelons que l'instruction **Scilab** `eye(3,3)` permet d'obtenir la matrice identité d'ordre 3. On peut alors conclure du script **Scilab** :
  - $\times$ $\mathrm{rg}\big(f - \mathrm{id}\big) = \mathrm{rg}\big(A - I\big) = 1$.
  - $\times$ $\mathrm{rg}\big(f - 2\,\mathrm{id}\big) = \mathrm{rg}\big(A - 2\,I\big) = 2$.
- On obtient alors, par le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathbb{R}^3\big) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 1 \end{array}$$

Ainsi : $\dim\big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})\big) = 3 - 1 = 2$. En particulier, comme $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on peut conclure que $\lambda_1 = 1$ est valeur propre de f.

En agissant de même pour λ_2, on obtient : $\dim\big(\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})\big) = 3 - 2 = 1$. En particulier, comme $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on peut conclure que $\lambda_2 = 2$ est valeur propre de f.

Commentaire

L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$f - \lambda_i\,\mathrm{id} \quad \longleftrightarrow \quad A - \lambda_i\,I$$

Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme.

$\square$

d) Déterminer une base (u_1, v_1) de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\,\mathrm{id})$. Le réel λ_1 est-il valeur propre de f ?
On choisira les vecteurs u_1 et v_1 de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

Démonstration.

- Déterminons $\mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{id}\big)$.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
  Notons alors : $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \operatorname{Ker}\big(f - \mathrm{id}\big) & \Longleftrightarrow & \big(f - \mathrm{id}\big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & \big(A - I\big)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & 0 & = & 0 \\ -2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2\,x & = & -2\,y & + & 2\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

- On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Ker}\big(f - \mathrm{id}\big) & = & \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\} \\
& = & \{(y - z,\, y,\, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \{y \cdot (1,\, 1,\, 0) + z \cdot (-1,\, 0,\, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \operatorname{Vect}((1,\, 1,\, 0), (-1,\, 0,\, 1)) \\
& = & \operatorname{Vect}((1,\, 1,\, 0), (0,\, 1,\, 1))
\end{array}$$

(car on en modifie pas l'espace vectoriel engendré par une famille en ajoutant au $2^{\text{ème}}$ vecteur le 1^{er})

> Comme $\operatorname{Ker}\big(f - \mathrm{id}\big) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, le réel 1 est bien valeur propre de f, d'espace propre associé $E_1(f) = \operatorname{Ker}\big(f - \mathrm{id}\big) = \operatorname{Vect}((1,\, 1,\, 0), (0,\, 1,\, 1))$.

La famille $\mathcal{F}_1 = \big((1,\, 1,\, 0), (0,\, 1,\, 1)\big)$:

× engendre $E_1(f)$,

× est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

> Ainsi, $\mathcal{F}_1 = \big((1,\, 1,\, 0), (0,\, 1,\, 1)\big)$ est une base de $E_1(f)$.
> On note $u_1 = (1,\, 1,\, 0)$ et $v_1 = (0,\, 1,\, 1)$.

Commentaire

Il est explicitement demandé dans la question de chercher des vecteurs u_1 et v_1 de forme particulière. À l'aide de la rédaction habituelle, on obtient $E_1(f) = \operatorname{Vect}(w_1, w_2)$ avec des vecteurs w_1 et w_2 qui ne sont pas forcément sous la forme attendue. Il suffit alors de procéder à des manipulations algébriques simples (et qui ne modifient pas l'espace vectoriel engendré) sur la famille $\mathcal{F} = \big(w_1, w_2\big)$ afin d'obtenir le résultat souhaité.

□

e) De même, déterminer une base (v_2) de $\text{Ker}(f - \lambda_2\, \text{id})$. Le réel λ_2 est-il valeur propre de f ?
On choisira v_2 de façon que ses composantes soient des entiers naturels les plus petits possible.

Démonstration.

- Déterminons $\text{Ker}\big(f - 2\,\text{id}\big)$.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.
  Notons alors : $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \text{Ker}\big(f - 2\,\text{id}\big) & \iff & \big(f - 2\,\text{id}\big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & \big(A - 2\,I\big)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & & & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & & & = & 0 \\ & & y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & & & = & 0 \\ & & y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & & & = & 0 \\ & & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & & & = & 0 \\ & & y & = & 2\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ker}\big(f - 2\,\text{id}\big) & = & \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \quad \text{et} \quad y = 2\,z\} \\
& = & \{(0,\, 2\,z,\, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (0,\, 2,\, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \text{Vect}\left((0,\, 2,\, 1)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Comme } \text{Ker}\big(f - 2\,\text{id}\big) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}, \text{ le réel 2 est bien valeur propre de } f, \text{ d'espace propre associé } E_2(f) = \text{Ker}\big(f - 2\,\text{id}\big) = \text{Vect}\left((0,\, 2,\, 1)\right).}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \big((0,\, 2,\, 1)\big)$:

× engendre $E_2(f)$,

× est libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_2 \text{ est une base de } E_2(f).}$$

Commentaire

- On a bien déterminé toutes les valeurs propres de g. En effet :
  - × on a montré dans un premier temps : $\mathrm{Sp}(f) \subset \{1, 2\}$. Ainsi, les réels 1 et 2 sont **les seules valeurs propres possibles** de l'endomorphisme g.
  - × on a ensuite démontré que 1 et 2 étaient effectivement des valeurs propres de f.

  On en déduit : $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$.
- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda I$.
  Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 2$.
  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que :
  $(A - 2\,I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :
  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $x = 0$. En effet, si x est non nul, le coefficient en $1^{\text{ère}}$ position de la combinaison linéaire est forcément nul. On prend alors $x = 0$.
  La combinaison linéaire restante est nulle si $y = 2z$.
  En prenant par exemple $z = 1$, on obtient : $E_2(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
  Et l'égalité est vérifiée car ces deux espaces vectoriels sont de même dimension (comme : $\mathrm{rg}(A - 2\,I) = 2$ on peut conclure, par théorème du rang : $\dim\big(E_2(A)\big) = 1$).

□

2. a) Justifier que la famille (u_1, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice représentative de f dans cette base ?

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, v_1, v_2)$ est obtenue par concaténation des familles :
  - × $\mathcal{F}_1 = (u_1, v_1)$, famille libre du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
  - × $\mathcal{F}_2 = (v_2)$, famille libre du sous-espace propre associé à la valeur propre $2 \neq 1$.

Commentaire

- On se sert dans cette question du théorème qui stipule que toute famille obtenue par concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes, est elle-même une famille libre.
- L'énoncé demande de « Justifier » que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes, ce qui explique le choix de rédaction effectué ci-dessus. Il faut toutefois noter qu'il était aussi possible de démontrer la liberté de la famille $\mathcal{F}$ en revenant à la définition. Ce raisonnement est tout aussi rigoureux mais plus long à mettre en place, ce qui provoque une perte de temps pénalisante pour la suite.

Commentaire

Profitons-en pour rappeler la rédaction permettant de démontrer la liberté d'une famille.

Démontrons que la famille (u_1, v_1, v_2) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot v_1 + \lambda_3 \cdot v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. $(*)$

$$\begin{array}{lll}
\text{Or :} \quad (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot (1,1,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,1) + \lambda_3 \cdot (0,2,1) = (0,0,0) \\
& \Longleftrightarrow & (\lambda_1,\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3,\ \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0) \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right. \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

On en conclut que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

- Ainsi, la famille $\mathcal{F} = (u_1, v_1, v_2)$ est :
  - × libre (dans $\mathbb{R}^3$),
  - × telle que : $\text{Card}\big(\mathcal{F}\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

- Déterminons maintenant $\text{Mat}_{(u_1,v_1,v_2)}(f)$.
  - × $f(u_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$ car $u_1 \in E_1(f)$.

    On en conclut : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,v_2)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × $f(v_1) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$ car $v_1 \in E_1(f)$.

    On en conclut : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,v_2)}\big(f(v_1)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × $f(v_2) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$ car $v_2 \in E_2(f)$.

    On en conclut : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,v_2)}\big(f(v_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Mat}_{(u_1,v_1,v_2)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer, en fonction de a, b, c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Démonstration.

