

DS1 (version A) /159

Exercice 1 /35

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la

matrice dans la base \mathcal{B} est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

- 1 pt : $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $(A - 2I)(A - I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

- 1 pt : $(A - 2I)(A - I)^2 = A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$

- 1 pt : $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$.

- 2 pts : résolution du système $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$

b) Déterminer $E_2(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_2(A) = \text{Vect}(\mathcal{F}_2)$ où $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

- 1 pt : $E_2(A) = \text{Vect}(\mathcal{F}_2)$ donc $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- 1 pt : \mathcal{F}_2 engendre $E_2(A)$

- 1 pt : \mathcal{F}_2 est libre

3. On note $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

a) Résoudre le système : $(S_2) \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -3x + 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$

- 2 pts : résolution du système $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

b) Déterminer $E_1(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_1(A) = \text{Vect}(\mathcal{F}_1)$ où $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

- 1 pt : $E_1(A) = \text{Vect}(\mathcal{F}_1)$ donc $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- 1 pt : \mathcal{F}_1 engendre $E_1(A)$

- 1 pt : \mathcal{F}_1 est libre

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- 3 pts : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1 pt : pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou pour $AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : pour $P^{-1}AP = T$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P T^n P^{-1}$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

5. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1 pt : $N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1 pt : $N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : récurrence immédiate

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer T^n en fonction des matrices D et N , à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- 1 pt : D et N commutent

- 1 pt : formule du binôme correcte

- 1 pt : découpage valable car $n \geq 1$

- 1 pt : $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $T^n = D^n + n D^{n-1} N$

- 1 pt : cas $n = 0$

Exercice 2 /53

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* et dresser son tableau de variations.

- 1 pt : f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^*

- 1 pt : $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$ car $x > 0$

- 1 pt : tableau complet

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f		

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$.

- 1 pt : calcul correct

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 1 pt : D'après l'étude en question 1.b), la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. On en déduit : $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) \leq 0$

- 1 pt : on applique l'inégalité à $n \in]0, +\infty[$

e) Écrire une fonction d'en-tête : fonction $y = u(n)$ qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .

- 1 pt : syntaxe fonction et indentation

- 1 pt : initialisation avant boucle for

- 1 pt : taille boucle for

- 1 pt : contenu boucle for

```

1  fonction y = u(n)
2      S = 0
3      for k = 1:n
4          S = S + 1/k
5      end
6      y = S - log(n)
7  endfunction
    
```

2. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

- 1 pt : calcul correct

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- 3 pts : argument de concavité ou étude de fonction

- 1 pt : application de l'inégalité en $x = \frac{1}{n}$ justifiée (on peut le faire car $\frac{1}{n} \geq 0$)

- 1 pt : $v_{n+1} - v_n \geq 0$

c) (CUBES uniquement - admis pour les autres)

Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

- 1 pt : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (DL usuel)

- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1} - v_n}{\frac{1}{2n^2}} = 1$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

- 1 pt : $v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

- 1 pt : les séries sont à termes positifs

- 1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ donc converge

- 1 pt : par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge

e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.

En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .

- 1 pt : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n$ ($v_1 = 0$)

- 1 pt : la série $\sum v_{n+1} - v_n$ est convergente de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \gamma$ donc la suite (v_n) converge vers γ

3. a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

- 1 pt : $u_n = v_n + \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \gamma$

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma \leq u_n$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$$

- **2 pts** : la suite (v_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \gamma$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma$ en raisonnant par l'absurde

× **1 pt** : structure de raisonnement (y compris négation de : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \gamma$)

× **1 pt** : reste de la démonstration

- **1 pt** : la suite (u_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \gamma$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \gamma$

- **1 pt** : $|u_n - \gamma| = u_n - \gamma$ car $u_n - \gamma \geq 0$

- **1 pt** : $u_n - \gamma = v_n + \frac{1}{n} - \gamma \leq \frac{1}{n}$ car $v_n - \gamma \leq 0$

c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question 1.e) a été correctement programmée.

Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```

1 eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
2 n = floor(1/eps) + 1
3 disp(u(n))

```

- **1 pt** : intérêt : le programme renvoie une valeur approchée de γ à ϵ près

- **2 pts** : fonctionnement

× **1 pt** : on cherche n tel que $\frac{1}{n} \leq \epsilon$ car alors, par transitivité : $|u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon$

× **1 pt** : résolution $\frac{1}{n} \leq \epsilon$ et obtention de $n = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

- **1 pt** : $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

- **1 pt** : les séries sont à termes positifs

- **1 pt** : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ donc converge

- **1 pt** : par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ converge

5. a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.

- **1 pt** : découpage en termes pairs et impairs de la somme $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$ bien écrit

- **1 pt** : changement d'indices corrects

b) Déterminer deux réels α et β tels : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.

- 2 pts : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ (dont 1 pt pour la gestion du $\forall n \in \mathbb{N}^*$ dans les équivalences)

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

- 2 pts : calcul correct

6. a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

- 2 pts : calcul correct

b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

- 1 pt : $\sum_{k=1}^n a_k = 2(u_{2n} - u_n + \ln(2))$

- 1 pt : passage à la limite $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2 \ln(2)$

7. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

- 1 pt : calcul correct

b) Retrouver alors le résultat de la question 6.b).

- 1 pt : la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est continue sur $[0, 1]$

- 1 pt : somme de Riemann : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \ln(2)$

- 1 pt : $\sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2 \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(2)$

Exercice 3 / 71

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0, +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \quad 7,3 < e^2 < 7,4 \quad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

- 1 pt : la fonction f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$

- 1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

- 1 pt : $f'(1) = 0$

- 1 pt : tableau complet

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	+	+	
Variations de f'	$-\infty$	0	$+\infty$

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- 1 pt : $f(1) = e$

- 1 pt : tableau complet

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty$	e	$+\infty$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

- 1 pt : point remarquable $(1, e)$
- 1 pt : tangente horizontale en 1
- 1 pt : respect variations et limites
- 1 pt : respect de la convexité

4. a) Étudier les variations de la fonction $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto f'(x) - x$

- 1 pt : u est dérivable sur $]0, +\infty[$
- 1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, u'(x) = e^x - 1 + \frac{e}{x^2}$
- 1 pt : u est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

- 1 pt : $f'(x) = x \Leftrightarrow u(x) = 0$
- 3 pts : théorème de la bijection
 - × 1 pt : hypothèses
 - × 1 pt : $u(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$
 - × 1 pt : $0 \in]-\infty, +\infty[$
- 1 pt : $u(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 0$
- 1 pt : $u(1) < u(\alpha) < u(2)$
- 1 pt : Or, d'après le théorème de la bijection, $u^{-1} :]-\infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$. En appliquant u^{-1} , on obtient alors : $1 < \alpha < 2$

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , u_n existe et $u_n \geq 2$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pt : hérédité

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto f(x) - x$

- 1 pt : g est dérivable sur $[2, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$ et $\forall x \in [2, +\infty[, g'(x) = e^x - \frac{e}{x} - 1$
- 1 pt : D'après la question 1.b), la fonction f' est croissante sur $[2, +\infty[\subset]0, +\infty[$. Ainsi : $f'(x) \geq f'(2)$
- 1 pt : $f'(2) > 1$, et donc $g'(x) > 0$
- 1 pt : $g(2) = e^2 - e \ln(2) - 2 > 0$
- 1 pt : comme g croissante sur $[2, +\infty[$, pour tout $x \geq 2 : g(x) \geq g(2) > 0$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- 1 pt : d'après la question précédente : $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) > x$

- 1 pt : en appliquant cette inégalité à $x = u_n \geq 2$ (d'après 5.), alors $u_{n+1} \geq u_n$

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

- 1 pt : (u_n) est croissante donc soit (u_n) est majorée et converge, soit (u_n) n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$. On doit donc démontrer que (u_n) n'est pas majorée.

- 1 pt : structure raisonnement par l'absurde (Supposons que (u_n) est majorée)

- 1 pt : comme (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers ℓ

- 1 pt : d'après 5. : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$. Donc, par passage à la limite : $\ell \geq 2$

- 1 pt : par unicité de la limite et par continuité de f en ℓ , $\ell = f(\ell)$ et donc $g(\ell) = 0$

- 1 pt : $\ell \geq 2$ donc $g(\ell) > 0$. Absurde

8. Écrire un programme en Scilab qui, étant donné un réel A , renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geq A$.

- 1 pt : définition de A

- 1 pt : initialisation de u et N

- 2 pts : boucle while

- 1 pt : disp(N)

```

1  A = input('Entrez un réel A : ')
2  N = 0
3  u = 2
4  while u < A
5      N = N + 1
6      u = exp(u) - %e * ln(u)
7  end
8  disp(N)

```

9. a) Démontrer : $\forall x \in [2, +\infty[$, $2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$.

- 2 pts : $\forall x \in [2, +\infty[$, $2 \ln(x) \leq x$ (concavité ou étude de fonction)

- 2 pts : $\forall x \in [2, +\infty[$, $x \leq \frac{e^x}{3}$ (étude de fonction)

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2} u_n$.

- 1 pt : $u_n \geq 2$ donc $2 \ln(u_n) \leq u_n \leq \frac{e^{u_n}}{3}$

- 2 pts : preuve correcte de l'inégalité

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

- 3 pts : on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2 \left(\frac{6-e}{2} \right)^n$ où $\lambda =$

$$\frac{6-e}{2} > 1$$

× 1 pt : initialisation

× 2 pts : hérédité

- 1 pt : $0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \left(\frac{2}{6-e} \right)^n$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : les séries sont à termes positifs

- 1 pt : la série $\sum \left(\frac{2}{6-e} \right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{2}{6-e} \in]-1, 1[$ donc converge

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge et calculer cette intégrale.

- 1 pt : f est continue sur $]0, 1]$ donc l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est impropre en 0.
- 2 pts : tout parfait (1 pt seulement si calcul mal présenté)

11. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge-t-elle?

- 3 pts :
 - × 1 pt : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$
 - × 1 pt : $\forall x \in [1, +\infty[, e^x \geq 0$ et $f(x) \geq 0$
 - × 1 pt : $\int_1^{+\infty} e^x dx$ est divergente.

12. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question 9.a).

- 1 pt : $\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{e^x - e^{\frac{x}{2}}}$
- 1 pt : $\frac{1}{e^x - e^{\frac{x}{2}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$
- 2 pts : critère d'équivalence des SATP
 - × 1 pt : $\forall x \in [2, +\infty[, \frac{1}{e^x - e^{\frac{x}{2}}} \geq 0$ et $e^{-x} \geq 0$
 - × 1 pt : $\int_{2,+\infty} e^{-x} dx$ est une intégrale exponentielle de paramètre $1 > 0$. Elle est donc convergente
- 2 pts : critère de négligeabilité des SATP :
 - × 1 pt : $\forall x \in [2, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{e^x - e^{\frac{x}{2}}}$
 - × 1 pt : $\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x - e^{\frac{x}{2}}} dx$ est convergente