- Comme la famille $\mathcal{F} = (u_1, v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot v_1 + \alpha_3 \cdot v_2 \quad (*)$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl}
(*) & \iff & \alpha_1 \cdot (1,1,0) + \alpha_2 \cdot (0,1,1) + \alpha_3 \cdot (0,2,1) = (a,b,c) \\
 & \iff & (\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\,\alpha_3,\ \alpha_2 + \alpha_3) = (a,b,c) \\
 & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & a \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\,\alpha_3 & = & b \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & c \end{array}\right. \\
 & \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & a \\ \alpha_2 + 2\,\alpha_3 & = & -a + b \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & c \end{array}\right. \\
 & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & a \\ \alpha_2 + 2\,\alpha_3 & = & -a + b \\ -\alpha_3 & = & a - b + c \end{array}\right. \\
 & \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_3}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & a \\ \alpha_2 & = & a - b + 2\,c \\ -\alpha_3 & = & a - b + c \end{array}\right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } x = (a,b,c) \text{ a pour coordonnées } (a, a-b+2c, a-b+c) \text{ dans la base } (u_1, v_1, v_2).}$$

□

3. Utiliser le polynôme annulateur obtenu en question ***1.*** pour déterminer A^{-1} en fonction de A et I.

Démonstration.
D'après la question ***1.*** :

$$\begin{array}{lrcl}
 & A^2 - 3\,A + 2\,I & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
\text{donc} & A^2 - 3\,A & = & -2\,I \\
\text{donc} & A\,(A - 3\,I) & = & -2\,I \\
\text{donc} & A\left(-\frac{1}{2}(A - 3\,I)\right) & = & I
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -\frac{1}{2}\,(A - 3\,I) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.}$$

□

Partie II : Étude d'une base de $\mathbb{R}^n$

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant p \geqslant 2$ et soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On considère f un endomorphisme de E. On suppose :

× f diagonalisable,

× f possède p valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ deux à deux distinctes.

Dans la suite, on note $\mathscr{B}'$ une base dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale notée D. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

4. a) On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer :

$$(D - \lambda_1 I_n) \times \cdots \times (D - \lambda_p I_n) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, il existe une base $\mathscr{B}'$ telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale. Rappelons que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de f. Ainsi, à permutation des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ près (ce qui correspond à une permutation des coefficients diagonaux de D), on obtient :

$$D \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_2 & \ddots & & & (0) & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \lambda_2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & (0) & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \lambda_p & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Notons que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, chaque valeur propre λ_i apparaît r_i fois sur la diagonale de D où : $r_i = \dim\big(E_{\lambda_i}(f)\big)$.

- Soit $i \in [\![i, p]\!]$. On obtient alors :

$$D_{\lambda_i} \;=\; D - \lambda_i\, I_n \;=\; \begin{pmatrix}
\lambda_1 - \lambda_i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \lambda_1 - \lambda_i & \ddots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & (*) & \ddots & & & (0) & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & 0 & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & (0) & & & \ddots & (*) & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & \ddots & \lambda_p - \lambda_i & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p - \lambda_i
\end{pmatrix}$$

  Remarquons que, comme $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont 2 à 2 distincts, alors : $\forall j \in [\![1, p]\!] \setminus \{i\}$, $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$. En particulier, les coefficients diagonaux notés $(*)$ dans la matrice ci-dessus sont tous non nuls (il en est de même de $\lambda_1 - \lambda_i$ et $\lambda_p - \lambda_i$).

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
(D - \lambda_1\, I_n) \times \cdots \times (D - \lambda_p\, I_n) \;&=\; \prod_{i=1}^{p} D_{\lambda_i} \\
&=\; \begin{pmatrix}
\prod\limits_{i=1}^{p} (D_{\lambda_i})_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \prod\limits_{i=1}^{p} (D_{\lambda_i})_{2,2} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \prod\limits_{i=1}^{p} (D_{\lambda_i})_{p,p}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  où la dernière égalité est obtenue car les matrices $D_{\lambda_1}, \ldots, D_{\lambda_p}$ sont diagonales.

  Ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $\prod\limits_{i=1}^{p} (D_{\lambda_i})_{j,j} = 0$. En effet, d'après le point précédent, chacun de ces produits comporte (exactement) un terme nul.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } (D - \lambda_1\, I_n) \times \cdots \times (D - \lambda_p\, I_n) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}.}$$ □

b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$(D - \lambda_1\, I_n) \times \cdots \times (D - \lambda_p\, I_n) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

Or D est la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que le polynôme } Q(X) = (X - \lambda_1) \times \cdots \times (X - \lambda_p) \\ \text{est un polynôme annulateur de } f.\end{array}}$$ □

Pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$, on définit le polynôme $L_k(X) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \dfrac{X-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$.

5. Soit $k \in [\![1,p]\!]$.

a) En distinguant les cas $i=k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Deux cas se présentent.

- si $i=k$, alors :

$$L_k(\lambda_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} 1 = 1$$

$$\boxed{L_k(\lambda_k)=1}$$

- si $i \neq k$, alors :

$$L_k(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j} = \frac{\cancel{\lambda_i-\lambda_i}}{\cancel{\lambda_k-\lambda_i}} \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k \\ j \neq i}}^{p} \frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j} = 0$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1,p]\!] \setminus \{k\},\ L_k(\lambda_i)=0}$$

□

b) Montrer que $(L_1,\dots,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $(L_1,\dots,L_p)$ est libre.
Soit $(\mu_1,\dots,\mu_p) \in \mathbb{R}^p$. Supposons :

$$\mu_1 \cdot L_1 + \cdots + \mu_p \cdot L_p = 0_{\mathbb{R}_{p-1}[X]} \qquad (*)$$

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. On en déduit : $\sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k\, L_k(\lambda_i) = 0$. D'où :

$$\begin{array}{lccccccl} & \sum\limits_{k=1}^{i-1} \mu_k\, L_k(\lambda_i) + \mu_i\, L_i(\lambda_i) + \sum\limits_{k=i+1}^{p} \mu_k\, L_k(\lambda_i) & = & 0 & \\ \text{donc} & \sum\limits_{k=1}^{i-1} \mu_k \times 0 + \mu_i \times 1 + \sum\limits_{k=i+1}^{p} \mu_k \times 0 & = & 0 & \textit{(d'après la question précédente)} \\ \text{d'où} & \mu_i & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ceci étant valable pour tout } i \in [\![1,p]\!], \text{ on en déduit que } (L_1,\dots,L_p) \text{ est libre.}}$$

- La famille $(L_1,\dots,L_p)$ est donc :
  × libre,
  × telle que : $\mathrm{Card}\big((L_1,\dots,L_p)\big) = p = \dim\big(\mathbb{R}_{p-1}[X]\big)$.

$$\boxed{\text{La famille } (L_1,\dots,L_p) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X].}$$

□

c) Établir alors : $\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P \ = \ \sum\limits_{k=1}^{p} P(\lambda_k)\ L_k$.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

- Comme $(L_1, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, il existe un unique p-uplet $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :
$$P \ = \ \sum_{k=1}^{p} \mu_k \cdot L_k$$
- Soit $i \in [\![1, p]\!]$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} P(\lambda_i) & = & \sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k \, L_k(\lambda_i) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{i-1} \mu_k L_k(\lambda_i) \ + \ \mu_i \, L_i(\lambda_i) \ + \ \sum\limits_{k=i+1}^{p} \mu_k \, L_k(\lambda_i) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{i-1} \mu_k \times 0 \ + \ \mu_i \times 1 \ + \ \sum\limits_{k=i+1}^{p} \mu_k \times 0 \qquad \textit{(d'après \textbf{5.a})} \\ & = & \mu_i \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot L_k = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) \cdot L_k.}$$

□

d) En déduire : $\sum\limits_{k=1}^{p} L_k = 1$. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{p} L_k(f)$? Si $x \in E$, que vaut $\sum\limits_{k=1}^{p} \big(L_k(f)\big)(x)$?

Démonstration.
On applique le résultat de la question précédente au polynôme $P(X) = 1 \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
On obtient :

$$\begin{array}{ccc} P(X) & = & \sum\limits_{k=1}^{p} P(\lambda_k) \cdot L_k(X) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 1 & & \sum\limits_{k=1}^{p} 1 \cdot L_k(X) \end{array}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} L_k = 1}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{k=1}^{p} L_k(f) = \mathrm{id}_E.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in E,\ \sum_{k=1}^{p} \big(L_k(f)\big)(x) = \mathrm{id}_E(x) = x.}$$

□

6. Soit $k \in [\![1,p]\!]$.

a) Démontrer : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $(f-\lambda_k\,\mathrm{id})\circ(f-\lambda_i\,\mathrm{id}) \ = \ (f-\lambda_i\,\mathrm{id})\circ(f-\lambda_k\,\mathrm{id})$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1,p]\!]$.

× D'une part :

$$(f-\lambda_k\,\mathrm{id})\circ(f-\lambda_i\,\mathrm{id}) \ = \ f^2-\lambda_k\,\mathrm{id}\circ f-\lambda_i\,f\circ\mathrm{id}+\lambda_k\,\lambda_i\,\mathrm{id} \ = \ f^2-(\lambda_k+\lambda_i)\,f+\lambda_k\,\lambda_i\,\mathrm{id}$$

× D'autre part :

$$(f-\lambda_i\,\mathrm{id})\circ(f-\lambda_k\,\mathrm{id}) \ = \ f^2-\lambda_i\,\mathrm{id}\circ f-\lambda_k\,f\circ\mathrm{id}+\lambda_i\,\lambda_k\,\mathrm{id} \ = \ f^2-(\lambda_k+\lambda_i)\,f+\lambda_k\,\lambda_i\,\mathrm{id}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall i \in [\![1,p]\!],\ (f-\lambda_k\,\mathrm{id})\circ(f-\lambda_i\,\mathrm{id}) \ = \ (f-\lambda_i\,\mathrm{id})\circ(f-\lambda_k\,\mathrm{id}).}$$

□

b) Écrire $(f-\lambda_k\,\mathrm{id})\circ L_k(f)$ sous forme d'une composée de p applications linéaires.
En déduire que pour tout $x \in E$, $\big(L_k(f)\big)(x)$ est un élément de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_k\,\mathrm{id})$.

Démonstration.

- Dans la suite, on utilisera la notation suivante :

$$\bigcirc_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} (f-\lambda_j\,\mathrm{id}) \ = \ (f-\lambda_1\,\mathrm{id})\circ\ \ldots\ \circ(f-\lambda_{k-1}\,\mathrm{id})\ \circ\ (f-\lambda_{k+1}\,\mathrm{id})\ \circ\ \ldots\ \circ\ (f-\lambda_p\,\mathrm{id})$$

En particulier, on a :

$$L_k(f) \ = \ \bigcirc_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\cdot(f-\lambda_j\,\mathrm{id})\right) \ = \ \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right)\cdot\left(\bigcirc_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} (f-\lambda_j\,\mathrm{id})\right)$$

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}(f-\lambda_k\,\mathrm{id})\circ L_k(f) &= (f-\lambda_k\,\mathrm{id})\circ\left(\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right)\cdot\left(\bigcirc_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} (f-\lambda_j\,\mathrm{id})\right)\right) && \textit{(par définition de } L_k\textit{)}\\ &= \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\cdot\Big((f-\lambda_k\,\mathrm{id})\circ \bigcirc_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} (f-\lambda_j\,\mathrm{id})\Big)\\ &= \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right)\cdot\left(\bigcirc_{j=1}^{p} (f-\lambda_j\,\mathrm{id})\right) && \textit{(d'après la question précédente)}\end{aligned}$$

$$\boxed{(f-\lambda_k\,\mathrm{id})\circ L_k(f) = \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right)\cdot\left(\bigcirc_{j=1}^{p} (f-\lambda_j\,\mathrm{id})\right)}$$

- Soit $x \in E$. D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rcl}(f - \lambda_k \operatorname{id})\Big(\big(L_k(f)\big)(x)\Big) & = & \Big((f - \lambda_k \operatorname{id}) \circ \big(L_k(f)\big)\Big)(x) \\ & = & \left(\left(\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \dfrac{1}{\lambda_k - \lambda_j}\right) \cdot \left(\bigcirc_{j=1}^{p} (f - \lambda_j \operatorname{id})\right)\right)(x) \\ & = & \left(\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \dfrac{1}{\lambda_k - \lambda_j}\right) \cdot \left(\left(\bigcirc_{j=1}^{p} (f - \lambda_j \operatorname{id})\right)(x)\right)\end{array}$$

Or, d'après la question ***4.b)***, le polynôme $Q(X) = \prod\limits_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)$ est un polynôme annulateur de f. Ainsi :

$$\begin{array}{lrcl} & \bigcirc_{j=1}^{p} (f - \lambda_j \operatorname{id}) & = & 0_{\mathscr{L}(E)} \\ \text{donc} & \left(\bigcirc_{j=1}^{p} (f - \lambda_j \operatorname{id})\right)(x) & = & 0_E \\ \text{donc} & \left(\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \dfrac{1}{\lambda_k - \lambda_j}\right) \cdot \left(\left(\bigcirc_{j=1}^{p} (f - \lambda_j \operatorname{id})\right)(x)\right) & = & 0_E \\ \text{donc} & (f - \lambda_k \operatorname{id})\Big(\big(L_k(f)\big)(x)\Big) & = & 0_E\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \big(L_k(f)\big)(x) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \operatorname{id}).}$$

□

c) En combinant le résultat de la question précédente et celui de la question ***5.***, que démontre-t-on ?

Démonstration.
Soit $x \in E$.

- D'après la question ***5.*** :

$$x = \sum_{k=1}^{p} \big(L_k(f)\big)(x)$$

- Or d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$: $\big(L_k(f)\big)(x) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \operatorname{id})$.

On a ainsi démontré qu'il existe $(u_1, \ldots, u_p) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{id}) \times \cdots \times \operatorname{Ker}(f - \lambda_p \operatorname{id})$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^{p} u_k$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Autrement dit, tout vecteur de } E \text{ se décompose en une somme de } p \text{ vecteurs} \\ \text{de } \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{id}), \ldots, \operatorname{Ker}(f - \lambda_p \operatorname{id}).\end{array}}$$

□

Problème (HEC 2010)

- Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $\mathrm{Cov}(X,Y)$ la covariance de deux v.a.r. X et Y.
- Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.
- **On admet** que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.
- Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité X_1, X_2, …, X_n sont indépendantes si pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1]$, $[X_2 \leqslant x_2]$, …, $[X_n \leqslant x_n]$ sont indépendants.
- L'objet du problème est double. D'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométriques et exponentielles, d'autre part mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle. La partie II est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1. a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

On pose alors $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

Démonstration.

- On note X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(1)$. Alors une densité f_X de X est :

$$f_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt$ est convergente et vaut 1.

$$\boxed{\text{Comme } f_X \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[, \text{ on obtient : } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt = 1.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - La fonction $t \mapsto t^n\, \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.

- De plus :
  × on remarque : $t^n \, e^{-t} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. En effet :
$$\frac{t^n \, e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2} \, e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$
  × par ailleurs : $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^n \, e^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
  × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n \, e^{-t} \, dt$ est convergente.
- Enfin, comme la fonction $t \mapsto t^n \, e^{-t}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n \, e^{-t} \, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^n \, e^{-t} \, dt \text{ est convergente.}}$$

□

b) Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B \geqslant 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^n & & u'(t) & = & n \, t^{n-1} \\ v'(t) & = & e^{-t} & & v(t) & = & -e^{-t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^B t^n e^{-t} \, dt &= \left[-t^n \, e^{-t} \right]_0^B + n \int_0^B t^{n-1} e^{-t} \, dt \\ &= -B^n e^{-B} + n \int_0^B t^{n-1} \, e^{-t} \, dt \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} -B^n e^{-B} = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par passage à la limite quand } B \text{ tend vers } +\infty : \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n = n \, I_{n-1}.\end{array}}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $I_n = n!$.
  - **Initialisation** :
    D'après la question ***1.a)*** : $I_0 = 1 = 0!$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $I_{n+1} = (n+1)!$).

$$\begin{array}{rcll} I_{n+1} & = & (n+1)\, I_n & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & (n+1) \times n! & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & (n+1)! & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.}$$

□

Soit λ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $\frac{1}{\lambda}$).

On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- si $T(\omega) = X_1(\omega)$, alors : $Z(\omega) = X_2(\omega)$. Ainsi :
  - × d'une part : $T(\omega) + Z(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.
  - × d'autre part : $T(\omega) - Z(\omega) = X_1(\omega) - X_2(\omega) = Y(\omega)$.
    De plus, comme on est ici dans le cas où $\max\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) = X_1(\omega)$, on obtient : $Y(\omega) \geqslant 0$.
    D'où :
$$T(\omega) - Z(\omega) \ = \ Y(\omega) \ = \ |Y(\omega)| \ = \ |Y|(\omega)$$
- si $T(\omega) = X_2(\omega)$, alors : $Z(\omega) = X_2(\omega)$. Ainsi :
  - × d'une part : $T(\omega) + Z(\omega) = X_2(\omega) + X_1(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.
  - × d'autre part : $T(\omega) - Z(\omega) = X_2(\omega) - X_1(\omega) = -Y(\omega)$.
    De plus, comme on est ici dans le cas où $\max\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) = X_2(\omega)$, on obtient : $Y(\omega) \leqslant 0$.
    D'où :
$$T(\omega) - Z(\omega) \ = \ -Y(\omega) \ = \ |Y(\omega)| \ = \ |Y|(\omega)$$

Finalement, pout tout $\omega \in \Omega$:

$$T(\omega) + Z(\omega) \ = \ X_1(\omega) + X_2(\omega) \qquad \text{et} \qquad T(\omega) - Z(\omega) \ = \ |Y|(\omega)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } T + Z = X_1 + X_2 \text{ et } T - Z = |Y| = |X_1 - X_2|.}$$

□

3. a) Rappeler sans démonstration les valeurs de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant x]\big)$, pour tout réel x.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Comme } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda), \text{ alors :} \\ \mathbb{V}(X_1) = \dfrac{1}{\lambda^2} \text{ et } F_{X_1} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $Y = X_1 - X_2$ admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Par linéarité de l'espérance :
  × tout d'abord : $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2}{\lambda}$.
  $$\boxed{\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{\lambda}}$$
  × ensuite : $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda} = 0$.
  $$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 0}$$
- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes :
$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) \;=\; \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) \;=\; \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \;=\; \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\boxed{\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{2}{\lambda^2}}$$
- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes, par lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ le sont aussi. Ainsi :
$$\mathbb{V}(X_1 - X_2) \;=\; \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2) \;=\; \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) \;=\; \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_1 - X_2) = \frac{2}{\lambda^2}}$$
□

4. Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = [0, +\infty[$ et $X_2(\Omega) = [0, +\infty[$, alors : $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$ (car $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :
  $$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$
  × si $x \in [0, +\infty[$, alors :
$$\begin{array}{rcll} F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([Z > x]) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([X_1 > x]) \times \mathbb{P}([X_2 > x]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & 1 - \big(\mathbb{P}([X_1 > x])\big)^2 & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)} \\ & = & 1 - \big(1 - F_{X_1}(x)\big)^2 & \\ & = & 1 - \Big(\cancel{1} - \big(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big)\Big)^2 & \textit{(d'après } \textbf{3.a)}\textit{, car } x \geqslant 0\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda x} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. .}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(2\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda).}$$

$$\boxed{\text{D'où : } f_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda\,\mathrm{e}^{-2\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}, \qquad \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2\lambda}, \qquad \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4\lambda^2}.}$$

□

5. a) Montrer que pour tout réel t, on a : $F_T(t) = \begin{cases} \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = [0,+\infty[$ et $X_2(\Omega) = [0,+\infty[$, alors : $T(\Omega) \subset [0,+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[T \leqslant x] = \varnothing$ (car $T(\Omega) \subset [0,+\infty[$). D'où :

$$F_T(x) \;=\; \mathbb{P}([T \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  × si $x \in [0,+\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \mathbb{P}([T \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \mathbb{P}([X_2 \leqslant x]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \left(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])\right)^2 && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)} \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2 && \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{, car } x \geqslant 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- La fonction F_T est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$,
  × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_T(x) = 0$
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_T(x) = F_T(0) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda \times 0})^2 = 0$

  Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_T(x) = F_T(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_T(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F_T \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,+\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_T \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 0.}}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T \text{ est donc une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_T de T, on dérive sa fonction de répartition F_T sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors :
  $$f_T(x) \ = \ F_T'(x) \ = \ 0$$
  × si $x \in]0, +\infty[$, alors :
  $$f_T(x) \ = \ F_T'(x) \ = \ 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)$$
  × On choisit enfin : $f_T(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

□

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$. Montrer que $\mathbb{E}(T) = \dfrac{3}{2\lambda}$ et $\mathbb{V}(T) = \dfrac{5}{4\lambda^2}$.
(on pourra utiliser des changements de variables affines)

Démonstration.

- D'après la question ***2.*** : $T = X_1 + X_2 - Z$. On en déduit que la v.a.r. T admet une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Tout d'abord :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T) & = & \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) & \\ & = & \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{2}{\lambda} - \dfrac{1}{2\,\lambda} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.b)}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{4}{2\,\lambda} - \dfrac{1}{2\,\lambda} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(T) = \dfrac{3}{2\,\lambda}.}$$

- Ensuite, comme la v.a.r. T admet une variance, elle admet un moment d'ordre 2. De plus :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T^2) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_T(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\, f_T(t)\ dt & \textit{(car } f_T \textit{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2 \times 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\right)\ dt & \\ & = & 2\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2 \times \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt - \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2 \times 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \end{array}$$
  Cette linéarité est bien licite car les intégrales en présence sont convergentes. En effet :
  × d'une part, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2 \times \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ dt$ est le moment d'ordre 2 de $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$,
  × d'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2 \times 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt$ est le moment d'ordre 2 de $U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\,\lambda)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T^2) &= 2\ \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(U^2) \\
&= 2\left(\mathbb{V}(X_1) + \big(\mathbb{E}(X_1)\big)^2\right) - \left(\mathbb{V}(U) + \big(\mathbb{E}(U)\big)^2\right) && \textit{(par formule de Koenig-Huygens)} \\
&= 2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) - \left(\frac{1}{4\,\lambda^2} + \frac{1}{4\,\lambda^2}\right) && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } U \hookrightarrow \mathcal{E}(2\,\lambda)\textit{)} \\
&= \frac{4}{\lambda^2} - \frac{1}{2\,\lambda^2} \ = \ \frac{7}{2\,\lambda^2}
\end{aligned}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(T) \ = \ \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2 \ = \ \frac{7}{2\,\lambda^2} - \frac{9}{4\,\lambda^2} \ = \ \frac{5}{4\,\lambda^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) = \frac{5}{4\,\lambda^2}}$$

□

6. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que $r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition du coefficient de corrélation : $r = \dfrac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\,\sqrt{\mathbb{V}(T)}}$.
- De plus :

$$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(Z) + 2\ \mathrm{Cov}(Z,T) + \mathbb{V}(T)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Z,T) &= \frac{1}{2}\big(\mathbb{V}(Z+T) - \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(T)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\mathbb{V}(X_1+X_2) - \mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(T)\big) && \textit{(car } T+Z = X_1+X_2\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{4\,\lambda^2} - \frac{5}{4\,\lambda^2}\right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{, } \textbf{\textit{4.}} \textit{ et } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{4\,\lambda^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathrm{Cov}(Z,T) = \frac{1}{4\,\lambda^2}.}$$

- Enfin :
  - × d'une part, d'après ***4.*** : $\sqrt{\mathbb{V}(Z)} = \sqrt{\dfrac{1}{4\,\lambda^2}} = \dfrac{1}{2\,\lambda}$.
  - × d'autre part, d'après ***5.b)*** : $\sqrt{\mathbb{V}(T)} = \sqrt{\dfrac{5}{4\,\lambda^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\,\lambda}$.
- On obtient :

$$r \ = \ \frac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\,\sqrt{\mathbb{V}(T)}} \ = \ \frac{\frac{1}{\cancel{4\lambda^2}}}{\frac{1}{\cancel{2\lambda}}\ \frac{\sqrt{5}}{\cancel{2\lambda}}} \ = \ \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

□

7. a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.

Démonstration.
Les v.a.r. X_1 et X_2 sont toutes les deux de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Ainsi : $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Comme } Y = X_1 - X_2, \text{ on en déduit : } Y(\Omega) = \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\text{Par définition de la valeur absolue, on obtient : } |Y|(\Omega) = [0, +\infty[.}$$

□

b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on note : $V = -X_2$. Comme $X_2(\Omega) = [0, +\infty[$, alors :

$$V(\Omega) \ = \ \big(-X_2\big)(\Omega) \ = \ ]-\infty, 0]$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x \in]-\infty, 0]$, alors :

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([-X_2 \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}([X_2 \geqslant -x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X_2 \leqslant -x]) \quad \textit{(car } X_2 \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ &= 1 - F_{X_2}(-x) \\ &= 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(-x)}\right) \quad \textit{(car } -x \geqslant 0 \textit{ puisque } x \leqslant 0\textit{)} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

  × Si $x > 0$, alors : $[V \leqslant x] = \Omega$ donc :

$$F_V(x) \ = \ \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } F_V : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

- La fonction F_V est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction usuelle,
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction constante,
  × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_V(x) = F_V(0) = \mathrm{e}^{\lambda \times 0} = 1$
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_V(x) = 1$

  Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_V(x) = F_V(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_V(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F_V \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_V \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } V \text{ est donc une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_V et $V = -X_2$, on dérive sa fonction de répartition F_V sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors :
  $$f_V(x) \ = \ F_V'(x) \ = \ \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}$$
  × si $x \in]0, +\infty[$, alors :
  $$f_V(x) \ = \ F_V'(x) \ = \ 0$$
  × On choisit enfin : $f_V(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_V : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. .}$$

□

c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt$ est convergente et qu'elle vaut $\dfrac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ (on distinguera les deux cas : $y \geqslant 0$ et $y < 0$).

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord, comme f_{X_1} est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt$$

- Deux cas se présentent alors :
  × si $y < 0$, alors pour tout $t \in [0, +\infty[$: $y - t < 0$. Ainsi, pour tout $t \in [0, +\infty[$:
  $$f_{-X_2}(y-t) \ = \ \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\,(y-t)}$$
  Soit $B \in [0, +\infty[$. On en déduit :
  $$\begin{aligned} \int_0^B f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt \ &= \ \int_0^B \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\,(y-t)}\ dt \\ &= \ \lambda^2\, \mathrm{e}^{\lambda\, y} \int_0^B \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ dt \\ &= \ \lambda^2\, \mathrm{e}^{\lambda\, y} \int_0^B \mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt \\ &= \ \lambda^{\cancel{2}}\, \mathrm{e}^{\lambda\, y}\ \frac{1}{2\, \cancel{\lambda}} \int_0^B 2\,\lambda\, \mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt \end{aligned}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt$ est convergente (et vaut 1) car c'est le moment d'ordre 0 de $U \hookrightarrow \mathcal{E}\,(2\,\lambda)$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt \ = \ \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{\lambda\, y} \times 1 \ = \ \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \qquad \textit{(car } y<0\textit{)}$$

$$\boxed{\forall y<0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt = \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}}$$

× si $y \geqslant 0$, alors remarquons que pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l} f_{X_1}(t) \neq 0 \\ f_{-X_2}(y-t) \neq 0 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l} t \in [0,+\infty[\\ y-t \in]-\infty,0[\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l} t \geqslant 0 \\ y-t<0 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l} t \geqslant 0 \\ t>y \end{array}\right.$$

On en déduit : $f_{X_1}(t)\ f_{-X_2}(y-t) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ t>y$. Et ainsi :

$$\int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt \ = \ \int_y^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt$$

car $t \mapsto f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)$ est nulle en dehors de $]y,+\infty[$.
Soit $B \in [y,+\infty[$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_y^{B} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt &= \int_y^{B} \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ \lambda\ \mathrm{e}^{\lambda\,(y-t)}\ dt \\ &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda\, y} \int_y^{B} \mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt \\ &= \lambda^{\cancel{2}}\,\mathrm{e}^{\lambda\, y}\ \frac{1}{2\,\cancel{\lambda}} \int_y^{B} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt\end{aligned}$$

Or, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt$ est convergente (*cf* point précédent), alors $\displaystyle\int_y^{+\infty} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt$ est aussi convergente.
De plus, en conservant la notation $U \hookrightarrow \mathcal{E}\,(2\,\lambda)$:

$$\begin{aligned}\int_y^{+\infty} 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda\, t}\ dt &= \int_y^{+\infty} f_U(t)\ dt \\ &= \mathbb{P}([U \geqslant y]) \\ &= 1-\mathbb{P}([U \leqslant y]) && \textit{(car } U \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ &= 1-\left(1-\mathrm{e}^{-2\,\lambda\, y}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-2\,\lambda\, y}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_y^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt \ = \ \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{\lambda\, y} \times \mathrm{e}^{-2\,\lambda\, y} \ = \ \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, y} \ = \ \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \qquad \textit{(car } y \geqslant 0\textit{)}$$

$$\boxed{\forall y\geqslant 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\ dt = \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}}$$

□

d) Établir que la fonction $y \mapsto \dfrac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.

Démonstration.

- La fonction $y \mapsto \dfrac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ de :
  - × $h_1 : y \mapsto -\lambda\,|y|$ qui est :
    - continue sur $\mathbb{R}$,
    - telle que : $h_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : y \mapsto \dfrac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{y}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{La fonction } y \mapsto \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors, comme $\lambda > 0$: $\dfrac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \geqslant 0}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\, dy$ est convergente et vaut 1.
  - × Étudions tout d'abord $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\, dy$.
    Pour tout $y \in [0, +\infty[$.
    $$\frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \;=\; \frac{1}{2} \times \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, y}$$
    Or l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, y}\, dy$ est convergente (et vaut 1) car c'est le moment d'ordre 0 de $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\, dy$ est convergente et :
    $$\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\, dy \;=\; \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, y}\, dy \;=\; \frac{1}{2} \times 1 \;=\; \frac{1}{2}$$
  - × On sait alors :
    - l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\, dy$ est convergente,
    - la fonction $y \mapsto \dfrac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ est paire. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
    $$\frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|-y|} \;=\; \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$$

    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\, dy$ est convergente et :
    $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\, dy \;=\; 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\, dy \;=\; 2 \times \frac{1}{2} \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}\, dy \text{ est convergente et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } y \mapsto \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après ***7.a)*** : $|Y|(\Omega) = [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[|Y| \leqslant x] = \varnothing$ (car $|Y|(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :
  $$F_{|Y|}(x) \; = \; \mathbb{P}([|Y| \leqslant x]) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$$
  × si $x \in [0, +\infty[$, alors :
  $$\begin{aligned} F_{|Y|}(x) &= \mathbb{P}([|Y| \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([-x \leqslant Y \leqslant x]) \\ &= \int_{-x}^{x} f_{|Y|}(t)\, dt && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= 2 \int_{0}^{x} f_{|Y|}(t)\, dt && \textit{(car } f_{|Y|} \textit{ est paire (cf question précédente))} \\ &= \cancel{2} \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{\cancel{2}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|t|}\, dt \\ &= \int_{0}^{x} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\, dt \\ &= \left[\, -\mathrm{e}^{-\lambda\, t} \,\right]_{0}^{x} \; = \; 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{|Y|} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit } |Y| \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ et donc : } f_{|Y|} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

□

Partie II. Loi géométrique

Non proposée ici.

Partie III. Convergences

Dans les questions 12 à 15, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.
Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

12. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$, $\mathbb{E}(J_n)$ et $\mathbb{V}(J_n)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. S_n et J_n admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Pour la v.a.r. S_n :
  - × tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda} & \textit{(car : } \forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & \dfrac{n}{\lambda} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{n}{\lambda}}$$

  - × ensuite :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda^2} & \textit{(car : } \forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & \dfrac{n}{\lambda^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{n}{\lambda^2}}$$

- Pour la v.a.r. J_n :
  - × par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(J_n) \;=\; \mathbb{E}(\lambda\, S_n) \;=\; \lambda\, \mathbb{E}(S_n) \;=\; \cancel{\lambda} \times \dfrac{n}{\cancel{\lambda}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(J_n) = n.}$$

  - × de plus :

$$\mathbb{V}(J_n) \;=\; \mathbb{V}(\lambda\, S_n) \;=\; \lambda^2\, \mathbb{V}(S_n) \;=\; \cancel{\lambda^2} \times \dfrac{n}{\cancel{\lambda^2}}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{V}(J_n) = n.}$$

□

13. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

a) À l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existence de $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{J_n}\right)$ et de $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.

Démonstration.
Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$.

- Par théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{J_n}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_{J_n}(x)\ dx$ est absolument convergente.
- Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{x} f_{J_n}(x) \geqslant 0$.
  Il suffit donc de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_{J_n}(x)\ dx$ est convergente.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.
$$\frac{1}{x} f_{J_n}(x) = \frac{1}{x} \times \frac{\mathrm{e}^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-2} \mathrm{e}^{-x}$$
  Or, comme $n-2 \in \mathbb{N}$, d'après ***1.a)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-2} \mathrm{e}^{-x}\ dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } \frac{1}{J_n} \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :
$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_{J_n}(x)\ dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-2} \mathrm{e}^{-x}\ dx = \frac{1}{(n-1)!} I_{n-2}$$

$$\boxed{\text{Comme } n-2 \in \mathbb{N}, \text{ d'après } \textbf{\textit{1.b)}} : \mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right) = \frac{1}{(n-1)!} \times (n-2)! = \frac{1}{n-1}.}$$

- Par théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{J_n^2}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} f_{J_n}(x)\ dx$ est absolument convergente.
- Or, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{x^2} f_{J_n}(x) \geqslant 0$.
  Il suffit donc de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} f_{J_n}(x)\ dx$ est convergente.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.
$$\frac{1}{x^2} f_{J_n}(x) = \frac{1}{x^2} \times \frac{\mathrm{e}^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-3} \mathrm{e}^{-x}$$
  Or, comme $n-3 \in \mathbb{N}$, d'après ***1.a)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-3} \mathrm{e}^{-x}\ dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } \frac{1}{J_n^2} \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ f_{J_n}(x)\ dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-3}\,\mathrm{e}^{-x}\ dx = \frac{1}{(n-1)!}\ I_{n-3}$$

$$\boxed{\text{Comme } n-3 \in \mathbb{N}, \text{ d'après } \textbf{\textit{1.b)}} : \mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n^2}\right) = \frac{1}{(n-1)!} \times (n-3)! = \frac{1}{(n-1)\,(n-2)}.}$$

□

b) On pose pour tout n supérieur ou égal à 3 : $\widehat{\lambda_n} = \dfrac{n}{S_n}$. Justifier que $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur de λ. Est-il sans biais ? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda_n}$ en λ.

Démonstration.
Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$.

- La v.a.r. $\widehat{\lambda_n} = \dfrac{n}{S_n} = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}$ s'exprime :
  - × à l'aide du n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$,
  - × sans mention du paramètre λ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } \widehat{\lambda_n} \text{ est donc un estimateur de } \lambda.}$$

- On remarque :

$$\widehat{\lambda_n} = n \times \frac{1}{S_n} = n \times \frac{1}{\frac{J_n}{\lambda}} = n\,\lambda \times \frac{1}{J_n}$$

Or, d'après la question précédente, la v.a.r. $\dfrac{1}{J_n}$ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance. On en déduit que la v.a.r. $\widehat{\lambda_n}$ admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée linéaire de $\dfrac{1}{J_n}$ qui en admet une.

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) &= \mathbb{E}_\lambda\left(n\,\lambda \times \frac{1}{J_n}\right) \\ &= n\,\lambda\ \mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= n\,\lambda\ \frac{1}{n-1} && \textit{d'après } \textbf{\textit{13.a)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Comme } n \geqslant 3, \text{ alors : } \mathbb{E}_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) = \dfrac{n}{n-1}\ \lambda \neq \lambda. \\ \text{La v.a.r. } \widehat{\lambda_n} \text{ n'est donc pas un estimateur sans biais de } \lambda. \end{array}}$$

- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned} r_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) &= \mathbb{V}_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) + \left(b_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right)\right)^2 \\ &= \mathbb{V}_\lambda\left(n\,\lambda \times \frac{1}{J_n}\right) + \left(\mathbb{E}_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) - \lambda\right)^2 \\ &= n^2\,\lambda^2\ \mathbb{V}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right) + \left(\frac{n}{n-1}\ \lambda - \lambda\right)^2 \\ &= n^2\,\lambda^2\ \mathbb{V}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right) + \left(\frac{1}{n-1}\ \lambda\right)^2 \end{aligned}$$

Or, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right) &= \mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{J_n^2}\right) - \left(\mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{J_n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{(n-1)\,(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{13.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{n-1-(n-2)}{(n-1)^2\,(n-2)} = \frac{1}{(n-1)^2\,(n-2)}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
r_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) &= \frac{n^2}{(n-1)^2\,(n-2)}\;\lambda^2 + \frac{1}{(n-1)^2}\;\lambda^2 \\
&= \frac{n^2+(n-2)}{(n-1)^2\,(n-2)}\;\lambda^2 \\
&= \frac{\cancel{(n-1)}\,(n+2)}{(n-1)^{\cancel{2}}\,(n-2)}\;\lambda^2 \\
&= \frac{n+2}{(n-1)\,(n-2)}\;\lambda^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \lim_{n\to+\infty} r_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) = 0.}$$

Commentaire

Rappelons que l'on a le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} r_\lambda\left(\widehat{\lambda_n}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \widehat{\lambda_n} \text{ est un estimateur convergent de } \lambda$$

Ainsi, la v.a.r. $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur convergent de λ.

□

14. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

a) Énoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda\,\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Démonstration.

- Énonçons le théorème central limite.
  Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :
  × indépendantes,
  × de même loi,
  × de même espérance m,
  × et de même variance σ^2 **non nulle**.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \qquad \text{et} \qquad S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

  Alors : $S_n^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z \quad$ où $\quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- Démontrons : $S_n^* = N_n$.

$$\begin{array}{rcl} S_n^* & = & \dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \\ & = & \dfrac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \qquad \qquad \textit{(d'après \textbf{12.})} \\ & = & \dfrac{\cancel{1}}{\cancel{\lambda}} \; \dfrac{\lambda\, S_n - n}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{\lambda}} \sqrt{n}} \\ & = & \lambda \, \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \; = \; N_n \end{array}$$

$$\boxed{S_n^* = N_n}$$

- La suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :
  - $\times$ indépendantes,
  - $\times$ de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$,
  - $\times$ de même variance $\dfrac{1}{\lambda^2}$ **non nulle**.

$$\boxed{\text{Par théorème central limite : } N_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$ □

b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement : $\mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]\big) = 1-\alpha$.

Démonstration.
Comme $N_n \hookrightarrow Z$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]\big) & = & \mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha]\big) \\ & = & \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha) \\ & = & \Phi(u_\alpha) - \big(1 - \Phi(u_\alpha)\big) \\ & = & 2\,\Phi(u_\alpha) - 1 \\ & = & 2\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) - 1 \; = \; 1-\alpha \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, pour } n \text{ assez grand : } \mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]\big) \approx 1-\alpha.}$$ □

c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle $\left[\left(1 - \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda_n}, \left(1 + \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda_n}\right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α. On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda_n}$ sur le n-échantillon.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]\big) \\ = & \mathbb{P}\left(\left[-u_\alpha \leqslant \lambda\, \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \leqslant u_\alpha\right]\right) \\ = & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{n} - u_\alpha \leqslant \lambda\, \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} + u_\alpha\right]\right) \\ = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{n}}{S_n}\,(\sqrt{n} - u_\alpha) \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{S_n}\,(\sqrt{n} + u_\alpha)\right]\right) \quad \textit{(car } \left(\dfrac{\sqrt{n}}{S_n}\right)(\Omega) \subset \,]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big(\, [-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha] \,\big) \\ = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{n}}{S_n}\ \sqrt{n}\left(1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{S_n}\ \sqrt{n}\left(1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right) \\ = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{n}{S_n}\left(1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{S_n}\left(1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right) \\ = & \mathbb{P}\left(\left[\widehat{\lambda_n}\left(1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \lambda \leqslant \widehat{\lambda_n}\left(1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right) \end{array}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\widehat{\lambda_n}\left(1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \lambda \leqslant \widehat{\lambda_n}\left(1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right) \ = \ 1-\alpha$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'intervalle } \left[\left(1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\ \widehat{\lambda_n}, \left(1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\ \widehat{\lambda_n}\right] \text{ est donc} \\ \text{un intervalle de confiance de } \lambda \text{ au risque } \alpha.\end{array}}$$

□

15. Avec le n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α.

a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ.
Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?

Démonstration.
La fonction Φ est :

× continue sur $\mathbb{R}$, en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité,

× strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
En effet, la fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une primitive de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(x) \ = \ \varphi(x) \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \ > \ 0$$

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $\Phi(]-\infty, +\infty[)$ où :

$$\Phi(]-\infty, +\infty[) \ = \ \left]\lim_{x\to-\infty} \Phi(x), \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)\right[\ =]0, 1[$$

où la dernière égalité est obtenue car Φ est une fonction de répartition.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Phi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0,1[.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \Phi^{-1} \text{ est donc définie sur }]0,1[.}$$

Commentaire

- Il est toujours bon de garder en tête que la fonction Φ est bijective. C'est une propriété que l'on utilise fréquemment dans le contexte de l'estimation.
- On pourrait par exemple également s'en servir pour démontrer que le réel u_α existe et est unique. En effet :
  - × la fonction Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$,
  - × $1 - \dfrac{\alpha}{2} \in \,]0,1[$, car $\alpha > 0$.

  On en déduit qu'il existe un unique $u_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

□

b) Établir l'égalité $\beta = 2\Phi\left(\dfrac{1}{k}\Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$.
En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible ?

Démonstration.

- Déterminons l'intervalle de confiance de λ au risque β. Notons U_n et V_n les extrémités de ce nouvel intervalle.
D'après l'énoncé, la longueur de cet intervalle est k fois plus petite que celle de risque α. Ainsi :
$$V_n - U_n \; = \; \frac{1}{k}\left(\left(\cancel{1} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n} - \left(\cancel{1} - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right) \; = \; 2 \times \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}} \times \widehat{\lambda_n}$$
$$\boxed{\text{L'intervalle de confiance de } \lambda \text{ au risque } \beta \text{ est donc } \left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \; \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right].}$$
- On obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n} \leqslant \lambda \leqslant \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right) \; = \; 1 - \beta$$
Avec le même raisonnement qu'en question ***14.c)***, on a de plus :
$$\mathbb{P}\left(\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n} \leqslant \lambda \leqslant \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right) \; = \; \mathbb{P}\left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leqslant N_n \leqslant \frac{u_\alpha}{k}\right]\right)$$
Or, comme $N_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z$:
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leqslant N_n \leqslant \frac{u_\alpha}{k}\right]\right) \; = \; \mathbb{P}\left(\left[-\frac{u_\alpha}{k} \leqslant Z \leqslant \frac{u_\alpha}{k}\right]\right) \; = \; 2\,\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1$$
Ainsi :
$$1 - \beta \; = \; \mathbb{P}\left(\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n} \leqslant \lambda \leqslant \left(1 + \frac{u_\alpha}{k\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right) \; = \; 2\,\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1$$
$$\boxed{2\,\Phi\left(\frac{u_\alpha}{k}\right) - 1 = 1 - \beta}$$
- D'après le point précédent :
$$\begin{array}{lrcl} \text{comme} & 2\,\Phi\left(\dfrac{u_\alpha}{k}\right) - 1 & = & 1 - \beta \\[2ex] \text{alors} & \beta & = & 2 - 2\,\Phi\left(\dfrac{u_\alpha}{k}\right) \\[2ex] \text{donc} & \beta & = & 2\left(1 - \Phi\left(\dfrac{u_\alpha}{k}\right)\right) \; = \; 2\,\Phi\left(-\dfrac{u_\alpha}{k}\right) \end{array}$$
$$\boxed{\beta = 2\,\Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right)}$$

- Enfin, exprimons u_α en fonction de α et Φ^{-1}.
  Par définition de u_α :

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \ \Leftrightarrow\ \frac{\alpha}{2} = 1 - \Phi(u_\alpha) = \Phi(-u_\alpha) \ \Leftrightarrow\ \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -u_\alpha \ \Leftrightarrow\ -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = u_\alpha$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \beta = 2\,\Phi\left(-\frac{u_\alpha}{k}\right) = 2\,\Phi\left(-\frac{-\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{k}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{1}{k}\ \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).}$$

- D'après ce qui précède : $\dfrac{\beta}{2} = \Phi\left(\dfrac{1}{k}\ \Phi{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$. Ainsi :

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) \ = \ \frac{1}{k}\ \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

  De plus :

$$\begin{array}{lrcll}
\text{comme} & k & > & 1 & \\
\text{alors} & \dfrac{1}{k} & < & 1 & \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{donc} & \dfrac{1}{k}\ \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) & > & \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) & \textit{(car } \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) < 0 \quad (*)\textit{)} \\
\text{d'où} & \Phi^{-1}\left(\dfrac{\beta}{2}\right) & > & \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) & \\
\text{ainsi} & \dfrac{\beta}{2} & > & \dfrac{\alpha}{2} & \textit{(par stricte croissance de } \Phi \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\text{enfin} & \beta & > & \alpha &
\end{array}$$

  Détaillons l'argument $(*)$.

$$\begin{array}{lrcll}
 & \Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) & < & 0 & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\alpha}{2} & < & \Phi(0) & \textit{(par stricte croissance de } \Phi \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\alpha}{2} & < & \dfrac{1}{2} & \\
\Leftrightarrow & \alpha & < & 1 &
\end{array}$$

  Or cette dernière inégalité est vraie par définition de α. Ainsi, grâce au raisonnement par équivalence, la première aussi.

$$\boxed{\text{On a bien : } \beta > \alpha.}$$

Ce résultat était privisible car plus la précision de l'estimation exigée augmente (*i.e.* plus la longueur de l'intervalle de confiance est faible), plus le niveau de risque augmente (*i.e.* plus le niveau de confiance diminue)

□

Dans les questions 16 à 18, on suppose que $\lambda = 1$.

16. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose :

$$g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t) \, dt \quad \text{et} \quad h_n(x) = \int_0^x t \, f_{T_n}(t) \, dt$$

Commentaire

- Notons que l'énoncé définit ici des objets avant que l'on puisse statuer sur leur existence : on ne sait ni si la v.a.r. T_n est à densité, ni si les fonctions F_{T_n} et f_{T_n} sont continues par morceaux sur $[0, x]$. La question suivante s'effectuera donc en supposant que T_n est une v.a.r. à densité, de densité f_{T_n} et que la fonction F_{T_n} est suffisamment régulière, en l'occurence de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[0, x]$.
- On aurait pu éviter d'effectuer ces hypothèses en énonçant les questions dans l'ordre suivant :

16. a) Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
En déduire que T_n est une v.a.r. à densité. On note f_{T_n} une de ses densités.

b) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et $g_n(x)$.

c) Établir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \dfrac{1}{n} \, F_{T_n}(x)$.

a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et $g_n(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in [0, +\infty[$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & \quad & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & f_{T_n}(t) & & v(t) & = & F_{T_n}(t) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide **sous réserve** que les fonctions u et v soient de classe $\mathcal{C}^1$ (par morceaux) sur $[0, x]$. On obtient :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \int_0^x t \, f_{T_n}(t) \, dt \\ &= \left[\, t \, F_{T_n}(t) \, \right]_0^x - \int_0^x 1 \times F_{T_n}(t) \, dt \\ &= x \, F_{T_n}(x) - g_n(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \; h_n(x) = x \, F_{T_n}(x) - g_n(x)}$$

□

b) Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
Établir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \dfrac{1}{n} \, F_{T_n}(x)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$ (car $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$).

$$\boxed{\text{Ainsi : } T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $t \in]-\infty, 0[$, alors $[T_n \leqslant t] = \varnothing$ car $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Ainsi :
$$F_{T_n}(t) \ = \ \mathbb{P}\big([T_n \leqslant t]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  - × si $t \in [0, +\infty[$.
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n \leqslant t]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant t]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant t]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant t]\big)\big)^n & \\ & = & \big(1 - \mathrm{e}^{-t}\big)^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } t \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{T_n} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \big(1 - \mathrm{e}^{-t}\big)^n & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

Démontrons que T_n est une v.a.r. à densité.

- La fonction F_{T_n} est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F_{T_n} = u_2 \circ u_1$ de :
    - $u_1 : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ qui est :
      - ▸ continue sur $]0, +\infty[$,
      - ▸ telle que : $u_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
    - $u_2 : y \mapsto y^n$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.
  - × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{T_n}(x) = 0$
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{T_n}(x) = F_{Y_n}(0) = (1 - \mathrm{e}^{-0})^n = 0$.

  Ainsi :
$$\lim_{x \to 0^-} F_{T_n}(x) \ = \ F_{T_n}(0) \ = \ \lim_{x \to 0^+} F_{T_n}(x)$$
$$\boxed{\text{La fonction } F_{T_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$
- La fonction F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.
$$\boxed{\text{On en déduit que } F_{T_n} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$
$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ est donc une v.a.r. à densité.}}$$

Commentaire

On a démontré que :
- × la fonction F_{T_n} est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, elle l'est alors sur le segment $[0, x]$. La fonction g_n est donc bien définie.
- × la fonction F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, +\infty[$. Ainsi f_{T_n} est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, elle l'est alors sur le segment $[0, x]$. La fonction h_n est donc bien définie.
- × l'IPP de la question précédente est valide puisque, comme F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, x]$, la fonction v l'est aussi.

- Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
g_{n-1}(x) - g_n(x) &= \int_0^x F_{T_{n-1}}(t) \, dt - \int_0^x F_{T_n}(t) \, dt \\
&= \int_0^x F_{T_{n-1}}(t) - F_{T_n}(t) \, dt \\
&= \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-t})^{n-1} - (1 - \mathrm{e}^{-t})^n \, dt \qquad \textit{(car } (n-1, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\textit{)} \\
&= \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-t})^{n-1} \big(\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-t})\big) \, dt \\
&= \int_0^x \mathrm{e}^{-t} (1 - \mathrm{e}^{-t})^{n-1} \, dt \\
&= \Big[\frac{1}{n} \, (1 - \mathrm{e}^{-t})^n \Big]_0^x \\
&= \frac{1}{n} \, (1 - \mathrm{e}^{-x})^n \; = \; \frac{1}{n} \, F_{T_n}(x) \qquad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \ \forall x \in [0, +\infty[, \ g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n} \, F_{T_n}(x)}$$

□

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x, $F_{T_1}(x)$, $F_{T_2}(x)$, ..., $F_{T_n}(x)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![, \quad g_{k-1}(x) - g_k(x) = \frac{1}{k} \, F_{T_k}(x)$$

- En sommant les égalités précédentes pour k variant de 2 à n, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \big(g_{k-1}(x) - g_k(x)\big) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \, F_{T_k}(x)$$

$$\shortparallel$$

$$g_1(x) - g_n(x) \qquad \textit{(par télescopage)}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int_0^x F_{T_1}(t)\ dt \ = \ \int_0^x 1-\mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= \Big[\ t+\mathrm{e}^{-t}\ \Big]_0^x \\ &= x+\mathrm{e}^{-x}-1 \ = \ x-F_{T_1}(x) \qquad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} g_n(x) &= x - F_{T_1}(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \\ &= x - \frac{1}{1}\ F_{T_1}(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \\ &= x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,+\infty[,\ g_n(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x)}$$

□

d) Montrer que $F_{T_n}(x)-1$ est équivalent à $-n\mathrm{e}^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$F_{T_n}(x) - 1 \ = \ (1-\mathrm{e}^{-x})^n - 1$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. D'où : $(1-\mathrm{e}^{-x})^n - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} n \times (-\mathrm{e}^{-x})$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{T_n}(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\,n\,\mathrm{e}^{-x}.}$$

□

e) Déduire des questions ***c)*** et ***d)*** l'existence de $\mathbb{E}(T_n)$ et montrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{T_n}(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, f_{T_n}(t)\ dt$.
- Tout d'abord, comme $T_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$, la fonction f_{T_n} est nulle en dehors de $[0,+\infty[$. Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{T_n}(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} t\, f_{T_n}(t)\ dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } T_n \text{ admet une espérance si et seulement si la fonction } h_n \\ \text{admet une limite quand } x \text{ tend vers } +\infty.\end{array}}$$

- Soit $x \in [0,+\infty[$. D'après ***16.a)*** :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= x\,F_{T_n}(x) - g_n(x) \\ &= x\,F_{T_n}(x) - \Big(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \Big) \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{16.c)}}\textit{)} \\ &= x\,\big(F_{T_n}(x) - 1\big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) \end{aligned}$$

Or :

× d'après la question précédente : $F_{T_n}(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -n\,\mathrm{e}^{-x}$. D'où :

$$x\,\big(F_{T_n}(x) - 1\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} -n\,x\,\mathrm{e}^{-x}$$

Comme, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} -n\,x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\big(F_{T_n}(x) - 1\big) = 0$$

× pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction F_{T_k} est une fonction de répartition. On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} F_{T_k}(x) = 1$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{k}\ F_{T_k}(x) = \dfrac{1}{k}$. Et enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ F_{T_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \textit{(car cette somme est finie)}$$

On en déduit que la fonction h_n admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} h_n(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ admet donc une espérance.}}$$

- De plus :

$$\mathbb{E}(T_n) = \int_0^{+\infty} t\,f_{T_n}(t)\ dt = \lim_{x\to+\infty} h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

17. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - \mathbb{E}(T_n)$.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln(n) + \mathbb{E}(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a : $F_{G_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après ***16.b)*** : $T_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Comme } G_n = T_n - \mathbb{E}(T_n), \text{ on en déduit : } G_n(\Omega) \subset [-\mathbb{E}(T_n),+\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Tout d'abord : $\lim\limits_{n \to +\infty} -\mathbb{E}(T_n) = -\infty$. En effet :
  × d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
  × la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \cancel{>} 1$). Elle est donc divergente. Comme c'est une série à termes positifs, sa suite des sommes partielles associée diverge vers $+\infty$.

  Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -\mathbb{E}(T_n) = -\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $x \geqslant -\mathbb{E}(T_n)$.
  Soit $n \geqslant n_0$.

$$\begin{array}{rcll} F_{G_n}(x) & = & \mathbb{P}([T_n - \mathbb{E}(T_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x + \mathbb{E}(T_n)]) & \\ & = & F_{T_n}\big(x + \mathbb{E}(T_n)\big) & \\ & = & \big(1 - \mathrm{e}^{-(x+\mathbb{E}(T_n))}\big)^n & \textit{(car, comme } n \geqslant n_0 \textit{ :} \\ & & & x + \mathbb{E}(T_n) \geqslant 0\textit{)} \\ & = & \big(1 - \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n+\ln(n))}\big)^n & \textit{(par définition de } \gamma_n\textit{)} \\ & = & \big(1 - \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)}\big)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour } n \text{ assez grand } (n \geqslant n_0) : F_{G_n} : x \mapsto \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}}{n}\right)^n.}$$

□

b) En déduire que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{G_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $n \geqslant n_0$.

$$F_{G_n}(x) = \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\left(x+\gamma_n\right)}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right)\right)$$

- D'après l'énoncé : $\lim\limits_{n \to +\infty} \gamma_n = \gamma$.
  Par continuité de la fonction exp en $-(x+\gamma)$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)} = \mathrm{e}^{-(x+\gamma)}$.
- On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)} = 0$ Ainsi :

$$\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} \qquad \textit{(car } \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} \neq 0\textit{)}$$

  D'où :

$$n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \cancel{n} \times \left(-\dfrac{1}{\cancel{n}}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma)}\right) = -\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}$$

- Par continuité de la fonction exp en $-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\, \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right)\right) \;=\; \exp\left(-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}.}$$

□

c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_G : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

Démonstration.

- Démontrons que F_G est une fonction de répartition.
  × La fonction F_G est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $F_G = u_2 \circ u_1$ de :
  - $u_1 : x \mapsto -\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}$ qui est :
    ▶ continue sur $\mathbb{R}$,
    ▶ telle que : $u_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  - $u_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{En particulier, } F_G \text{ est continue à droite en tout point de } \mathbb{R}.}$$

  × La fonction F_G est dérivable sur $\mathbb{R}$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur cet intervalle.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_G'(x) \;=\; \mathrm{e}^{-(x+\gamma)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} \;>\; 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_G \text{ est donc (strictement) croissante sur } \mathbb{R}.}$$

  × Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{x\to-\infty} F_G(x) = 0.}$$

  × Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} = 0$, alors, par continuité de exp en 0 : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} = \mathrm{e}^0 = 1$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{x\to+\infty} F_G(x) = 1.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_G \text{ est donc la fonction de répartition d'une v.a.r. notée } G.}$$

- Démontrons que G est une v.a.r. à densité.
  × La fonction F_G est continue sur $\mathbb{R}$.
  × La fonction F_G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par des arguments similaires à ceux de la continuité sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } G \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} \;=\; F_G(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } G_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} G.}$$

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1) F est continue à droite en tout point,
  2) F est croissante sur $\mathbb{R}$,
  3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
  4) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ***1.***, ***2.***, ***3.*** et ***4.*** peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- À l'époque de ce sujet, la caractérisation ci-dessus était inscrite dans le programme (ce n'est plus le cas). Cependant, son utilisation semble toujours apparaître aux concours. Plus précisément, elle semble nécessaire pour traiter des questions portant sur la convergence en loi (comme cette question) présentes dans les sujets `EML 2016` et `2017`. Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus.

$\square$

18. a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y = F_X(X)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(F_X(X)\big)(\Omega) = F_X\big(X(\Omega)\big) \\ &= F_X(]-\infty,+\infty[) \\ &= \left]\lim_{x\to-\infty} F_X(x), \lim_{x\to+\infty} F_X(x)\right[&& \textit{(par continuité } (*) \textit{ et stricte croissance de } F_X \textit{ sur } \mathbb{R}) \\ &=]0,1[&& \textit{(car } F_X \textit{ est une fonction de répartition)} \end{aligned}$$

Précisons que l'assertion $(*)$ est vraie (la fonction F_X est bien continue sur $\mathbb{R}$), car F_X est la fonction de répartition de X qui est une v.a.r. à densité.

$$\boxed{Y(\Omega) =]0,1[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty,0]$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) =]0,1[$). D'où :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x \in]0,1[$, alors :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([F_X(X) \leqslant x])$$

  Or la fonction F_X est :
  - continue sur $\mathbb{R}$, car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité,
  - strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après l'énoncé.

  Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $F_X(]-\infty,+\infty[) =]0,1[$.

  En particulier, F_X admet une bijection réciproque F_X^{-1} strictement croissante sur $]0,1[$.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([F_X(X) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[F_X^{-1}\big(F_X(X)\big) \leqslant F_X^{-1}(x)\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de } F_X^{-1} \textit{ sur }]0,1[\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}(\left[X \leqslant F_X^{-1}(x)\right]) & \\ & = & F_X\big(F_X^{-1}(x)\big) & \\ & = & x & \textit{(par définition de } F_X^{-1}\textit{)} \end{array}$$

× si $x \in [1, +\infty[$, alors $[Y \leqslant x] = \Omega$ (car $Y(\Omega) =]0,1[$). D'où :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[).}$$

□

b) Écrire une fonction **Scilab** nommée `Gumbel` qui permet de simuler la variable aléatoire G.
On supposera que la constante γ est définie en langage **Scilab** par une constante `gamma`.
On rappelle que la fonction **Scilab** `rand()` permet de simuler la loi uniforme sur $]0,1[$.

Démonstration.

- On note U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. D'après la question précédente, la v.a.r. $F_X(X)$ suit la même loi que U.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_X^{-1}(U) \text{ suit la même loi que } X.}$$

- Pour simuler la v.a.r. X, on cherche donc à simuler $F_X^{-1}(U)$. Commençons alors par déterminer F_X^{-1}.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in]0,1[$.

$$\begin{array}{rcll} y = F_X(x) & \Leftrightarrow & y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}} & \\ & \Leftrightarrow & \ln(y) = -\mathrm{e}^{-(x+\gamma)} & \textit{(par bijectivité de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -\ln(y) = \mathrm{e}^{-(x+\gamma)} & \\ & \Leftrightarrow & \ln\big(-\ln(y)\big) = -(x+\gamma) & \textit{(par bijectivité de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -\ln\big(-\ln(y)\big) = x+\gamma & \\ & \Leftrightarrow & -\ln\big(-\ln(y)\big) - \gamma = x & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X^{-1} : y \mapsto -\ln\big(-\ln(y)\big) - \gamma.}$$

- On en déduit la fonction **Scilab** suivante.

```
function x = Gumbel()
    u = rand()
    x = -log(-log(u)) - gamma
endfunction
```

Commentaire

Cette question est une application directe de la **méthode d'inversion** vue en TP. Elle a également été traitée en cours pour démontrer le résultat classique suivant : si U est une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors la v.a.r. $W = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

□